УДК 551.501; 519.2 DOI: 10.21782/GIPR0206-1619-2018-1(178-185)

А. В. ИГНАТОВ

Институт географии им. В. Б. Сочавы СО РАН,
664033, Иркутск, ул. Улан-Баторская, 1, Россия, ignatov@irigs.irk.ru

ПАРАМЕТРЫ КАЧЕСТВА И НАДЕЖНОСТИ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

Обсуждены основные свойства моделей и модельных оценок, формирующие понятие их качества, к которым отнесены точность, надежность и подробность описания приближенных модельных оценок. На основе совокупного учета количественных параметров этих характеристик введено понятие меры качества модели. Названо главное свойство, определяющее качество модели, — точность модельного расчета на независимых данных. Рассмотрены приближенные оценки значения переменной в интервальной и вероятностной формах, которые могут быть построены на основе данных о ее значениях в прошлом. Для вероятностных оценок значений переменных рекомендовано, помимо меры точности, использовать меру информативности, определяемую через энтропии соответствующих функций распределения вероятностей. Особое внимание при разработке алгоритмов оценки меры качества уделено вычислению параметров, характеризующих надежность приближенных модельных оценок и самих моделей. Надежность оценивается через вероятности событий, имеющих место при построении или использовании модели. Мера надежности модели зависимости, определяемая на этапе ее построения с использованием обучающей выборки, рассчитана как произведение двух вероятностей — меры доверия к предикторам зависимой переменной и меры доверия к оператору, описывающему зависимость этой переменной от них. Приведены рекомендации по оценке этих вероятностей. С учетом повышенных требований к надежности прогностических оценок предложен алгоритм ее увеличения на основе объединения в ансамбль условной модельной и безусловной вероятностных оценок.

Ключевые слова: *построение моделей, проверка гипотез, свойства приближенных оценок, мера качества модели, повышение надежности прогноза.*

A. V. IGNATOV

V. B. Sochava Institute of Geography, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
ul. Ulan-Batorskaya, 1, Irkutsk, 664033, Russia, ignatov@irigs.irk.ru

QUALITY AND RELIABILITY PARAMETERS OF PREDICTIVE MODELS IN HYDROMETEOROLOGY

This paper discusses the main properties of models and model assessments forming the notion of their quality, which include the accuracy, reliability and details of the description of approximate model assessments. On the basis of taking into account the entire set of quantitative parameters of these characteristics, the notion of the measure of model quality is introduced. The main property determining the model quality is highlighted, namely the accuracy of model calculation using independent data. Approximate estimations of the values of a variable in the interval and probabilistic form are considered, which can be constructed on the basis of data on its values in the past. For probabilistic assessments of the values of the variables, it is suggested that, in addition to the measure of accuracy, the measure of informativity should be used, which is determined in terms of entropies of the corresponding probability distribution functions. In developing the algorithms for assessing the measure of quality, special attention is paid to calculating the parameters characterizing the reliability of approximate model assessments and the models themselves. The reliability is assessed in terms of the probabilities of the events occurring when the model is constructed or used. The measure of probability of the model of dependence determined at the stage of constructing it by using the learning sample is calculated as the product of two probabilities: the measure of confidence to the predictors of a dependent variable, and the measure of confidence to the operator describing a dependence of this variable on them. Recommendations are made for assessing these probabilities. N view of the stricter requirements for the reliability of predictive assessments, the algorithm is suggested for increasing it by combining into an ensemble the conditional model and unconditional probability assessments.

