

УДК 519.622.2

## Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца\*

А.Н. Пчелинцев

Тамбовский государственный технический университет, ул. Советская, д. 106, г. Тамбов, 392000  
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

**Пчелинцев А.Н.** Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 2. — С. 191–201.

В работе описывается модификация метода степенных рядов для построения приближенных решений системы Лоренца. Приведены результаты вычислительного эксперимента. Также рассматривается физическое моделирование динамики системы Лоренца с помощью процессов, происходящих в электрической цепи.

**Ключевые слова:** система Лоренца, аналоговый умножитель, интегратор, метод степенных рядов, радиус сходимости, свободная конвекция, аттрактор Лоренца.

**Pchelintsev A.N.** Numerical and physical modeling of the Lorenz system dynamics // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 2. — P. 191–201.

This paper describes a modification of a power series for the construction of approximate solutions of the Lorenz system. The results of the computer-aided simulation are presented. Also, the physical modeling of the dynamics of the Lorenz system of the processes occurring in the circuit are considered.

**Key words:** Lorenz system, analog multiplier, integrator, method of power series, radius of convergence, free convection, Lorenz attractor.

---

### 1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (1)$$

где  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  — некоторые положительные числа, параметры системы [1]. Обычно исследование системы Лоренца проводят при  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  и  $b = 8/3$  (классические значения параметров).

Впервые эта система была получена в задаче о свободной конвекции в горизонтальном слое жидкости постоянной толщины при разложении скорости течения и температуры в двойные ряды Фурье с последующим усечением до первых-вторых гармоник. Динамическая система (1) также возникает и в других процессах:

1. Конвекция в тороидальной трубе [2, с. 454–455];
2. Одномодовый лазер [3];
3. Осциллятор с инерционным возбуждением [4, с. 288–295].

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-07-00077).

Отметим [4, с. 185], что для любого решения системы Лоренца существует такой момент времени, когда соответствующая фазовая траектория навсегда погружается в сферу  $S$  с центром в точке  $C_S(0, 0, z_S)$ , где  $z_S = \sigma + r$ , и радиусом

$$R_S = \frac{z_S}{2} \sqrt{1 + b \max \left\{ \frac{1}{\sigma}, 1 \right\}}.$$

Поэтому существует предельное множество (аттрактор Лоренца), к которому притягиваются все траектории динамической системы при  $t \rightarrow \infty$  [5, с. 357–359]. Таким образом, аттрактор определяет поведение решений системы (1) на больших отрезках времени.

Из-за отсутствия точных методов решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида для анализа структуры аттрактора часто применяются численные методы такие, как например сочетание явной схемы Эйлера с центрально-разностной схемой [1], Адамса [6], использование старших производных [7, с. 211–220], а также Рунге–Кутты 4-го порядка [8, 9]. В случае классических значений параметров системы наблюдается неустойчивость ее решений, поскольку положения равновесия системы имеют седловой тип. Это ограничивает применение указанных методов, поскольку растет общая ошибка с увеличением отрезка интегрирования [10, с. 78, 83] (при этом она не может быть больше величины  $2R_S + \delta$ , где  $\delta$  достаточно мало). Уменьшение шага  $\Delta t$  интегрирования в этом случае не может дать желаемого результата, так как ошибка интегрирования имеет экстремальный характер в зависимости от  $\Delta t$ . Один из вариантов преодоления этой проблемы является переход к высокоточным вычислениям [11], но такой подход ставит исследователя в жесткие рамки: во-первых, малая степень свободы для уменьшения ошибки (изменение величины  $\Delta t$  и точности представления вещественного числа для управления вычислительным процессом), во-вторых, большой объем вычислений при очень малых  $\Delta t$ . Другим вариантом решения данной проблемы может быть применение метода степенных рядов. В статье описана модификация этого метода для динамических систем вида (1), позволяющая достаточно быстро определять коэффициенты разложения в ряд. При этом получена оценка радиуса сходимости степенных рядов.

Для генерации сигналов (хаотических колебаний), описывающих траектории на аттракторах динамических систем с определенными видами нелинейностей правой части, на практике также применяют физическое моделирование с помощью электрических схем [12] (или аналоговых вычислительных машин). В настоящей статье рассмотрена схема генератора динамики системы Лоренца как альтернатива численному моделированию. Также для системы (1) исследован случай, когда  $b = 2\sigma$ .

