

УДК 536.46+662.612+534.2

# МОДОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ В КОЛЬЦЕВОЙ КАМЕРЕ СГОРАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЛН ЭНТРОПИИ

А. В. Трилис

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, trilisartie@yandex.ru

Проведено моделирование и установлены особенности начального (линейного) этапа развития вращающихся поперечных детонационных волн в плоскорадиальной кольцевой камере сгорания. Решена возникающая на данном этапе задача линейной модовой устойчивости цилиндрического фронта дефлаграционного горения Чепмена — Жуге в радиально расходящемся дозвуковом потоке с малым числом Маха при наличии волн возмущения энтропии потока. Стационарный фронт пламени описывается разрывом газодинамических параметров при условии, что продукты сгорания находятся в химическом равновесии. Обнаружено, что фронт пламени неустойчив для некоторых типов малых возмущений основного потока горючей смеси и фронта пламени. Обнаружена неустойчивость при условии постоянного расхода в системе подачи смеси. Численно-аналитическими методами получены пространственные формы колебаний и волн возмущения фронта горения в кольцевой камере сгорания.

Ключевые слова: непрерывная спиновая детонация, нормальная скорость пламени, дефлаграционное горение, устойчивость фронта горения, квазисобственные частоты, волны энтропии.

DOI 10.15372/FGV20210404

## ВВЕДЕНИЕ

Идея сжигания смеси в режиме детонации для создания двигателей, использующих энергию горения, появилась более пятидесяти лет назад. Б. В. Войцеховский был первым, кто предложил сжигать смесь в режиме непрерывной детонации с помощью поперечных вращающихся волн (например, поперечной волны спиновой конфигурации [1, 2]). Он впервые реализовал данную идею на практике [3, 4] в плоскорадиальной кольцевой камере сгорания при радиальной подаче смеси из центра. В. В. Михайлов и М. Е. Топчиян [5] продолжили исследование явления непрерывной вращающейся детонации в плоскорадиальной кольцевой камере. Результаты и методы исследований режимов непрерывной вращающейся (спиновой) детонации в кольцевых камерах сгорания различной конфигурации достаточно подробно изложены в монографии [6]. Согласно экспериментам [3–5] (более подробно см. далее) начальный этап развития процесса непрерывной спиновой (вращающейся) детонации можно представить как развитие неустойчивости цилиндрического фронта горения в радиально расходящемся потоке горючей смеси.

В работах [7, 8] исследовалась устойчивость цилиндрических пламен, расходящихся из центра при покоящихся продуктах, в нелинейной постановке. В работах [9, 10] изучалась линейная модовая устойчивость стационарного цилиндрического фронта пламени в кольцевой камере сгорания по отношению к акустическим (изоэнтропическим) возмущениям. Получены квазисобственные частоты колебаний и волн для нескольких вариантов подачи горючей смеси в камеру. Показано существование неустойчивых вращающихся поперечных волн возмущения фронта пламени, определены скорости их вращения. Также было показано, что результаты [9, 10] качественно согласуются с поведением вращающихся квазидетонационных волн в плоском кольцевом канале в экспериментах [3–5], скорости которых лежат в диапазоне от скорости звука в продуктах реакции вплоть до скорости идеальной детонации Чепмена — Жуге.

Целью настоящей работы является исследование влияния возмущений энтропии потока горючей смеси на устойчивость цилиндрического фронта пламени в кольцевой камере сгорания, а также особенностей колебаний и волн, возникающих в данной конфигурации.

### 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ

Из экспериментальных наблюдений [3–5] следует, что на начальном этапе поджига горючей смеси уже после первого пробега иницирующей волны по кольцевому каналу формируется граница раздела области 1 холодной смеси (ближе к центру истечения смеси) и области 2 горячих продуктов сгорания, которую можно рассматривать как окружность постоянного радиуса (рис. 1). Граница раздела трансформируется во фронт горения. В данной конфигурации возникают неустойчивые колебания и окружные волны с малыми амплитудами, распространяющиеся (бегущие) вдоль кольцевого канала поперек течения горючей смеси. Это позволяет подойти к моделированию начального этапа развития непрерывной спиновой (вращающейся) детонации с точки зрения задачи об устойчивости цилиндрического фронта горения в радиально расходящемся потоке горючей смеси. С течением времени неустойчивость развивается во вращающиеся поперечные детонационные волны. Следует отметить, что, в силу дозвуковой скорости потока смеси, в области  $r < R$  абсолютно не исключается проникновение через щелевидный зазор возмущений потока вплоть до начального сечения кольцевого канала  $R_0$  и, таким образом, не исключается влияние характера подачи смеси на сами возмущения (см. рис. 1).

