

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Ю. М. Волчков<sup>\*,\*\*</sup>, Д. В. Важева<sup>\*\*</sup>

\* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\*\* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

E-mail: volk@hydro.nsc.ru

Приведены решения контактных смешанных краевых задач для пластины и цилиндрической оболочки с использованием уравнений для оболочек, построенных на основе разложений решений уравнений теории упругости по полиномам Лежандра. Представлены результаты численного моделирования напряженного состояния в окрестности точек, в которых условия на лицевых поверхностях оболочки меняются. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическими решениями задач теории упругости и решениями, полученными на основе классических уравнений теории оболочек.

**Ключевые слова:** слоистые оболочки, полиномы Лежандра, контактные задачи, напряженно-деформированное состояние.

**Введение.** В отличие от уравнений теории оболочек, полученных на основе кинематических и силовых гипотез [1], уравнения оболочек, построенные с использованием аппроксимации решений уравнений теории упругости отрезками рядов полиномов Лежандра [2–6], позволяют задавать на лицевых поверхностях оболочки условия не только в напряжениях, но и в смещениях. Поэтому данные уравнения используются при решении смешанных задач теории пластин и оболочек, к числу которых относятся и контактные задачи. В данной работе для решения контактных задач используются уточненные уравнения теории пластин и оболочек, алгоритм построения которых изложен в [5, 6].

**1. Уравнения упругого слоя в первом приближении.** Аппроксимация напряжений и деформаций отрезками полиномов Лежандра и алгоритм построения уравнений упругого слоя изложены в [5, 6]. В данной работе приводятся только уравнения упругого слоя в первом приближении в окончательном виде, а также принятые в [5] обозначения. При построении уравнений введены понятия основных и дополнительных величин (эти величины являются коэффициентами при полиномах Лежандра в отрезках рядов, аппроксимирующих напряжения и деформации). В дифференциальные уравнения упругого слоя входят производные по пространственным переменным от основных величин. На торцевых поверхностях оболочки для уравнений в первом приближении задаются векторы нормальных и поперечных сил, изгибающие и крутящие моменты или соответствующие им перемещения и углы поворотов.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00749) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3066.2008.1).

Для перемещений и напряжений принимаются следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} u(\xi, \zeta) &= u_0(\xi) + u_1(\xi)P_1(\zeta) + u_2(\xi)P_2(\zeta) + u_3(\xi)P_3(\zeta), \\ v(\xi, \zeta) &= v_0(\xi) + v_1(\xi)P_1(\zeta) + v_2(\xi)P_2(\zeta), \\ \sigma_1(\xi, \zeta) &= t_1(\xi) + m_1(\xi)P_1(\zeta), \quad \sigma_2(\xi, \zeta) = t_2(\xi) + m_2(\xi)P_1(\zeta), \\ \sigma_{12}(\xi, \zeta) &= t_{12}(\xi) + m_{12}(\xi)P_1(\zeta) + r_{12}(\xi)P_2(\zeta). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\xi, \zeta$  — безразмерные продольная и поперечная пространственные координаты в слое соответственно;  $\sigma_1, \sigma_2$  — безразмерные нормальные напряжения в поперечном и продольном сечениях слоя соответственно;  $\sigma_{12}$  — безразмерное касательное напряжение.

Система дифференциальных уравнений упругого слоя относительно основных величин в первом приближении записывается в виде

$$\begin{aligned} \eta(t'_{11} + t_{13}) + (\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-)/2 + q_1^0 &= 0, \quad \eta(t'_{13} + t_{11}) + (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-)/2 + q_3^0 = 0, \\ \eta m'_{11} - 3t_{13} + 3(\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-)/2 + q_1^1 &= 0, \\ t_{11} = \alpha(\eta(u'_0 + v_0) + \gamma v_1), \quad t_{33} = \alpha(\gamma\eta(u'_0 + v_0) + v_1), \\ m_{11} = \alpha(\eta u'_1 + 3\gamma_1 v_2), \quad m_{33} = \alpha(\gamma\eta u'_1 + 3v_2), \\ t_{13} = (\eta(v'_0 - u_0) + u_1 + u_3), \quad m_{13} = 3(u_2 + v_1), \quad r_{12} = 5m_{13}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где штрих обозначает производную по переменной  $\xi$ .