## 2. Физическое моделирование динамики

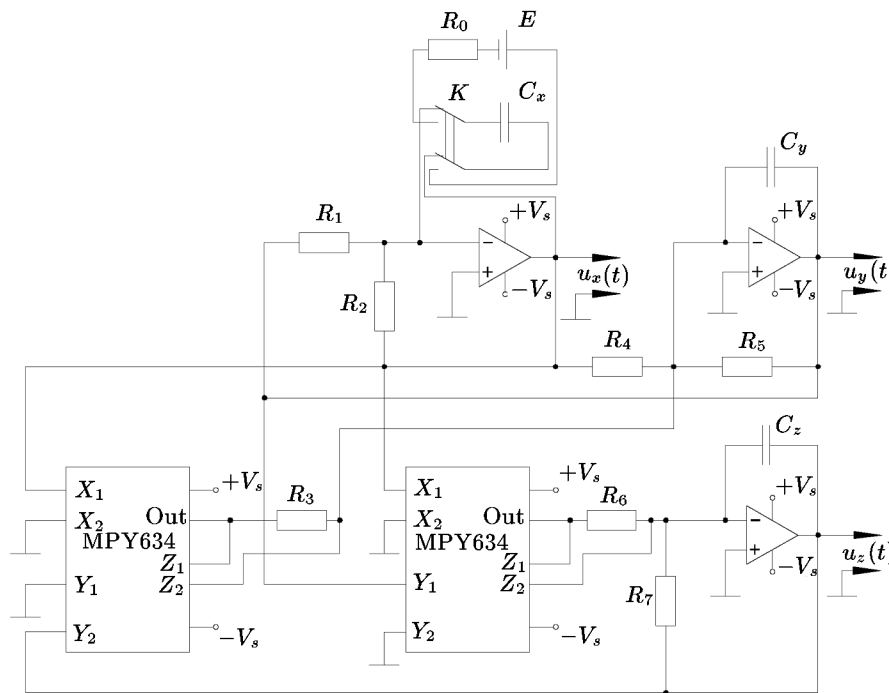
Рассмотрим электрическую схему генератора колебаний, представленную на рис. 1. Поскольку система Лоренца имеет третий порядок, то для создания динамики изменения напряжений в цепи необходимы три интегратора на базе операционных усилителей, поскольку с дифференциаторами связаны проблемы шума. При этом для построения схемы и записи интегральных уравнений использовалась базовая схема включения современного аналогового умножителя МРУ634, приведенная на рис. 3 в официальной документации [13, с. 6] производителя этой микросхемы. Имеем

$$u_x(t) = u_x(0) - \frac{1}{C_x} \int_0^t \left( \frac{u_y(\tau)}{R_1} + \frac{u_x(\tau)}{R_2} \right) d\tau,$$

$$u_y(t) = u_y(0) - \frac{1}{C_y} \int_0^t \left( \frac{u_x(\tau)}{R_4} + \frac{(u_x(\tau) - 0)(0 - u_z(\tau))}{SF} \frac{1}{R_3} + \frac{u_y(\tau)}{R_5} \right) d\tau,$$

$$u_z(t) = u_z(0) - \frac{1}{C_z} \int_0^t \left( \frac{(u_x(\tau) - 0)(u_y(\tau) - 0)}{SF} \frac{1}{R_6} + \frac{u_z(\tau)}{R_7} \right) d\tau,$$

где  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$  и  $u_z(t)$  — мгновенные значения напряжений, соответствующие функциям  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  (пара из этих напряжений может быть подана на пластины осциллографа, полученная сложная фигура является проекцией траектории системы Лоренца на соответствующую плоскость),  $u_x(0) = E$ ,  $u_y(0) = 0$  и  $u_z(0) = 0$  — начальные напряжения на конденсаторах  $C_x$ ,  $C_y$  и  $C_z$  соответственно,  $SF=10$  В — масштабный коэффициент умножителя.