Стационарный фронт горения моделируется согласно подходам и предположениям, ис-

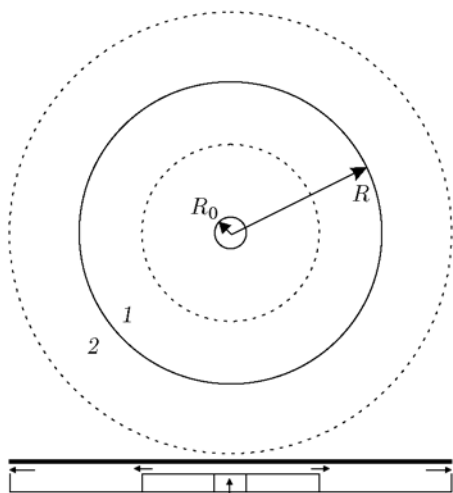


Рис. 1. Схема потока в кольцевой камере сгорания

пользуемым в работе [10]. Фронт горения описывается как сильный разрыв газодинамических параметров согласно теории экзотермического скачка [11], длины волн возмущений много больше ширины зоны горения. Такой подход позволяет считать, что горение происходит в зоне «нулевой» ширины, а все существенные особенности горения можно свести к определенным условиям на линии разрыва [12].

Для дальнейшего описания выберем полярные координаты  $(r, \varphi)$ . На рис. 2 схематично изображен стационарный фронт горения  $R$  в радиально расходящемся дозвуковом потоке горючей смеси от начальной границы радиусом  $R_0$ . Течение разделяется фронтом горения на две области:  $\Omega_1 = \{(r, \varphi) | R_0 < r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  — поток исходной (холодной) горючей смеси (область 1);  $\Omega_2 = \{(r, \varphi) | r > R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  — поток высокотемпературных продуктов реакции (область 2). Газ (смесь и продукты реакции) считается невязким, нетеплопроводным и совершенным с постоянными теплоемкостями. Тогда стационарные, радиально расходящиеся изоэнтропические течения в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  описываются следующими уравнениями [10]:

$$u_j \frac{du_j}{dr} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{dp_j}{dr},$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \rho_j u_j) = 0, \tag{1}$$

$$p_j = A_j \rho_j^{\gamma_j},$$

где  $u$  — радиальная скорость,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\gamma$  — показатель политропы,

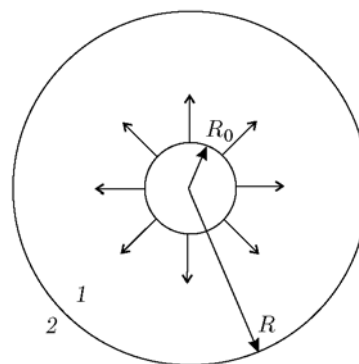


Рис. 2. Цилиндрический фронт пламени (вид сверху)

$A$  — постоянная, зависящая от термодинамических параметров на границах  $R_0$  и  $R$ ; индексы  $j = 1, 2$  здесь и далее обозначают параметры течения в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Уравнения (1) являются соответственно законами сохранения импульса, массы и энергии.

При условии, что число Маха в области  $\Omega_1$  мало, уравнения (1) в  $\Omega_1$  имеют следующее решение [10]:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \frac{u_{01}R_0}{r}, \\ p_1(r) &= p_{01} + \frac{\rho_{01}u_{01}^2}{2} - \frac{\rho_{01}u_{01}^2R_0^2}{2r^2}, \\ \rho_1 &= \rho_{01}, \quad T_1(r) = \frac{\mu_1 p_1(r)}{\rho_{01}R_g}, \\ c_1^2(r) &= \frac{\gamma_1 p_1(r)}{\rho_{01}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mu$  — молярная масса,  $R_g$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура,  $c$  — скорость звука, здесь и далее нижним индексом 01 обозначены значения газодинамических параметров на границе  $r = R_0$ . Необходимо отметить, что стационарность решения (2) следует из условия постоянства расхода на границе  $r = R_0$ . Радиус стационарного фронта горения  $R$  определяется условием стационарности фронта в лабораторной системе отсчета [10]:

$$D_f(p_1, T_1)|_R = u_1|_R \equiv \frac{u_{01}R_0}{R} \quad (3)$$

— и зависимостью скорости стационарного горения в режиме дефлаграции Чепмена — Жуге [10, 13]:

$$D_f^{CJ}(T_1) = \alpha T_1, \quad (4)$$

где коэффициент  $\alpha$  зависит от конкретной горючей смеси. Согласно экспериментальным наблюдениям [3–5] скорость горения в режимах стационарного радиального сжигания горючей смеси близка к скорости дефлаграции Чепмена — Жуге для данной смеси. Таким образом, фронт стационарного горения является фронтом дефлаграционного горения Чепмена — Жуге.

С использованием условия Чепмена — Жуге и соотношения (4) можно также рассчитать все параметры за фронтом горения на границе  $R$  и построить стационарное решение в области  $\Omega_2$  [10, 14]. Однако оно не потребуется в дальнейшем.