Система 10 дифференциальных уравнений (1.2) относительно 14 коэффициентов аппроксимаций (1.1) замыкается четырьмя условиями на поверхностях слоя при  $\zeta = \pm 1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_2^\pm(\xi) = t_2(\xi) \pm m_2(\xi) \quad \text{или} \quad v^\pm(\xi) = v_0(\xi) \pm v_1(\xi) + v_2(\xi), \\ \sigma_{12}^\pm(\xi) = t_{12}(\xi) \pm m_{12}(\xi) + r_{12}(\xi) \quad \text{или} \quad u^\pm(\xi) = u_0(\xi) \pm u_1(\xi) + u_2(\xi) \pm u_3(\xi). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.1)–(1.3) напряжения отнесены к модулю сдвига  $\mu$ ; введены следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} t_1 = \frac{1}{2h\mu} \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_1(\xi, \zeta) d\zeta, \quad m_1 = \frac{3}{2h^2\mu} \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_1(\xi, \zeta) \zeta d\zeta, \quad t_{12} = \frac{1}{2h\mu} \int_{-1}^1 \bar{\sigma}_{12}(\xi, \zeta) d\zeta, \\ u = \frac{\bar{u}}{h}, \quad v = \frac{\bar{v}}{h}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \eta = \frac{h}{l}, \quad \alpha = \frac{2}{1-\gamma}, \quad \gamma = \frac{\nu}{1-\nu}, \end{aligned}$$

величины с чертой обозначают размерные напряжения и перемещения;  $x, z$  — продольная и поперечная пространственные координаты в слое.

**2. Задача об отрыве полубесконечной полосы, прижатой к жесткому основанию равномерным давлением  $p$ .** Данная задача относится к классу контактных задач с уменьшающейся зоной контакта (рис. 1). В качестве характерного линейного размера  $l$  примем расстояние от точки приложения приподнимающей силы до точки контакта полосы с основанием.

На лицевых поверхностях полосы при  $\zeta = \pm 1$  заданы следующие условия:

— в области I ( $0 \leq \xi \leq 1$ )

$$\sigma_2^+(\xi) = -p, \quad \sigma_2^-(\xi) = 0, \quad \sigma_{12}^\pm(\xi) = 0; \quad (2.1)$$

— в области II ( $1 \leq \xi < \infty$ )

$$\sigma_2^+(\xi) = -p, \quad v^-(\xi) = 0, \quad \sigma_{12}^\pm(\xi) = 0. \quad (2.2)$$

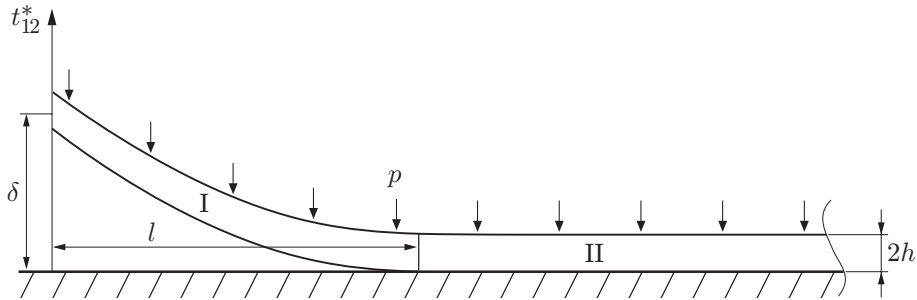


Рис. 1. Схема задачи о поднятии полуполосы, прижатой к основанию равномерным давлением:

I — область отсутствия контакта полосы с основанием; II — область контакта полосы с основанием

При  $\xi = 0$  заданы условия

$$t_1(0) = 0, \quad m_1(0) = 0, \quad t_{12}(0) = t_{12}^*. \quad (2.3)$$

Поскольку в данной задаче касательные напряжения на лицевых поверхностях полосы равны нулю, из первого уравнения системы (1.2) следует, что  $t_1(\xi) = \text{const}$ .