**Рис. 1.** Схема генератора колебаний, описывающих динамику системы Лоренца

Первоначально производится зарядка конденсатора  $C_x$  от источника питания  $E$  путем кратковременного переключения ключа  $K$ . Остальные конденсаторы имеют нулевой начальный заряд. По сути мы задаем начальные условия для системы (1). Схему начальной зарядки можно изменить (например, заряжать два конденсатора), за исключением ситуации, когда  $u_x(0) = 0$  и  $u_y(0) = 0$ . Это обосновывается тем, что  $x(t) \equiv 0$ ,  $y(t) \equiv 0$  и  $z(t) = z_0 \exp(-bt)$  — частное решение системы (1), где  $z_0$  — произвольная постоянная. Понятно, что в этом случае никаких колебаний не будет.

Сделаем замену  $u_y(t) = -\tilde{u}_y(t)$  и продифференцируем по времени обе части каждого интегрального уравнения. Получим

$$\dot{u}_x = \frac{\tilde{u}_y}{R_1 C_x} - \frac{u_x}{R_2 C_x}, \quad \dot{\tilde{u}}_y = \frac{u_x}{R_4 C_y} - \frac{\tilde{u}_y}{R_5 C_y} - \frac{u_x u_z}{10 R_3 C_y}, \quad \dot{u}_z = \frac{u_x \tilde{u}_y}{10 R_6 C_z} - \frac{u_z}{R_7 C_z}. \quad (2)$$

Будем моделировать динамику при классических значениях параметров системы (1). Положим величины емкостей и сопротивлений равными

$$C_x = C_y = C_z = 1 \text{ мкФ}, \quad R_1 = R_2 = 100 \text{ кОм}, \quad R_3 = R_6 = 10 \text{ кОм}, \\ R_4 = 35.7 \text{ кОм}, \quad R_5 = 1 \text{ МОм}, \quad R_7 = 375 \text{ кОм}.$$

Тогда система (2) примет вид:

$$\dot{u}_x = 10(\tilde{u}_y - u_x), \quad \dot{\tilde{u}}_y = 28.01 u_x - \tilde{u}_y - 10 u_x u_z, \quad \dot{u}_z = 10 u_x \tilde{u}_y - \frac{8}{3} u_z. \quad (3)$$

Делая в (3) замену  $u_x(t) = x(t)/10$ ,  $\tilde{u}_y(t) = y(t)/10$  и  $u_z(t) = z(t)/10$ , получим систему Лоренца. Поскольку  $|x(t)| \leq R_L$ ,  $|y(t)| \leq R_L$  и  $|z(t)| \leq R_L$ , где  $R_L = z_S + R_S \approx 74.4$ , то из введенной замены следует, что абсолютная величина напряжения не превысит величины 7.44 В, это предусматривается документацией [13]. Значение  $E$  можно выбрать равным 1.5 В.

Точность представленной модели зависит от отклонений действительных значений сопротивлений и емкостей от расчетных, а также характеристик интеграторов и умножителей.

### 3. Описание численного метода

Для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений иногда используют метод степенных рядов (или метод рядов Тейлора). Здесь можно влиять на ошибку интегрирования получаемого решения за счет варьирования точности оценки общего члена ряда. На сегодняшний день этот метод почти не применяется (а если используется, то для линейных систем второго порядка [14, с. 438–464]) из-за громоздкости вычислений в нелинейном случае [15, с. 365, 366].

Система Лоренца имеет полиномиальную правую часть. Это позволяет получить прямые формулы вычисления коэффициентов степенных рядов и оценить их радиус сходимости.

Пусть

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i, \quad y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i, \quad z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i, \quad (4)$$

где  $x(0) = \alpha_0$ ,  $y(0) = \beta_0$  и  $z(0) = \gamma_0$  — начальные условия для системы (1). Продифференцируем (4):

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \alpha_{i+1} t^i, \quad \dot{y} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \beta_{i+1} t^i, \quad \dot{z} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \gamma_{i+1} t^i.$$

Далее найдем произведения степенных рядов в форме Коши [16, с. 320–322]:

$$xz = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j} t^i, \quad xy = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} t^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, из системы (1) получаем рекуррентные соотношения для расчета коэффициентов степенных рядов (4):

$$\alpha_{i+1} = \frac{\sigma(\beta_i - \alpha_i)}{i+1}, \quad \beta_{i+1} = \frac{r\alpha_i - \beta_i - \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j}}{i+1}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{\sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} - b\gamma_i}{i+1}. \quad (5)$$