## 2. МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ГОРЕНИЯ

Рассмотрим нестационарную задачу при допущениях, отмеченных в начале § 1. Наложим на все стационарные параметры малые возмущения, гармонически зависящие от времени:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_j(r, \varphi, t) &= u_j(r)\mathbf{e}_r + \\ &+ [\delta u_{jr}(r, \varphi)\mathbf{e}_r + \delta u_{j\varphi}(r, \varphi)\mathbf{e}_\varphi] \exp(-i\omega t), \\ \tilde{\rho}_j(r, \varphi, t) &= \rho_j + \delta\rho_j(r, \varphi) \exp(-i\omega t), \\ \delta p_j(r, \varphi) &= c_j^2(r)\delta\rho_j(r, \varphi) + \delta s_j(r, \varphi)p_j(r)/c_{vj}, \\ \tilde{R}(\varphi, t) &= R + A(\varphi) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  — круговая частота,  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$  — орты локального базиса в полярной системе координат,  $\delta s_j$  — возмущение энтропии,  $c_{vj}$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме горючей смеси или продуктов. Третье соотношение в (5) показывает, что вклад в возмущения давления дают акустические возмущения и возмущения энтропии. Также предполагается, что возмущения скорости в области  $\Omega_1$  потенциальны. Возмущение фронта горения моделируется функцией  $A(\varphi)$  в четвертом уравнении системы соотношений (5).

Запишем известные [15] условия на фронте горения (сильный разрыв) в системе отсчета фронта, представляющие собой законы сохранения массы, импульса, энергии, и кинематическое условие, связывающее нормальную скорость горения относительно газа с нормальной скоростью движения границы:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1(\tilde{u}_{1n} - \dot{\tilde{R}}_n) &= \tilde{\rho}_2(\tilde{u}_{2n} - \dot{\tilde{R}}_n); \\ \tilde{p}_1 + \tilde{\rho}_1(\tilde{u}_{1n} - \dot{\tilde{R}}_n)^2 &= \tilde{p}_2 + \tilde{\rho}_2(\tilde{u}_{2n} - \dot{\tilde{R}}_n)^2; \\ \tilde{\mathbf{u}}_{1\tau} &= \tilde{\mathbf{u}}_{2\tau}; \\ h_1(\tilde{p}_1, \tilde{\rho}_1) + Q(\tilde{p}_1, \tilde{\rho}_1) + \frac{(\tilde{u}_{1n} - \dot{\tilde{R}}_n)^2}{2} &= \\ &= h_2(\tilde{p}_2, \tilde{\rho}_2) + \frac{(\tilde{u}_{2n} - \dot{\tilde{R}}_n)^2}{2}; \\ \tilde{u}_{1n} - \tilde{D}_f &= \dot{\tilde{R}}_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Индексы  $n$  и  $\tau$  обозначают соответственно нормальные и касательные составляющие скоростей,  $h_j$  — энтальпия единицы массы горючей смеси или продуктов,  $Q$  — удельная теплота сгорания. Возмущенная скорость горения  $\tilde{D}_f$  в каждый момент времени уже не является скоростью горения Чепмена — Жуге (4) и не зависит от кривизны фронта горения, например, по модели Маркштейна [16], в которой предложено учитывать тепловую структуру пламени при помощи зависимости скорости горения от кривизны фронта. Таким образом, кинематическое условие в (6) примет вид

$$\tilde{u}_{1n} = \dot{\tilde{R}}_n. \quad (7)$$

Далее все расчеты проводятся в безразмерных величинах:

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \frac{\delta \mathbf{u}_1}{c_{01}}, \quad \bar{p}_1 = \frac{\delta p_1}{\gamma_1 p_{01}}, \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\delta \rho_1}{\rho_{01}},$$

$$\bar{c}_1^2 = \frac{c_1^2}{c_{01}^2}, \quad \bar{T}_1 = \frac{\delta T_1}{T_{01}}, \quad \bar{\omega} = \omega \frac{R - R_0}{c_{01}}, \quad (8)$$

$$\bar{s}_1 = \frac{\delta s_1}{c_{p1}}, \quad \bar{A}(\varphi) = \frac{A(\varphi)}{R - R_0}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R - R_0},$$

$$\bar{t} = \frac{t c_{01}}{R - R_0}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{c_{01}} \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t}, \quad M_1(\bar{r}) = \frac{u_1(\bar{r})}{c_{01}};$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \frac{\delta \mathbf{u}_2}{c_2(R)}, \quad \bar{p}_2 = \frac{\delta p_2}{\gamma_2 p_2(R)}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\delta \rho_2}{\rho_2(R)},$$

$$\bar{c}_2^2 = \frac{c_2^2}{c_2^2(R)}, \quad \bar{s}_2 = \frac{\delta s_2}{c_{p2}}, \quad \bar{T}_2 = \frac{\delta T_2}{T_2(R)}, \quad (9)$$

$$M_2(\bar{r}) = \frac{u_2(\bar{r})}{c_2(R)}, \quad K_2 = \frac{c_2(R)}{c_{01}},$$

где  $c_{01}^2 \equiv \gamma_1 p_{01} / \rho_{01}$  — скорость звука на границе  $R_0$  со стороны области  $\Omega_1$ ,  $c_{pj}$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

С использованием выражений (5) проводится линеаризация системы соотношений (6) в безразмерных величинах (8), (9). Условие стационарного фронта горения Чепмена — Жуге (4) равносильно условию равенства единице локального числа Маха  $M_2$  за фронтом [1, 11]. Тогда линеаризованная система соотношений упрощается аналогично работам