Keywords: *construction of models, verification of hypotheses, properties of approximate assessments, measure of model quality, improvement in predictability.*

ВВЕДЕНИЕ

Анализируя проблемы и перспективы, связанные с предсказанием климата, В. М. Катцов [1] отмечал, что в настоящее время особую остроту приобрела потребность в прогнозах климата с заблаговременностью от сезона до нескольких лет и более. Сложившееся положение обусловливает необходимость развития методов прогнозирования практически важных региональных и локальных климатических характеристик с такой заблаговременностью. Закономерности, управляющие изменчивостью гидрометеорологических характеристик на таких отрезках времени, неизвестны, поэтому при решении этих задач снова приходится работать с глобальной климатической системой как с «черным ящиком», характеризующимся большим числом измеряемых параметров. В этих условиях в качестве инструмента прогнозирования на первое место выходят не основанные на уже известных физических законах модели, а физико-статистические, построение которых опирается на методы многомерной статистики, интеллектуального исследования информации, вероятностного моделирования и т. д. [2].

Применение этих методов помогает быстрее разобраться в огромном количестве эмпирических данных и стохастических взаимосвязях между ними, однако существенно повышает требования к надежности получаемых результатов [3].

При построении модели взаимосвязи между переменными используется информация, содержащаяся в ретроспективных данных. Выборка ретроспективных данных — это множество оценок совместных значений зависимой характеристики y и ее предикторов $\vec{x}$, сформированное по результатам прямых или косвенных измерений этих переменных в прошлом. Такие данные применяются непосредственно для построения модели или для проверки гипотез о зависимости рассчитываемой характеристики от ее предикторов. Количество дополнительной информации, закладываемое в модель вместе с этими гипотезами, может быть различным. При минимуме такой информации оператор модели строится главным образом на использовании сведений, содержащихся в самой выборке ретроспективных данных, при максимуме эти данные применяются только для проверки гипотетического оператора. Отдельные гипотезы, как и конкретные данные из ретроспективной выборки, могут быть ошибочными. Если такие ошибки не выявляются и не устраняются в процессе моделирования, то они переносятся на его результаты, которые становятся в определенной мере сомнительными.

ОСНОВНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ КАЧЕСТВА МОДЕЛИ

На основе одних и тех же исходных данных может быть построено множество различных моделей, расчеты по которым одной и той же характеристики будут различаться. В связи с этим возникает задача [4] выбора лучшей модели для расчета. Ее решение требует формулировки понятия качества модели и соответствующего этому понятию количественного критерия для построения алгоритма выбора оптимальной модели.

Первой и основной характеристикой качества модели традиционно считается фактическая точность расчетов на независимых данных, выполняемых с ее помощью. Однако на этапе построения она еще неизвестна и обычно заменяется некоторым показателем точности аппроксимации зависимой переменной ее модельной оценкой на ретроспективных данных. В практике моделирования в качестве показателя, *или меры точности*, аппроксимации данных используются такие характеристики, как множественный коэффициент корреляции, коэффициент детерминации и т. д.

Если при построении модели применялись те или иные способы ее подгонки к данным, то точность их аппроксимации обычно оказывается выше фактической точности модельного расчета. Чтобы уменьшить влияние подгонки на результат оценивания точности модели, используют формулу несмещенной оценки остаточной дисперсии или метод «выбрасываемой точки» [5, 6] при оптимизации коэффициентов модели. Часто также практикуется разделение данных на обучающую и контрольную выборки. В этом случае первая выборка служит для построения модели, а вторая — для оценки ожидаемой точности расчетов.

Подгонка модели к данным уменьшает и ее надежность — второе важнейшее свойство, определяющее качество модели. *Мера надежности* модели — это вероятность правомерности ее применения для расчетов. Она оценивается с учетом числа независимых совместных реализаций функции и аргументов, использованных для построения и проверки модели, точности аппроксимации значений функции их модельными оценками, способа подгонки модели к данным. Вопрос оценки меры надежности требует специального рассмотрения.

Третья существенная, но уже менее важная составляющая качества модели — *подробность описания получаемой с помощью модели приближенной расчетной оценки*. Действительно, чем более детально (при одной и той же точности и надежности) описание приближенного результата расчета, тем большую ценность он представляет для потребителя. Подробность описания приближенной оценки можно характеризовать, в частности, числом используемых для него независимых числовых параметров.