Решение системы (1.2), (1.3) вне области контакта (область I на рис. 1), удовлетворяющее условиям (2.1)–(2.3), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} t_1 = 0, \quad t_{12} = t_{12}^* + \frac{p\xi}{2\eta}, \quad m_1 = \frac{3p\xi^2}{4\eta^2} + \frac{t_{12}^*\xi}{4\eta}, \quad t_2 = m_2 = -\frac{p}{2}, \quad m_{12} = 0, \quad r_{12} = -t_{12}, \\ u_0 = u_0(0) + \frac{\gamma p \xi}{2\alpha\eta(1-\gamma^2)}, \quad u_1 = u_1(0) + \frac{\gamma p \xi}{\alpha\eta(1-\gamma^2)} + \frac{p\xi^3}{4\alpha\eta^3(1-\gamma^2)}, \\ v_0 = v_0(0) - u_1(0)\frac{\xi}{\eta} + \left(\frac{3p}{10\eta^2} - \frac{\gamma p}{4\alpha\eta^2(1-\gamma^2)}\right)\xi^2 - \frac{p\xi^4}{16\alpha\eta^4(1-\gamma^2)}, \\ v_1 = -\frac{p}{2\alpha(1-\gamma^2)}, \quad v_2 = -\frac{p}{6\alpha(1-\gamma^2)} - \frac{\gamma p \xi^2}{4\alpha\eta^2(1-\gamma^2)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В области контакта (область II на рис. 1) систему уравнений (1.2), (1.3) можно свести к системе дифференциальных уравнений относительно функций  $u_0(\xi)$ ,  $u_1(\xi)$ ,  $v_0(\xi)$ :

$$\begin{aligned} -3\gamma^2\eta^2u_0''(\xi) + (4 - 3\gamma^2)\eta^2u_1''(\xi) - 5(1-\gamma)u_1(\xi) - (5 - 2\gamma)\eta v_0'(\xi) = \\ = -(3/2)\gamma(1-\gamma)\eta(\sigma_2^+)'(\xi) - 3\gamma\eta(v^-)'(\xi), \\ -9\gamma\eta u_0'(\xi) + (5 - 2\gamma)\eta u_1'(\xi) + 5(1-\gamma)\eta^2v_0''(\xi) - 9v_0(\xi) = \\ = -(9/2)\gamma(1-\gamma)\sigma_2^+(\xi) - 9v^-(\xi), \\ (4 - \gamma^2)\eta u_0'(\xi) - \gamma^2\eta u_1'(\xi) - 3\gamma v_0 = 2(1-\gamma)t_1(\xi) - (1/2)\gamma(1-\gamma)\sigma_2^+(\xi) + 3\gamma(v^-)(\xi). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Характеристическое уравнение системы (2.5) имеет следующий вид:

$$\lambda[(\lambda\eta)^4 - (3/10)(\gamma + 6)(\lambda\eta)^2 + 9/4] = 0. \quad (2.6)$$

Зависимость величины  $\lambda = \delta/(2p(1-\nu))$  от параметра  $\eta$  и коэффициента Пуассона  $\nu$

$\eta$	Точное решение	Первое приближение		
		$\nu = 0,44$	$\nu = 0,33$	$\nu = 0,2$
0,05	162,80	167,44	166,99	166,61
0,10	26,20	27,62	27,48	27,36
0,15	9,90	10,65	10,56	10,51
0,20	5,27	5,75	5,70	5,65
0,25	3,37	3,72	3,68	3,64