[10, 14]. Таким образом, условия на фронте горения имеют вид:

$$G_1(-i\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)) - G_1\bar{u}_{1r} + G_2\bar{\rho}_1 + G_3\bar{s}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R},$$

$$\bar{u}_{1r} = -i\bar{\omega}\bar{A}(\varphi), \quad \bar{r} = \bar{R}, \quad (10)$$

$$\bar{s}_2 = F_1(-i\bar{\omega}\bar{A}(\varphi)) - F_1\bar{u}_{1r} + F_2\bar{\rho}_1 + F_3\bar{s}_1, \quad \bar{r} = \bar{R},$$

где  $G_j, F_j, j = 1-3$ , — безразмерные коэффициенты, зависящие от стационарных газодинамических параметров перед и за фронтом горения. Условие равенства касательных составляющих скоростей в (6) нужно для определения вихревых мод возмущений, которые могут появиться за фронтом горения. Так как на границе  $R_0$  не предполагается вихревой составляющей возмущений, то возмущение скоростей в области  $\Omega_1$ , как было отмечено ранее, можно описать одной скалярной функцией — потенциалом, градиент которого равен возмущению скорости. Из (10), таким образом, видно, что система граничных условий расщепляется. Поэтому достаточно решить задачу в области  $\Omega_1$  с первыми двумя условиями из (10) на фронте горения, чтобы узнать поведение системы в целом.

Уравнения для потенциальных возмущений для решения (2) в области  $\Omega_1$  можно получить из общих уравнений акустики движущейся неоднородной среды [14, 17], принимая во внимание, что основной стационарный поток неавихрен и изоэнтропичен, число Маха стационарного потока является малым параметром задачи и акустические и энтропийные волны распространяются независимо в линейном приближении. С точностью до первой степени числа Маха основного потока и при отделенном времени получаем следующие уравнения в безразмерных величинах (8):

$$\bar{\omega}^2 \bar{f} + \Delta \bar{f} + 2i\bar{\omega}M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} = 0, \quad (11)$$

$$i\bar{\omega}\bar{s}_1 - M_1 \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial \bar{r}} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{c}_1^2 \bar{\rho}_1 = i\bar{\omega}\bar{f} - M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}}, \quad (13)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{c}_1^2(\bar{\rho}_1 + \bar{s}_1), \quad (14)$$

где  $\Delta$  — безразмерный при помощи соотношений (8) оператор Лапласа в полярных координатах. Безразмерный потенциал возмущения скорости:  $\bar{f} = f / (c_{01}(R - R_0))$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_1 = \nabla \bar{f}$ .

Следует отметить, что уравнение (12) означает адиабатическое распространение возмущений энтропии. То есть возмущение энтропии в «жидкой» частице не меняется при движении. Этот факт следует из-за пренебрежения явлениями вязкости и теплопроводности, а также другими диссипативными процессами в среде [15, 17]. Таким образом, в области  $\Omega_1$  в силу (10) получаем следующую задачу в терминах потенциала скоростей:

$$\bar{\omega}^2 \bar{f} + \Delta \bar{f} + 2i\bar{\omega}M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} = 0, \quad i\bar{\omega}\bar{s}_1 - M_1 \frac{\partial \bar{s}_1}{\partial \bar{r}} = 0,$$

$$G_2 \left( i\bar{\omega}\bar{f} - M_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} \right) + G_3 \bar{c}_1^2 \bar{s}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}, \quad (15)$$

$$\bar{u}_{1r} \equiv \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{r}} = -i\bar{\omega}\bar{A}(\varphi), \quad \bar{r} = \bar{R}.$$

Третье соотношение в (15) позволяет вычислить амплитуду возмущения фронта горения  $\bar{A}(\varphi)$ .

Для полного определения задачи в области  $\Omega_1$  нужно еще поставить условия на границе  $r = R_0$ . Вид этого условия зависит от того, каким образом устроена подача горючей смеси. В работах [9, 10, 14] рассматривались три случая для акустических возмущений: постоянный расход, постоянная скорость, постоянное давление. Однако при наличии возмущений энтропии на начальной границе требуется задать еще одно условие. Согласно способу подачи горючей смеси в кольцевой камере сгорания, коллектор подачи при входе в область  $\Omega_1$  претерпевает достаточно сильное сужение [3–5]. Тогда согласно соображениям, приведенным в книге [12], на границе  $r = R_0$  можно поставить условие постоянства числа Маха. Таким образом, далее будут рассматриваться три ситуации в системе подачи: 1 — постоянный расход и постоянное число Маха, 2 — постоянная радиальная скорость и постоянное число Маха, 3 — постоянное давление и постоянное число Маха. Линеаризованные граничные условия для возмущений, соответствующие этим ситуациям, приведены ниже:

$$\bar{q} \equiv \bar{u}_{1r} + M_1 \bar{\rho}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}_0, \quad (16)$$

$$2\bar{u}_{1r} - M_1 \bar{s}_1 - M_1(\gamma_1 - 1)\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}_0;$$

$$\bar{u}_{1r} = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}_0, \quad (17)$$

$$2\bar{u}_{1r} - M_1 \bar{s}_1 - M_1(\gamma_1 - 1)\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}_0;$$

$$\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}_0, \quad (18)$$

$$2\bar{u}_{1r} - M_1 \bar{s}_1 - M_1(\gamma_1 - 1)\bar{p}_1 = 0, \quad \bar{r} = \bar{R}_0,$$

где  $\bar{q} = \delta q / \rho_{01} c_{01}$  — безразмерное возмущение расхода. Следует отметить, что условие постоянства расхода (16) записано при учете возмущений плотности основного потока (см. второе соотношение в (5)).