Названные три свойства в основном определяют понятие «качество модели». В связи с этим критерий для выбора лучшей модели можно формировать с учетом всех трех или по крайней мере первых двух из этих трех свойств. Если приближенную модельную оценку можно описывать в некоторой стандартной форме (например, в виде интервала или плотности нормального распределения), то учет подробности ее описания перестает иметь значение для сравнения различных моделей по уровню их качества. Поэтому если стандартизировать форму и подробность описания модельной оценки, то *меру качества* модели можно определить, например, как произведение мер ее точности и надежности.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ФОРМИРУЕМЫЕ НА ОСНОВЕ ВЫБОРКИ РЕТРОСПЕКТИВНЫХ ДАННЫХ, И ИХ НАДЕЖНОСТЬ

Существует несколько основных форм описания приближенной оценки значения переменной [7–9]. Рассмотрим здесь интервальную и вероятностную формы и их надежность. Мера надежности приближенной оценки характеризует вероятность ее соответствия фактическому распределению ошибки оценивания значения переменной. Ее также называют «доверительной вероятностью».

Самая надежная приближенная оценка — оценка *максимальной неопределенности*, задаваемая интервалом или отрезком $[y_{\min}, y_{\max}]$ возможной изменчивости переменной y. Оценка меры ее надежности M_a равняется вероятности попадания фактического значения характеристики y в любую произвольную точку отрезка $[y_{\min}, y_{\max}]$. Если значения $y_{\min}$ и $y_{\max}$ неизвестны, то они могут быть оценены на основе выборки ретроспективных данных о реализациях независимых значений переменной y. В этом случае границы отрезка $[y_{\min}, y_{\max}]$ задаются таким образом, чтобы все наблюдавшиеся ранее значения y находились внутри этого отрезка. При такой оценке границ отрезка $[y_{\min}, y_{\max}]$ мера надежности утверждения $y_{\min} \le y \le y_{\max}$ может быть вычислена как $M_a = n/(n+1)$, где n — число независимых реализаций значений функции [10].

Любая приближенная оценка значения произвольной переменной y наиболее полно может быть показана плотностью распределения $f(y)$ вероятности возможного фактического значения этой переменной [11]. Данную форму описания будем называть *вероятностной оценкой*. Она представляет собой наиболее общее описание значения переменной по сравнению с другими оценками, которые могут быть построены на основе вероятностной формы.

Очень часто на практике при отсутствии других оценок применяется *вероятностная безусловная эмпирическая* оценка $f_e(y)$ — плотность безусловного распределения переменной y, которая может быть построена любым традиционным образом по всей ретроспективной выборке значений y. Если это распределение аппроксимировать на области $[y_{\min}, y_{\max}]$ гистограммой равных по вероятности интервалов числом p, то количество реализовавшихся значений y, не противоречащих оценке безусловного распределения в виде названной гистограммы, будет равняться n/p, где n — число независимых значений y в выборке ретроспективных данных. Тогда средняя по всем равновероятным интервалам гистограммы априорная оценка меры надежности M_e использования $f_e(y)$ в качестве оценки значения переменной y может быть вычислена как отношение:

$$M_e = (n/p)/(n/p + 1) = n/(n + p).$$

Для гистограммы с не равными по вероятности интервалами формула будет выглядеть несколько сложнее:

$$M_e = \sum_{i=1}^{p} w_i^2 n \big/ (w_i n + 1),$$

где w_i — вероятность (относительная частота встречаемости значений переменной y), приходящаяся на i-й интервал гистограммы.

Число разбиений p области $[y_{\min}, y_{\max}]$ на интервалы при построении гистограммы отражает подробность описания оценки распределения. Чем выше такая подробность, тем более детально гистограмма может отразить характер распределения выборки, но тем менее точной становится оценка значений плотности распределения. Понятно, что существует некоторый компромисс между подробностью описания и точностью оценки распределения в виде гистограммы. Можно формулировать различные оптимизационные задачи для поиска такого компромисса. Решение одного из вариантов подобной задачи — гистограмма с равными по вероятности интервалами, число которых $p \approx n^{1/3}$ [12].