Решение системы (2.5), удовлетворяющее условию равномерного сжатия полосы на бесконечности, представляется в виде

$$v_0 = \sum_{j=1}^2 z_j l_j(\xi) - \frac{1}{2(1-\gamma)} (\gamma t_1 + p), \quad u_1 = \sum_{j=1}^2 z_j (U_3 l_j''' + U_1 l_j'),$$

$$u_0' = \sum_{j=1}^2 z_j (U_2 l_j'' + U_0 l_j) + \frac{1}{\eta(1+\gamma)} (t_1 + \gamma p), \quad (2.7)$$

где  $l_1(\xi) = \exp(-A\xi/\eta) \cos(B\xi/\eta)$ ;  $l_2(\xi) = \exp(-A\xi/\eta) \sin(B\xi/\eta)$ ;  $A, B$  — вещественная и мнимая части корней уравнения (2.6)  $\lambda\eta = \pm A \pm iB$ ;  $U_0, U_1, U_2, U_3$  — коэффициенты, зависящие от геометрического параметра  $\eta = h/l$  и параметра  $\gamma$ , выражающегося через коэффициент Пуассона.

Остальные коэффициенты разложений (1.1) перемещений и напряжений по полиномам Лежандра в области  $\Pi$  находятся из следующих соотношений:

$$m_1 = \alpha\eta u_1' - 3\alpha\gamma(\gamma\eta(u_0' + u_1') - v_0)/4 + 3\gamma\sigma_2^+/4 + 3\alpha\gamma v^-/4,$$

$$m_{12} = 0, \quad t_{12} = -r_{12} = 5(\eta v_0' + u_1)/6, \quad t_2 = \alpha(\gamma\eta u_0' + v_1),$$

$$v_1 = (-\eta\gamma(u_0' + u_1') + 3v_0 - 3v^- + \sigma_2^+/\alpha)/4, \quad v_2 = (-\eta\gamma(u_0' + u_1') - v_0 + v^- + \sigma_2^+/\alpha)/4,$$

$$u_2 = 0, \quad u_3 = -(\eta v_0' + u_1)/6, \quad \sigma_2^+ = 3\alpha(\gamma\eta u_0' + v_0 - v^-)/2 - (\alpha\gamma\eta u_1' - \sigma_2^-)/2.$$

Решения (2.4), (2.7) содержат константы  $z_1, z_2, u_0(0), u_1(0), v_0(0), \tau_{12}^*$ . Первые пять констант определяются из условия сопряжения в точке контакта  $\xi = 1$ :

$$m_1^1 = m_1^2, \quad t_{12}^1 = t_{12}^2, \quad u_0^1 = u_0^2, \quad u_1^1 = u_1^2, \quad v_1^1 = v_1^2.$$

Величина приподнимающей силы  $\tau_{12}^*$ , приложенной в точке  $\xi = 0$ , определяется из дополнительных условий, обеспечивающих единственность решения уравнений в контактной задаче:

$$v(\xi) \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \sigma_2^-(\xi) \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq 1.$$

В таблице представлена зависимость величины  $\lambda = \delta/(2p(1-\nu))$  от параметра  $\eta = h/l$  при трех значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ . Следует отметить, что в точном решении (решении по уравнениям теории упругости) величина  $\lambda$  не зависит от значения коэффициента Пуассона [7]. В решении по уравнениям слоя в первом приближении такая зависимость имеется, но при различных значениях коэффициента Пуассона значения  $\lambda$  различаются не более чем на 2 % (см. таблицу).

На рис. 2 показана зависимость величины  $\Lambda = t_{12}^*(1-\nu)/(8\eta^3 v^-(0))$  от параметра  $\eta$ . Точки соответствуют решению по уравнениям теории упругости, горизонтальная