Соотношения (15) вместе с условиями (16) далее будем называть моделью 1, вместе с условиями (17) — моделью 2, вместе с условиями (18) — моделью 3.

При решении уравнений (11) и (12) в вышеописанных моделях методом разделения переменных (метод Фурье) получаются возможные моды колебаний и волн с частотой  $\bar{\omega}$  и произвольными постоянными комплексными амплитудами. Общее решение уравнения (11) в виде мод выражается через функции Бесселя нецелого индекса. Его свойства подробно изучаются в работе [10]. Решение уравнения (12) в виде мод имеет вид

$$\bar{s}_{1k}(\bar{r}, \varphi) = \sigma_k \exp \left( \frac{i\bar{\omega}\bar{r}^2}{2M_{01}\bar{R}_0} + ik\varphi \right), \quad (19)$$

где  $k$  — константа разделения переменных, целое число, выделяющее отдельную угловую моду колебаний [10],  $\sigma_k$  — произвольная постоянная комплексная амплитуда.

При подстановке решений уравнений (11)–(14) в виде мод в соответствующие граничные условия описанных выше моделей 1–3 мы получим однородные системы из четырех линейных уравнений для нахождения неизвестных комплексных амплитуд:

$$\hat{G}(\bar{\omega}; k)\vec{x} = 0, \quad (20)$$

где  $\vec{x} = (b_k, d_k, a_k, \sigma_k)$  — вектор-столбец комплексных амплитуд,  $(b_k, d_k, a_k)$  — постоянные комплексные амплитуды общего решения уравнения (11) и возмущения фронта горения соответственно [10]. Известно, что система (20) имеет нетривиальное (ненулевое) решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю:

$$\det(\hat{G}(\bar{\omega}; k)) = 0. \quad (21)$$

Таблица 1

Квазисобственные частоты  $\bar{\omega}_{kl}$  в модели 1

$k$	$l$				
	1	2	3	4	5
0	$1.04 + 0.424i$	$1.94 + 0.494i$	$2.88 + 0.434i$	$3.89 + 0.454i$	$4.80 + 0.510i$
1	$1.07 + 0.359i$	$2.00 + 0.477i$	$2.90 + 0.443i$	$3.91 + 0.447i$	$4.83 + 0.510i$
2	$0.11 + 0.052i$	$1.13 + 0.207i$	$2.15 + 0.360i$	$3.01 + 0.458i$	$3.95 + 0.433i$
3	$0.19 - 0.052i$	$1.16 + 0.034i$	$2.24 + 0.158i$	$3.22 + 0.368i$	$4.05 + 0.430i$
4	$0.22 - 0.163i$	$1.18 - 0.138i$	$2.29 - 0.044i$	$3.36 + 0.141i$	$4.26 + 0.375i$
5	$0.24 - 0.279i$	$1.20 - 0.307i$	$2.31 - 0.235i$	$3.43 - 0.090i$	$4.47 + 0.156i$

Таблица 2

Квазисобственные частоты  $\bar{\omega}_{kl}$  в модели 2

$k$	$l$				
	1	2	3	4	5
0	$1.14 + 0.123i$	$1.92 + 0.333i$	$2.85 + 0.111i$	$3.99 + 0.156i$	$4.79 + 0.376i$
1	$0.10 - 0.045i$	$1.16 + 0.026i$	$2.06 + 0.320i$	$2.85 + 0.141i$	$3.99 + 0.139i$
2	$0.15 - 0.148i$	$1.19 - 0.153i$	$2.30 + 0.077i$	$2.99 + 0.274i$	$4.00 + 0.111i$
3	$0.16 - 0.261i$	$1.20 - 0.333i$	$2.35 - 0.200i$	$3.37 + 0.151i$	$4.04 + 0.160i$
4	$0.14 - 0.379i$	$1.21 - 0.507i$	$2.36 - 0.416i$	$3.50 - 0.202i$	$4.36 + 0.181i$
5	$0.11 - 0.499i$	$1.22 - 0.678i$	$2.37 - 0.612i$	$3.53 - 0.460i$	$4.64 - 0.148i$

Таблица 3

Квазисобственные частоты  $\bar{\omega}_{kl}$  в модели 3

$k$	$l$				
	1	2	3	4	5
0	$1.07 + 0.346i$	$1.93 + 0.450i$	$2.87 + 0.349i$	$3.92 + 0.379i$	$4.80 + 0.475i$
1	$1.10 + 0.269i$	$2.02 + 0.434i$	$2.89 + 0.365i$	$3.94 + 0.369i$	$4.83 + 0.476i$
2	$0.15 - 0.006i$	$1.15 + 0.103i$	$2.20 + 0.286i$	$3.01 + 0.408i$	$3.97 + 0.351i$
3	$0.20 - 0.114i$	$1.18 - 0.074i$	$2.28 + 0.565i$	$3.26 + 0.308i$	$4.06 + 0.360i$
4	$0.22 - 0.228i$	$1.20 - 0.248i$	$2.32 - 0.153i$	$3.41 + 0.045i$	$4.30 + 0.318i$
5	$0.22 - 0.345i$	$1.21 - 0.417i$	$2.34 - 0.346i$	$3.46 - 0.198i$	$4.53 + 0.072i$