Интервальная оценка максимальной неопределенности — это построенная по ретроспективным данным гистограмма с одним ($p = 1$) интервалом, в который укладываются все наблюдавшиеся ранее значения переменной y. Однако такую гистограмму нельзя назвать вероятностной оценкой, так как никакой информации о распределении вероятности возможных значений переменной на отрезке $[y_{\min}, y_{\max}]$ она не содержит.

Вместо гистограммы может использоваться ее сглаженный скользящим осреднением (со статистикой осреднения n/p) аналог. Оценка меры надежности при этом будет той же самой. Если же распределение $f_e(y)$ сглаживать (или аппроксимировать) некоторой положительно определенной аналитической функцией, то следует говорить об эффективном числе различимых значений переменной y. Это число можно считать равным уменьшенному на единицу (за счет условия нормировки) числу (≥ 2) свободных параметров этой функции, доопределяемых по значениям переменной y в выборке ретроспективных данных.

При произвольном выборе математической структуры аналитического выражения для $f_e(y)$ в результат вносится некоторая не связанная с ретроспективными данными информация, поэтому при оценке меры надежности M_e отношение $n/(n + p)$ должно быть умножено на вероятность (w) применимости выбранной для аппроксимации эмпирического распределения аналитической функции. Эта вероятность может быть оценена по обучающей выборке посредством вычисления критерия «хи-квадрат».

Рассмотренные выше приближенные оценки безусловны, т. е. сформированы без учета каких-либо факторов, и не зависят, в частности, от значений каких-либо других переменных. Модельные оценки, зависящие от предикторов рассчитываемой переменной, являются условными, но их построение требует задания значений этих предикторов.

Условная вероятностная эмпирическая оценка — это условная плотность распределения вероятности $f(y/\vec{x})$, для расчета которой используется выборка $n(\vec{x})$ измеренных значений функции. Эти значения подбираются из ретроспективных данных по условию их максимальной близости в пространстве предикторов к точке, задаваемой вектором $\vec{x}$. Поскольку такая оценка функции зависит от заданного значения аргументов $\vec{x}$, то ее уже в определенном смысле можно считать модельной.

Оценка меры надежности для условного эмпирического распределения строится на основе тех же принципов, что и оценка M_e. Отличие состоит в том, что число реализаций $n(\vec{x})$, по которому оценивается условное распределение $f(y/\vec{x})$, меньше числа n реализаций в обучающей выборке. Соответственно, на один равновероятный интервал гистограммы условного распределения будет приходиться $n(\vec{x})/p$ реализаций функции. Тогда эмпирическая оценка меры доверия к условному распределению, построенному по $n(\vec{x})$ выделенным из обучающей выборки совместным реализациям функции и аргументов, может быть задана формулой, аналогичной формуле для безусловного распределения:

$$M_y = \frac{n(\vec{x})}{n(\vec{x}) + p}.$$

Если при вычислении $f(y/\vec{x})$ фактическую область изменения предикторов разбить на $q \geq 1$ статистически одинаково обеспеченных ретроспективными данными независимых фрагментов, то на каждую независимую оценку условного распределения будет приходиться $n(\vec{x}) = n/q$ совместных реализаций функции y и ее аргументов $\vec{x}$. В этом случае мера доверия к каждой такой оценке будет вычисляться по формуле

$$M_y = n/(n + qp),\ q \geq 1,\ p \geq 1.$$

Скользящее сглаживание зависимости условного распределения от предикторов со статистикой осреднения n/q не влияет на его оценку надежности.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ И ИНФОРМАТИВНОСТИ МОДЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕТРОСПЕКТИВНЫХ ДАННЫХ

В качестве показателей, характеризующих абсолютную ошибку аппроксимации функции модельной оценкой на обучающей выборке, наиболее часто используются дисперсия (s^2) или стандартное отклонение (s), характеризующие среднее различие фактических значений и аппроксимирующих их точечных модельных оценок. Для вычисления относительных показателей для базы сравнения обычно берут аналогичные параметры (σ^2) и (σ) безусловного распределения зависимой переменной на обучающей выборке. В качестве относительного показателя ошибки модельного расчета можно применять отношения s^2/σ^2 или s/σ.