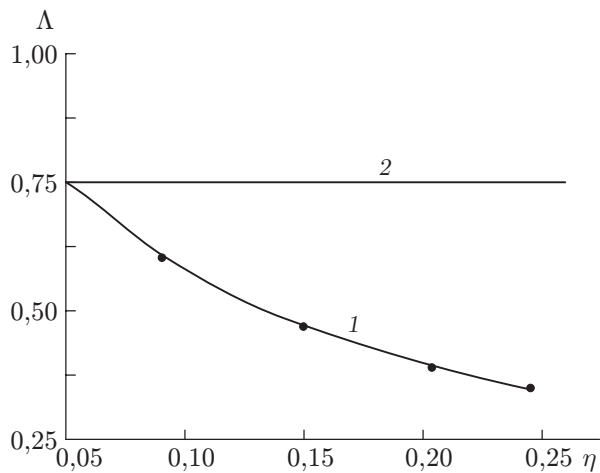


Рис. 2

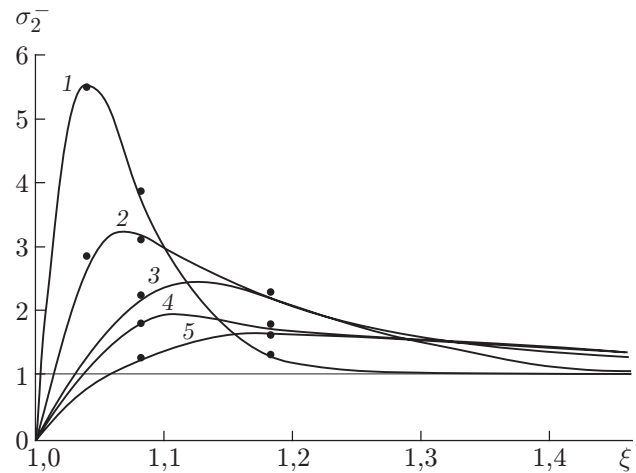


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость величины  $\Lambda$  от параметра  $\eta$ :

1 — решение по уравнениям слоя в первом приближении; 2 — решение по уравнениям теории цилиндрического изгиба; точки — решение по уравнениям теории упругости

Рис. 3. Безразмерное контактное давление в задаче о поднятии полуполосы при различных значениях параметра  $\eta$ :

1 —  $\eta = 0,05$ ; 2 —  $\eta = 0,1$ ; 3 —  $\eta = 0,15$ ; 4 —  $\eta = 0,2$ ; 5 —  $\eta = 0,25$ ; сплошная горизонтальная линия — решение по уравнениям теории цилиндрического изгиба; точки — решение по уравнениям теории упругости

линия 2 — решению по уравнениям теории цилиндрического изгиба. На рис. 3 представлено распределение безразмерного контактного давления при различных значениях параметра  $\eta$ . Точки соответствуют решению по уравнениям теории упругости [8].

Из рис. 2, 3 следует, что результаты, полученные на основе уточненных уравнений оболочек и уравнений теории упругости, удовлетворительно согласуются.

**3. Решение смешанной краевой задачи для цилиндрической оболочки.** Ниже приводятся результаты численного решения задачи о напряженно-деформированном состоянии цилиндрической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внутреннего давления (рис. 4). Часть поверхности оболочки (внутренней или внешней) предполагается закрепленной.

Используются следующие безразмерные смещения и напряжения:

$$u = \frac{U}{2h}, \quad w = \frac{W}{2h}, \quad \sigma_{11} = \frac{s_{11}}{\mu}, \quad \sigma_{13} = \frac{s_{13}}{\mu}, \quad \sigma_{33} = \frac{s_{33}}{\mu}$$

( $U, V$  — компоненты вектора смещения в направлениях 1 ( $\beta$ ) и 3 ( $\zeta$ ) соответственно;  $s_{11}, s_{13}, s_{33}$  — компоненты тензора напряжений).