Уравнение (21) определяет квазисобственные частоты  $\bar{\omega}_k$  (реальные значения определяют частоты колебаний, а мнимые значения квазисобственных частот определяют развитие колебаний по времени) колебаний и волн в соответствующих моделях 1–3. Для каждого  $k$  существует набор квазисобственных частот  $\bar{\omega}_{kl}$ , соответствующих радиальным модам колебаний, где  $l$  — номер радиальной моды. При  $k = 0$

уравнение дает частоты чисто радиальных колебаний.

### 3. РАСЧЕТ ВОЗМУЩЕНИЙ ГОРЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЛН ЭНТРОПИИ

Выполним конкретные расчеты для камеры, в которой проводились эксперименты [3–5] со стехиометрической ацетиленокислородной

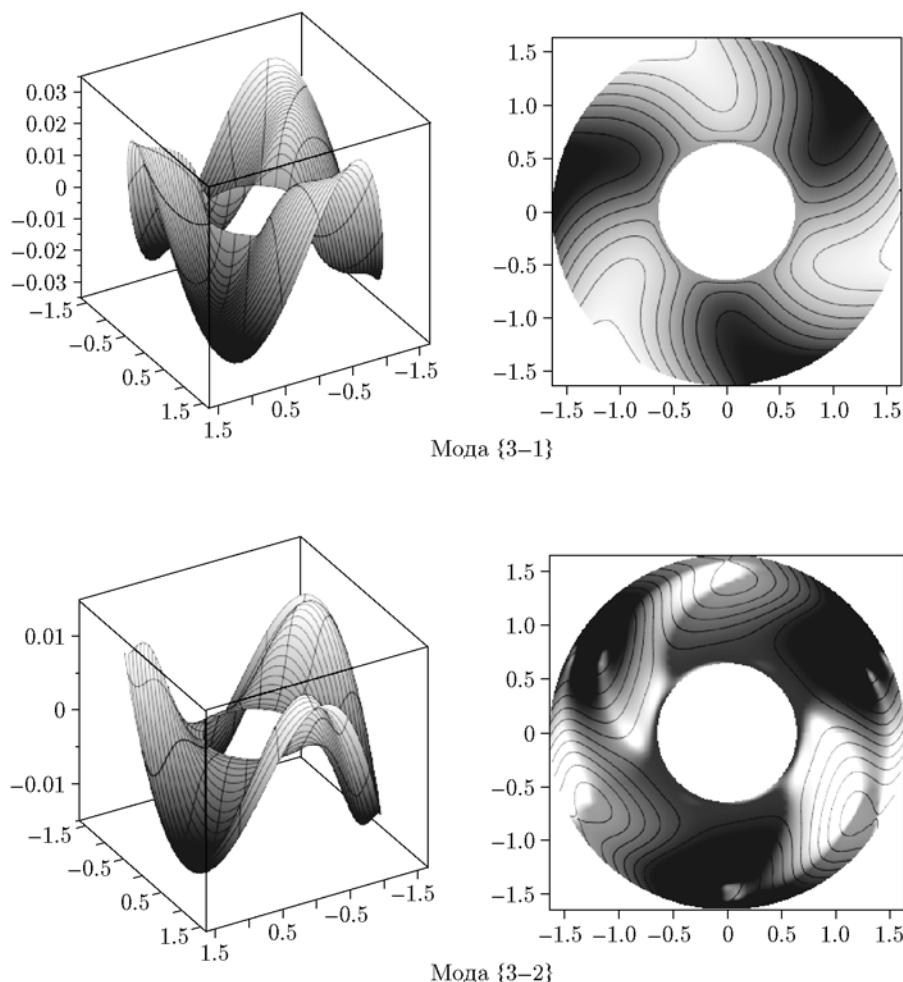


Рис. 3. Распределение возмущений давления для мод {3-1} и {3-2} в модели 3

горючей смесью. Начальные (граничные) газодинамические параметры для стационарных течений (2), (3) рассчитывались при помощи подходов и методов, изложенных в работе [10]. Для стехиометрической ацетиленокислородной смеси показатель политропы  $\gamma_1 = 1.3323$ , молярная масса  $\mu_1 = 0.0303$  кг/моль. Начальные газодинамические параметры:  $p_{01} = 23\,964$  Па,  $\rho_{01} = 0.2965$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_{01} = 328.1474$  м/с,  $T_{01} = 294.5620$  К,  $u_{01} = 109.3825$  м/с,  $M_{01} = 1/3$ . Радиус начальной границы  $R_0 = 40.35$  мм, радиус фронта горения  $R_{exp} = 103$  мм. Газодинамические параметры за стационарным фронтом горения рассчитывались с использованием условия Чепмена — Жуге и условия химического равновесия продуктов [13, 18]. Согласно этому  $\alpha = 0.1369$  м/(с·К) (см. формулу (4)), показатель политропы продуктов  $\gamma_2 = 1.2229$ , скорость звука за фронтом горе-

ния  $c_2(R) = 1\,126$  м/с. Коэффициенты в системе соотношений (10) имеют следующие значения:  $G_1 = 16.3119$ ,  $G_2 = 0.7078$ ,  $G_3 = 2.8380$ ,  $F_1 = -1.5794$ ,  $F_2 = -0.2987$ ,  $F_3 = -0.4669$ .