Мера точности модельной аппроксимации обучающей или контрольной выборки M_m может быть определена как единица минус значение относительного показателя ошибки аппроксимации. В качестве такой меры точности часто выбирают коэффициент детерминации ($k_{\text{дм}}$), характеризующий долю «объясненной» с помощью модели дисперсии зависимой переменной,

$$M_m = k_{\text{дм}} = 1 - s^2/\sigma^2 .$$

Оперируя понятиями приближенных оценок в виде плотностей распределения $f_e(y)$ и $f(y / \vec{x})$, лучше говорить не об их точности, а об их информативности [11, 13]. В этом случае в качестве базы сравнения выбирается плотность $f_a(y)$ равномерного на отрезке $[y_{\min}, y_{\max}]$ распределения, обладающая максимальной [14] энтропией из всех возможных распределений на этом отрезке. Для получения оценки меры информативности следует разбить область изменчивости функции $[y_{\min}, y_{\max}]$ на конечное число отрезков и вычислить по стандартной формуле энтропии всех названных распределений E_e, $E_м$ и E_a. Далее с учетом оценок этих энтропий рассчитываются меры информативности соответствующих вероятностных оценок

$$M_{\text{и}} = 1 - E_м/E_a \quad \text{или} \quad M_{\text{и}} = 1 - E_e/E_a .$$

При использовании вероятностных оценок переход от мер точности к мерам информативности при оценке качества моделей вполне оправдан. Так, например, обладающая достаточно высокой надежностью эмпирическая оценка $f_e(y)$ характеризуется также и ненулевой мерой информативности и, соответственно, ненулевой мерой качества. Это позволяет применять ее в прогностических целях, что, кстати, часто делается на практике при отсутствии более подходящих предсказаний.

ПАРАМЕТРЫ НАДЕЖНОСТИ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ НА ЭТАПЕ ЕЕ ПОСТРОЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ

Процедура построения модели состоит в нахождении оператора $G(\vec{x})$, позволяющего вычислить условную модельную оценку $f(y / \vec{x})$. Для этого требуется определить перечень используемых предикторов $\vec{x}$ и математическую структуру оператора, описывающего зависимость переменной y от предикторов $\vec{x}$. Оценка меры надежности модели $M_м$ может быть найдена как произведение двух вероятностей. Одну из них (m_1) можно назвать мерой доверия к предикторам, вторую (m_2) — мерой доверия к оператору описания зависимости от них, рассчитываемой по модели переменной. Мера доверия m_1 интерпретируется как вероятность того, что зависимость от заданной комбинации предикторов, описываемая оператором $G(\vec{x})$, действительно имела место в прошлом. Мера доверия m_2 является оценкой вероятности того, что наблюдавшаяся (т. е. при $m_1 = 1$) в прошлом зависимость, описываемая оператором $G(\vec{x})$, сохранится в будущем или при использовании оператора $G(\vec{x})$ для расчетов на независимых данных.