Для безразмерных смещений и напряжений принимаются следующие аппроксимации по толщине оболочки:

$$\begin{aligned} u(\xi, \zeta) &= u_0(\xi) + u_1(\xi)P_1(\zeta) + u_2(\xi)P_2(\zeta) + u_3(\xi)P_3(\zeta), \\ w(\xi, \zeta) &= w_0(\xi) + w_1(\xi)P_1(\zeta) + w_2(\xi)P_2(\zeta), \\ \sigma_{11}(\xi, \zeta) &= t_{11}(\xi) + m_{11}(\xi)P_1(\zeta), \\ \sigma_{13}(\xi, \zeta) &= (t_{13} + \eta m_{13}(\xi)/3) + m_{13}(\xi)P_1(\zeta) + r_{13}(\xi)P_2(\zeta), \\ \sigma_{33}(\xi, \zeta) &= t_{33}(\xi) + m_{33}(\xi)P_1(\zeta). \end{aligned} \tag{3.1}$$

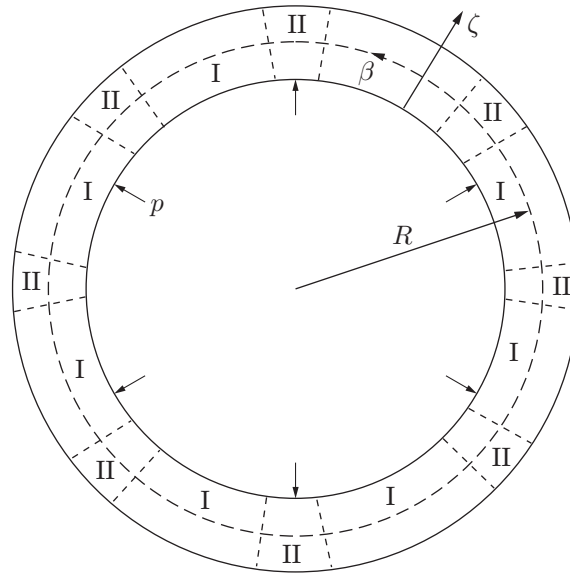


Рис. 4. Схема контактной задачи для цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением:

I, II — области с различными условиями на лицевых поверхностях оболочки

Из уравнений равновесия и соотношений закона Гука для коэффициентов разложений (3.1) получаем уравнения

$$\begin{aligned}
 \eta(t'_{11} + t_{13}) + (m_{13} + \bar{q}_{10}) &= 0, & \eta(m'_{11} + m_{13}) + (3r_{13} + \bar{q}_{11}) &= 0, \\
 \eta(t'_{13} - t_{11}) + (m_{33} + \bar{q}_{30}) &= 0, \\
 t_{11} - a(\eta(u'_0 + w_0) + \gamma w_1) &= 0, & m_{11} - a(\eta u'_1 + 3\gamma w_2) &, \\
 t_{22} - a\gamma(\eta(u'_0 + w_0) + w_1) &= 0, & m_{22} - a\gamma(\eta u'_1 + 3w_2) &= 0, \\
 t_{33} - a(\gamma\eta(u'_0 + w_0) + w_1) &= 0, & m_{33} - a(\gamma\eta u'_1 + 3w_2) &= 0, \\
 t_{13} - (\eta(w'_0 - u_0) + (u_1 + u_3)) &= 0, & m_{13} - 3u_2 - \eta u_3 &= 0, \\
 r_{13} - 5u_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Система уравнений (3.2) замыкается краевыми условиями на внутренней и внешней поверхностях оболочки. В результате задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$Y' = AY + F, \tag{3.3}$$

где  $Y = (u_0, u_1, w_0, t_{11}, m_{11}, t_{13})^T$ . Матрица  $A$  системы и вектор правой части  $F$  зависят от вида краевых условий на поверхностях оболочки. Краевая задача для системы (3.3) решалась методом ортогональной прогонки.