Несмотря на то, что все траектории системы (1) ограничены сферой  $S$  и ее правая часть всюду аналитична, первоначальный численный эксперимент показал, что радиус сходимости рядов (4) ограничен и зависит от выбора начальных условий. Поэтому описанным способом мы можем получить только часть траектории. Процедура построения дуги траектории на любом отрезке времени заключается в сшивке частей траектории, составляющих искомое решение, на которых сходятся ряды (4). Ошибкой интегрирования, накапливаемой при переходе от дуги к дуге траектории из-за погрешности нахождения текущего приближенного решения, можно управлять за счет варьирования точности разложения в степенной ряд. Использование при этом высокоточных вычислений позволяет продолжить решения на очень большие промежутки времени, поскольку точность разложения в ряд невозможно сделать сколь угодно малой из-за ограничения на машинный эпсилон.

#### 4. Оценка радиуса сходимости степенных рядов

Важное значение при построении приближенных решений системы (1) описанным выше способом имеет оценка радиуса сходимости рядов (4). Получим ее. Для этого введем обозначения:

$$h_1 = \max\{2\sigma, r + 2h_2 + 1, b + 2h_2 + 1\}, \quad h_2 = \max\{|\alpha_0|, |\beta_0|, |\gamma_0|\}.$$

Если  $h_2 \geq 1$ , то  $h_3 = h_1 h_2$ , иначе  $h_3 = \max\{2\sigma, r + 2, b + 1\}$ .

Докажем, что ряды (4) сходятся для  $t \in [0; \Delta t)$ , где  $\Delta t = 1/h_3$ . Для этого нужно подобрать число  $h_3$  так, причем  $h_3 t < 1$ , чтобы

$$|\alpha_i t^i| \leq (h_3 t)^i, \quad |\beta_i t^i| \leq (h_3 t)^i, \quad |\gamma_i t^i| \leq (h_3 t)^i.$$

Тогда ряды (4) будут сходиться по признаку сравнения.

Рассмотрим первый случай, когда  $h_2 \geq 1$ . Таким образом, нужно доказать справедливость следующего утверждения:

$$|\alpha_i| \leq h_3^i, \quad |\beta_i| \leq h_3^i, \quad |\gamma_i| \leq h_3^i, \quad (6)$$

где  $h_3 = h_1 h_2$ , для любого натурального  $i$ . Доказательство будем вести по методу математической индукции.

Покажем, что утверждение (6) верно при  $i = 1$ . По формулам (5):

$$\alpha_1 = \sigma(\beta_0 - \alpha_0), \quad \beta_1 = r\alpha_0 - \beta_0 - \alpha_0\gamma_0, \quad \gamma_1 = \alpha_0\beta_0 - b\gamma_0.$$

Тогда

$$|\alpha_1| \leq 2\sigma h_2 \leq h_1 h_2 = h_3^1, \quad |\beta_1| \leq r h_2 + h_2 + h_2^2 \leq h_3^1, \quad |\gamma_1| \leq (b + h_2) h_2 \leq h_3^1,$$

что и доказывает справедливость утверждения (6) при  $i = 1$ .

Предположим, что утверждение (6) верно при  $i = k$ . Тогда оно верно для любого  $j = \overline{1, k}$ , т. е.

$$|\alpha_j| \leq h_3^j, \quad |\beta_j| \leq h_3^j, \quad |\gamma_j| \leq h_3^j. \quad (7)$$

Докажем справедливость (6) для  $i = k + 1$ . Из формул (5) получаем оценку

$$|\alpha_{k+1}| \leq \frac{\sigma}{k+1} (|\beta_k| + |\alpha_k|).$$

Так как  $k \geq 1$ , в силу (7) получим

$$|\alpha_{k+1}| \leq 2\sigma h_3^k \leq h_1 h_3^k \leq h_3^{k+1},$$

поскольку  $h_2 \geq 1$ . Опять же из (7) вытекает

$$\left| \sum_{j=0}^k \alpha_j \gamma_{k-j} \right| \leq |\alpha_0| h_3^k + h_3^k |\gamma_0| + \sum_{j=1}^{k-1} h_3^j h_3^{k-j} \leq 2h_2 h_3^k + (k-1)h_3^k.$$