Неопределенность в оценке меры m_1 зависит главным образом от способа выбора предикторов модели. Если они назначаются исходя из достоверного содержательного обоснования, то эта вероятность может быть близка к единице. Если же такое обоснование отсутствует и оптимальная комбинация предикторов подбирается путем проверки множества пробных гипотез [4, 15] и выбора из них оптимальной по заданному критерию, то мера доверия m_1 может оказаться близкой к нулю. Расчетная оценка этой меры по результатам подбора аргументов основывается на вычислении вероятности случайного присутствия в ретроспективных данных по крайней мере одной (из всех пробных) комбинации аргументов, зависимость функции от которых статистически выглядит как неслучайная. Мера доверия к списку предикторов, выбранному по результатам проверки множества таких гипотез, может быть оценена по формуле

$$m_1 \approx \left[1 - (s_{\text{опт}}/\sigma)^n\right]^g ,$$

где σ — среднеквадратичное отклонение функции от ее среднего значения на обучающей выборке; $s_{\text{опт}}$ — среднеквадратичное отклонение ошибки аппроксимации функции для выбранной модели; n —

эффективное число независимых совместных реализаций функции и аргументов; g — число пробных гипотез, проверенных при поиске оптимальной комбинации предикторов.

Свойства реальных данных, из которых формируется обучающая выборка, понижают эффективное число независимых совместных реализаций переменных. Оно может быть существенно меньше полного числа реализаций, используемых для построения модели. На величину такого уменьшения влияет точность задания значений переменных, характер их совместного распределения и автокорреляция. Способ оценки его величины требует отдельного рассмотрения.

Если зависимость от предикторов описывается в форме условного распределения, то оценка меры доверия к такому распределению будет и оценкой меры доверия к оператору модели. Чем выше точность аппроксимации зависимости локальным средним, тем менее важной становится подробность описания локального условного распределения для интерпретации и использования результата расчета по модели. Это обстоятельство может быть применено для повышения надежности модельной оценки за счет уменьшения подробности ее описания путем соответствующего выбора значения параметра p. Для высокоточных оценок значение параметра p может быть понижено до минимума, т. е. вплоть до $p = 1$. Минимальное значение параметр p принимает также в том случае, когда модель зависимости строится в форме уравнения регрессии

$$y(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf\left(y / \vec{x}\right) dy + y'(\vec{x}) \approx R(\vec{x}) + y'.$$

При построении регрессионной модели используется предположение о том, что случайный остаток y' (отклонение фактического значения от аппроксимации условного среднего) не зависит от значений предикторов $\vec{x}_n$ и обладает нормальным ($p = 1$) распределением с нулевым математическим ожиданием. В качестве $R(\vec{x})$ может быть задана некоторая аналитическая функция с числом ($q \geq 1$) оптимизируемых параметров, аппроксимирующая зависимость условного среднего $\bar{y}(\vec{x})$ от вектора предикторов $\vec{x}$. Оптимизация оператора осуществляется по условию минимума остаточной дисперсии $s^2 \to \min$. Мера доверия к такой модели может быть вычислена по формуле

$$M_м = m_1 m_2 \approx \left(1 - \left(\frac{s_{опт}}{\sigma}\right)^n\right)^g \frac{n}{n+q},$$

в которой отношение $n/(n + q)$ имеет смысл меры доверия к оператору регрессии $R(\vec{x})$ и характеризует надежность вычисления локального среднего.

ПОВЫШЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПРОГНОСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ

Часто модели разрабатываются для предсказания будущих значений переменных. Прогностические оценки при их использовании на практике имеют повышенные требования к надежности [3]. Модельная прогностическая оценка $f_{пр}(y)$ строится путем подстановки известных на момент составления прогноза значений предикторов $\vec{x}_{пф}$ в оператор $G(\vec{x})$, описывающий зависимость прогнозируемой переменной от этих предикторов:

$$f_{пр}(y) = G(\vec{x}_{пф}) = f\left(y / \vec{x}_{пф}\right).$$

Мера доверия к прогностической оценке вычисляется как произведение меры доверия $M_{арг}$ к значениям $\vec{x}_{пф}$ предикторов на меру доверия $M_м$ к используемой для расчета модели. Если значения предикторов заданы достоверно, то мера доверия к результату расчетов равняется мере надежности модели. Если мера доверия к модельной оценке $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$ слишком мала, чтобы можно было с разумным риском использовать результат прогностического расчета на практике, то можно попытаться увеличить его надежность за счет конструирования ансамблевого прогноза. Если других условных модельных прогностических оценок нет, то можно попробовать сформировать такой ансамбль, объединяя оценку $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$ с безусловными оценками $f_e(y)$ и $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$.