В задачах, результаты численных решений которых приведены ниже, условия на поверхностях оболочки в областях I и II (см. рис. 4) различны. В областях I на внутренней поверхности задавались равномерно распределенное давление  $p$  и нулевое касательное напряжение, на внешней — нулевые нормальные и касательные напряжения. В областях II в первой задаче на внутренней поверхности задавались нулевые смещения, на внешней —

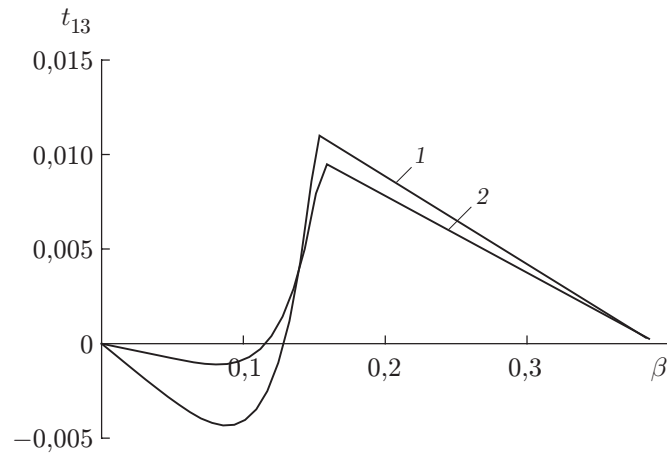


Рис. 5. Распределение перерезывающей силы по окружной координате  $\beta$ :  
 1 — нулевые смещения на внутренней поверхности оболочки в областях типа II; 2 —  
 нулевые смещения на внешней поверхности оболочки в областях типа II

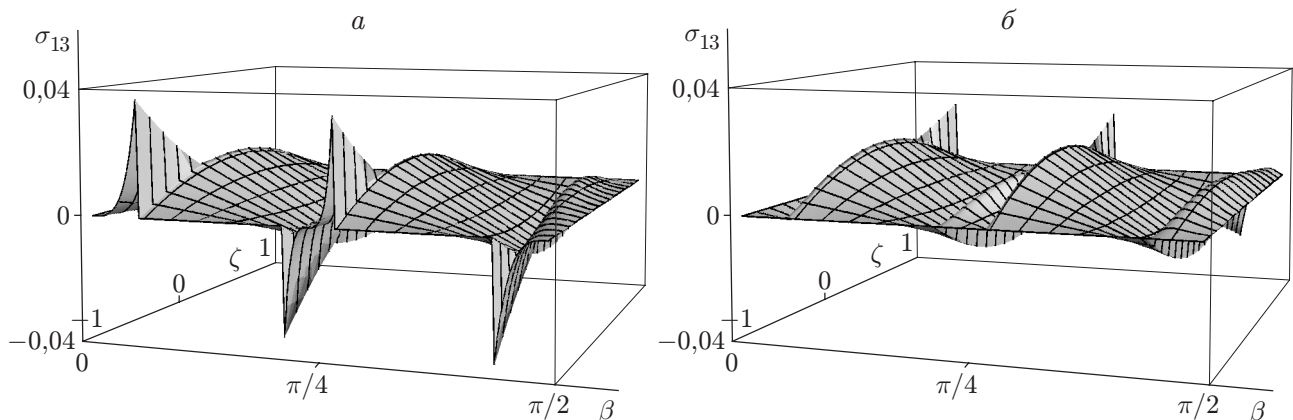


Рис. 6. Распределение касательных напряжений по сечению оболочки:  
 а — нулевые смещения на внутренней поверхности оболочки в областях типа II; б —  
 нулевые смещения на внешней поверхности оболочки в областях типа II

нулевые напряжения; во второй задаче на внутренней поверхности задавались равномерно распределенное давление  $p$  и нулевое касательное напряжение, на внешней — нулевые смещения. В обеих задачах имелось восемь областей типа II, равномерно распределенных по окружной координате  $\beta$ . Протяженность этих областей равна  $\pi/10$ . Краевые условия для областей типа II моделируют подкрепляющие продольные элементы жесткости, расположенные на внутренней или внешней поверхности оболочки (например, соответствующим образом закрепленные стрингеры). Напряжения, возникающие в окрестности подкрепляющих элементов, могут приводить либо к появлению пластических деформаций, либо к нарушению сплошности.