### 3.1. Устойчивость цилиндрического фронта пламени

Найденные при помощи уравнения (21) квазисобственные частоты в соответствующих моделях приведены в табл. 1–3.

Из таблиц 1–3 видно, что во всех моделях существуют квазисобственные частоты с положительной мнимой частью. Так как при записи зависимости от времени мы использовали множитель  $e^{-i\omega t}$ , то это значит, что во всех описанных моделях существуют моды колебаний и волн, неустойчивые по малым периодическим возмущениям.

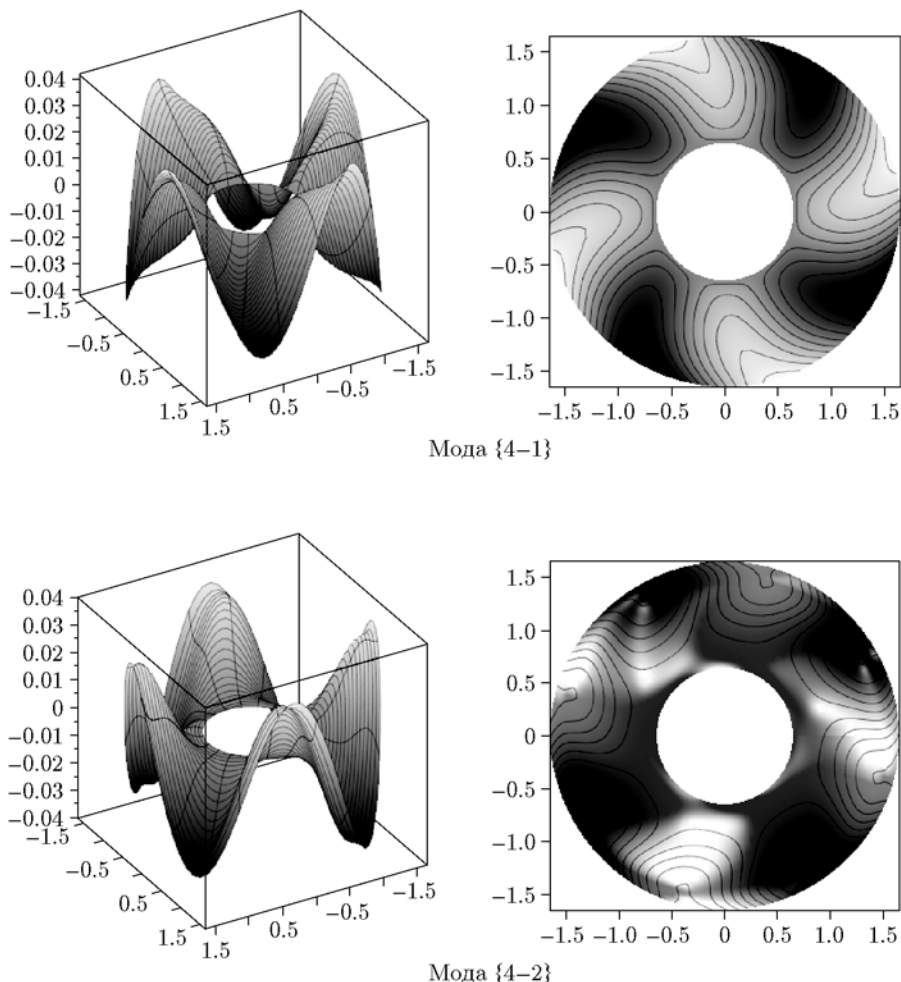


Рис. 4. Распределение возмущений давления для мод {4-1} и {4-2} в модели 3

Следует обратить внимание на квазисобственные частоты, приведенные в табл. 1, для модели 1 с постоянным расходом в системе подачи горючей смеси. В работах [9, 10] было показано, что для акустических возмущений при постоянном расходе в системе подачи все квазисобственные частоты колебаний и волн имеют отрицательную мнимую часть и фронт горения устойчив. При наличии возмущений энтропии даже при условии постоянного расхода в системе подачи существуют моды колебаний и волн, для которых фронт горения неустойчив.

Из энергетического подхода (см., например, [12]) следует, что при отсутствии диссипации внутри области колебаний неустойчивость появляется, когда средний за период колебаний суммарный поток энергии в область колебаний через границы положительный. Таким образом, устойчивость в моделях 1-3 все-

цело определяется условиями для возмущений на границах  $R_0$  и  $R$  области  $\Omega_1$  (см. рис. 2). Для неустойчивых мод суммарный поток энергии в среднем за период колебаний должен быть положительным.