При использовании модели с мерой надежности $M_м$ прогнозу $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$ можно доверять с вероятностью $M_м$. С дополнительной вероятностью $(1 - M_м)$ может быть все, что угодно, но в рамках ограничений, накладываемых на возможные значения функции ее безусловными оценками. В такой ситуации может ставиться задача построения вероятностной оценки с более высокой надежностью, но с минимальными потерями прогностической информации, содержащейся в модельной оценке $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$. Для достижения этой цели составим полный набор возможных комбинаций доверия и недоверия к используемым для формирования искомого оценкам:

$$\hat{f_{\text{пр}}}(y) = M_м M_e f_1(y) + M_м (1 - M_e) f\left(y / \vec{x}_{пф}\right) + \\ + M_e (1 - M_м) f_e(y) + (1 - M_м)(1 - M_e) f_2(y). \quad (1)$$

В этой формуле $f_1(y)$ — функция, получаемая на основе объединения путем логической операции «И» модельной $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$ и безусловной $f_e(y)$ эмпирической оценок, реализующая утверждение полного доверия к этим оценкам. Функция $f_2(y)$ — произвольная плотность распределения, описывающая событие «все, что угодно», но ограниченная условием $f_2(y) \equiv 0$ вне отрезка $[y_{\min}, y_{\max}]$.

Мера надежности оценки $\hat{f_{\text{пр}}}(y)$ вычисляется как средневзвешенное значение мер надежности усредняемых по формуле (1) плотностей вероятности:

$$M_н = M_м M_e 1 + M_м (1 - M_e) M_м + M_e (1 - M_м) M_e + (1 - M_м)(1 - M_e) M_2.$$

Если условное и безусловное распределения строятся с учетом одних и тех же данных о значениях переменной y, то $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$ и $f_e(y)$ не являются независимыми. В этой ситуации информация, на основе которой построена оценка $f_e(y)$, была полностью использована при построении оператора $G(\vec{x})$. Поэтому из двух оценок $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$ и $f_e(y)$, каждая из которых считается надежной, в качестве $f_1(y)$ просто выбирается более точная, т. е. $f\left(y / \vec{x}_{пф}\right)$.

Событие «может быть все, что угодно», но в рамках ограничений, накладываемых на возможные значения функции, описывается практически надежной интервальной оценкой, допускающей внутри отрезка $[y_{\min}, y_{\max}]$ любые распределения переменной y. Чтобы ликвидировать эту неопределенность с минимальным привнесением субъективной информации, плотность распределения $f_2(y)$ можно заменить равномерной на отрезке $[y_{\min}, y_{\max}]$ плотностью распределения $f_a(y)$, обладающей (при наличии только такой информации об этой функции) наибольшей энтропией. Однако мера доверия M_{2a} к $f_a(y)$ при такой замене неизвестна. Если представить вероятность $M_{2a} = 0$, то надежность оценки $\hat{f_{\text{пр}}}(y)$ будет минимальна. При росте M_{2a} надежность ансамблевой оценки также будет увеличиваться, достигая некоторой предельной величины при $M_{2a} = 1$. Размах изменчивости $M_н$ за счет неопределенности M_{2a} составляет величину $(1 - M_м)(1 - M_e)$. Например, при $M_м = 0{,}5$ и $M_e = 0{,}9$ оценка меры надежности $M_н$ для $\hat{f_{\text{пр}}}(y)$, построенной по формуле (1), составит величину $0{,}905 \pm 0{,}025$.