Задача решалась на интервале  $0 \leq \beta \leq \pi/2$ . При  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi/2$  ставились условия симметрии решения. Решения обеих задач периодичны с периодом  $\pi/8$ . Интервал  $[0; \pi/2]$  выбран для контроля симметрии численного решения.

На рис. 5 приведено распределение перерезывающего усилия  $t_{13}$  по окружной координате  $\beta$ , на рис. 6, 7 — распределения касательных напряжений  $\sigma_{13}$  и окружных напряжений  $\sigma_{11}$  по сечению оболочки.

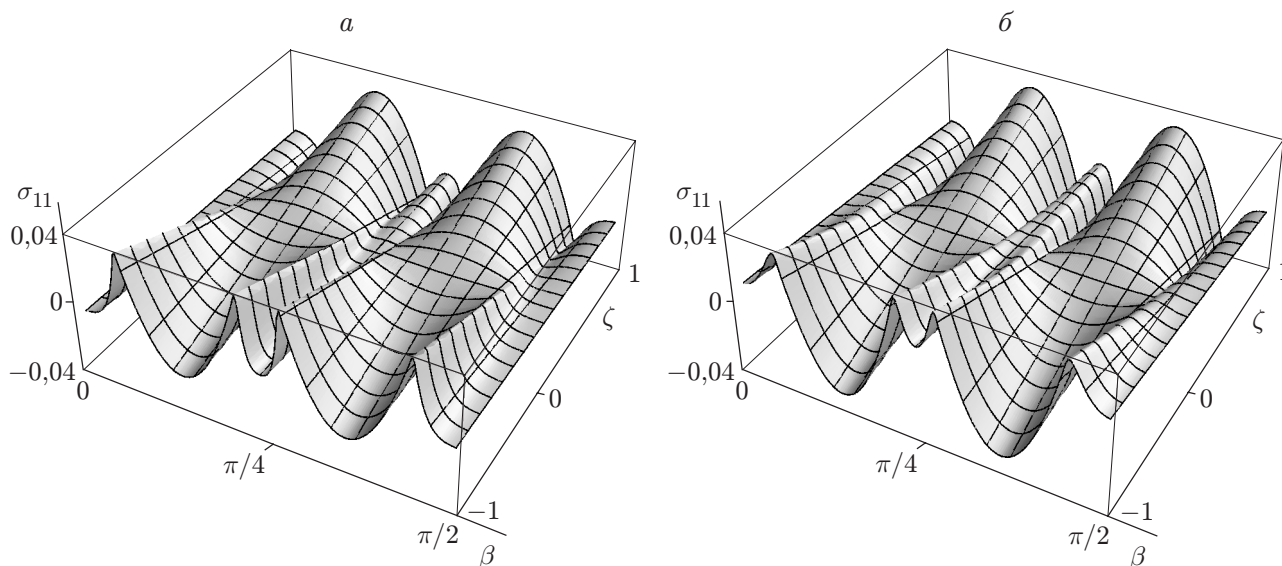


Рис. 7. Распределение окружных напряжений по сечению оболочки (обозначения те же, что на рис. 6)

Из представленных результатов следует, что расположение подкрепляющих элементов (на внутренней или внешней поверхности) оказывает влияние и на распределение касательных и нормальных напряжений, и на интенсивность концентрации напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
2. Солер А. Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
3. Иванов Г. В. Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1980.
4. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. Киев: Наук. думка, 1982.
5. Волчков Ю. М., Дергилева Л. А. Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.
6. Vajeva D. V., Volchkov Yu. M. The equations for determination of stress-deformed state of multilayered shells // Proc. of the 9th Russian-Korean intern. symp. on sci. and technol., Novosibirsk, 26 June — 2 July 2005. Novosibirsk: Novosib. State Univ., 2005. P. 547–550.
7. Дандерс Дж., Стипс М. Роль констант упругости в некоторых контактных задачах // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1970. Т. 37, № 4. С. 74–81.
8. Кир Л. М., Сильва М. А. Две смешанные задачи для полуполосы // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1972. Т. 39, № 4. С. 266–270.

Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.