### 3.2. Механика колебаний и волн

Аналогично работам [9, 10] в моделях данной работы существуют поперечные окружные волны возмущения фронта горения, распространяющиеся (вращающиеся) по кругу безразмерного радиуса  $\bar{R}$  с угловой скоростью  $\text{Re}(\bar{\omega}_{kl})/k$ . Это следует из выражения для возмущения фронта горения (5) при разложении в гармонический ряд Фурье функции  $A(\varphi)$ . Для моды  $\{k-l\}$  возмущенный фронт горения будет иметь  $k$  локальных пучностей («горбов»), вращающихся по окружности безразмерного ради-



уса  $\bar{R}$  с соответствующей угловой скоростью  $\text{Re}(\bar{\omega}_{kl})/k$ .

Для наглядности на рис. 3 и 4 представлены распределения безразмерных возмущений давления по углу и безразмерному радиусу для нескольких мод в модели 3 с равенством нулю возмущения давления и числа Маха на начальном радиусе. Для других граничных условий на начальном радиусе механика колебаний будет аналогичной. Отличаться могут значения функций на начальном радиусе и начальные фазы колебаний.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено моделирование начального (линейного) этапа развития вращающихся поперечных детонационных волн в плоскорадиальной кольцевой камере сгорания и выявлены его особенности при наличии волн возмущения энтропии потока горючей смеси. В рамках феноменологической теории горения смесей при помощи теории возмущений решена возникающая на данном этапе задача модовой устойчивости цилиндрического фронта дефлаграционного горения Чепмена — Жуге при малых числах Маха стационарного потока горючей смеси. Получены квазисобственные частоты и моды колебаний и волн, возникающих в данной конфигурации.

В системе подачи горючей смеси на начальной границе  $r = R_0$  ставилось несколько типов граничных условий для возмущений (см. соотношения (16)–(18)). Обнаружено, что существуют квазисобственные частоты, которые описывают возрастающие или убывающие по времени колебания и волны. Показано, что если в системе имеются возмущения энтропии, то фронт горения неустойчив даже при условии постоянного массового расхода (и при постоянстве числа Маха) в системе подачи горючей смеси, в отличие от акустических возмущений [10, 14].

Исследована механика возмущений: получены пространственные формы квазисобственных функций колебаний в потоке горючей смеси и формы колебаний и волн возмущенного фронта горения. Показано наличие вращающихся структур в кольцевом канале камеры сгорания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкин К. И., Трошин Я. К. Газодинамика горения. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. Войцеховский Б. В. О спиновой детонации // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 114, № 4. — С. 717–720.
3. Войцеховский Б. В. Стационарная детонация // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129, № 6. — С. 1254–1256.
4. Войцеховский Б. В. Спиновая стационарная детонация // ПМТФ. — 1960. — № 3. — С. 157–164.
5. Михайлов В. В., Топчийн М. Е. К исследованиям непрерывной детонации в кольцевом канале // Физика горения и взрыва. — 1965. — Т. 1, № 4. — С. 20–23.
6. Быковский Ф. А., Ждан С. А. Непрерывная спиновая детонация. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013.
7. Filyand L., Sivashinsky G. I., Frankel M. L. On self-acceleration of outward propagating wrinkled flames // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1994. — V. 72, N 1-2. — P. 110–118.
8. Минаев С. С., Пирогов Е. А., Шарыпов О. В. Нелинейная модель гидродинамической неустойчивости расходящегося пламени // Физика горения и взрыва. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 8–16.
9. Trilis A. V., Vasiliev A. A., Sukhinin S. V. Traveling circumferential unstable wave of cylindrical flame front // J. Phys.: Conf. Ser. — 2016. — V. 722. — DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012039.
10. Трилис А. В., Сухинин С. В., Васильев А. А. Устойчивость цилиндрического фронта пламени в кольцевой камере сгорания // Сиб. журн. индустр. матем. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 67–79.
11. Митрофанов В. В. Детонация гомогенных и гетерогенных систем. — Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2003.
12. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. — М.: Физматлит, 1961.
13. Васильев А. А., Трилис А. В. Скорость дефлаграционного горения при повышенных давлениях и температурах // Теплофизика и аэромеханика. — 2013. — Т. 20, № 5. — С. 615–622.
14. Трилис А. В. Акустические колебания и устойчивость цилиндрического фронта горения в плоскорадиальной кольцевой камере сгорания: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИГиЛ СО РАН. — Новосибирск, 2017.
15. Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.
16. Markstein G. H. Experimental and theoretical studies of flame-front stability // J. Aeronaut. Sci. — 1951. — V. 18, N 3.

- 
17. **Блохинцев Д. И.** Акустика движущейся неоднородной среды. — М.: Наука, Физматлит, 1981.
18. **Васильев А. А.** Оценка зависимости скорости пламени от давления и температуры // Физика горения и взрыва. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 13–17.

*Поступила в редакцию 22.05.2020.*

*После доработки 19.06.2020.*

*Принята к публикации 22.07.2020.*

---