Принимая во внимание все сказанное, в итоге получаем приближенные формулы для построения расчетной вероятностной оценки повышенной надежности и меры доверия к ней, выражающиеся только с использованием определяемых в процессе построения модели $G(\vec{x})$ характеристик:

$$\hat{f_{\text{пр}}}(y) \approx M_м f\left(y / \vec{x}_{пф}\right) + \left(1 - M_м\right)\left[M_e f_e(y) + (1 - M_e) f_a(y)\right],$$

$$M_н \approx M_м M_e 1 + M_м^2 (1 - M_e) + M_e^2 (1 - M_м) + (1 - M_м)(1 - M_e)(1 \pm 1)/2. \quad (2)$$

Оценка в форме (2) обладает, как правило, большей мерой качества по сравнению со всеми входящими в нее частными оценками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, учет описанных в данной статье параметров доверия к моделям взаимосвязи между переменными позволяет разработать [16] алгоритмы, обеспечивающие повышенную устойчивость применения статистических методов для поиска закономерностей, скрытых в данных многофакторных наблюдений. В результате модели, описывающие такие закономерности, можно применять для расчетов на независимых данных с большей уверенностью. На основе использования модельных оценок в форме плотности распределения вероятности с учетом мер доверия к ним становится возможным повышать качество прогностических расчетов за счет достижения компромисса между их надежностью и информативностью [17]. Это, в свою очередь, позволяет более точно оценивать риски, связанные с применением прогнозов на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Катцов В. М.** Предсказание климата: достижения, проблемы, перспективы // Метеорология и гидрология. — 2010. — № 1. — С. 18–22.
2. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976. — 736 с.
3. **Кондратьев К. Я.** Неопределенности данных наблюдений и численного моделирования климата // Метеорология и гидрология. — 2004. — № 4. — С. 93–119.
4. **Кузьмин В. А.** Отбор и параметризация прогностических моделей речного стока // Метеорология и гидрология. — 2001. — № 3. — С. 85–90.
5. **Христофоров А. В.** Особенности задачи прогноза гидрологических характеристик по уравнениям регрессии // Метеорология и гидрология. — 1975. — № 11. — С. 72–80.
6. **Христофоров А. В.** Устойчивость распространения линейных корреляционных зависимостей в гидрологических расчетах и прогнозах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. геогр. — 1982. — № 5. — С. 56–61.
7. **Великанов М. А.** Ошибки измерения и эмпирические зависимости. — Л.: Гидрометеоиздат, 1962. — 302 с.
8. **Казакевич Д. И.** Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии. — Л.: Гидрометеоиздат, 1977. — 319 с.
9. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 356 с.
10. **Игнатов А. В.** Идея алгоритма экстраполяции нестационарного гидрометеорологического ряда с использованием оптимизированной эмпирической модели // География и природ. ресурсы. — 2010. — № 1. — С. 136–143.
11. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. — 564 с.
12. **Игнатов А. В.** Информационно-вероятностное моделирование в географических исследованиях // География и природ. ресурсы. — 2006. — № 2. — С. 27–33.
13. **Шеннон К.** Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. — 273 с.
14. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. — М.: Наука, 1977.— 831 с.
15. **Резников А. П.** Предсказание естественных процессов обучающейся системой. — Новосибирск: Наука, 1982. — 287 с.
16. **Игнатов А. В., Кравченко В. В., Чекмарёв А. А.** Стохастическое моделирование: версия «Эксперт». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016617121 от 27.06.2016 [Электронный ресурс]. — http://www.irigs.irk.ru (дата обращения 31.03.2017).
17. **Бураков Д. А., Гордеев И. Н., Игнатов А. В., Петкун О. Э., Путинцев Л. А., Чекмарёв А. А.** Прогнозирование притока воды в Красноярское и Саяно-Шушенское водохранилища во втором квартале года // География и природ. ресурсы. — 2016. — № 2. — С. 175–183.

Поступила в редакцию 27 июня 2017 г.