Аналогично

$$\left| \sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j} \right| \leq 2h_2 h_3^k + (k-1)h_3^k.$$

Тогда, используя последние неравенства, а также (5) и (7), имеем

$$|\beta_{k+1}| \leq \frac{r h_3^k + h_3^k + 2h_2 h_3^k + (k-1)h_3^k}{k+1}$$

или

$$|\beta_{k+1}| \leq \left( \frac{r+2h_2}{k+1} + \frac{k}{k+1} \right) h_3^k \leq (r+2h_2+1)h_3^k \leq h_3^{k+1}$$

и

$$|\gamma_{k+1}| \leq (b+2h_2+1)h_3^k \leq h_3^{k+1},$$

что и доказывает справедливость утверждения (6) для любого натурального  $i$  при  $h_2 \geq 1$ .

Рассмотрим теперь второй случай, когда  $h_2 < 1$ .

Докажем по индукции справедливость (6) для этого случая. При  $i = 1$  имеем

$$|\alpha_1| \leq 2\sigma \leq h_3^1, \quad |\beta_1| \leq r+1+1 \cdot 1 \leq h_3^1, \quad |\gamma_1| \leq 1 \cdot 1 + b \leq h_3^1.$$

Следовательно, при  $i = 1$  утверждение (6) верно.

Предположим, что (6) верно при  $i = k$ . Докажем справедливость (6) для  $i = k + 1$ . Из формул (5) и предположения справедливости следует, что

$$|\alpha_{k+1}| \leq 2\sigma h_3^k \leq h_3^{k+1}$$

и

$$\left| \sum_{j=0}^k \alpha_j \gamma_{k-j} \right| \leq 1 \cdot h_3^k + h_3^k \cdot 1 + (k-1)h_3^k \leq (k+1)h_3^k.$$

Аналогично

$$\left| \sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j} \right| \leq (k+1)h_3^k.$$

Тогда

$$|\beta_{k+1}| \leq \frac{rh_3^k + h_3^k + (k+1)h_3^k}{k+1} \leq (r+2)h_3^k \leq h_3^{k+1}$$

и

$$|\gamma_{k+1}| \leq (1+b)h_3^k \leq h_3^{k+1},$$

что и доказывает справедливость утверждения (6) для любого натурального  $i$  при  $h_2 < 1$ .

Заметим, что описанная схема получения области сходимости степенных рядов может быть по аналогии перенесена на другие динамические системы третьего порядка с нелинейностями вида (1) (например система, описывающая поведение саморазвивающейся рыночной экономики [9, с. 261]).

## 5. Вычислительный эксперимент

В литературе, посвященной численному исследованию системы Лоренца при классических значениях ее параметров, очень часто делаются заключения о структуре аттрактора на основе данных, полученных из вычислительного эксперимента. При этом нет достаточных обоснований о выборе шага, с какими типами вещественных чисел приходилось работать и на каком отрезке времени производились расчеты.

Приведем результаты вычислительного эксперимента по схеме, описанной выше. В качестве начальных условий были взяты следующие значения:

$$x(0) = 13.41265629, \quad y(0) = 13.46430003, \quad z(0) = 33.46156416,$$

близкие к аттрактору. Отрезок времени, на котором производилось построение дуги траектории, —  $[0, 6.827]$ . Все вычисления производились с использованием библиотеки [11]. Было принято, что количество бит под мантиссу вещественного числа равно 180. Диапазон изменения экспоненты от  $-1024$  до  $1024$  (как для типа `double` в языке C). Машинный эпсилон при этом равен  $6.5253 \cdot 10^{-55}$ . Первоначально точность оценки общего члена ряда

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2} \Delta t^i < \varepsilon_p$$

была взята равной  $\varepsilon_p = 10^{-9}$ . Этого вполне достаточно, чтобы получить результат

$$x(6.827) = 13.3595, \quad y(6.827) = 13.3533, \quad z(6.827) = 33.4561,$$

значения производных:

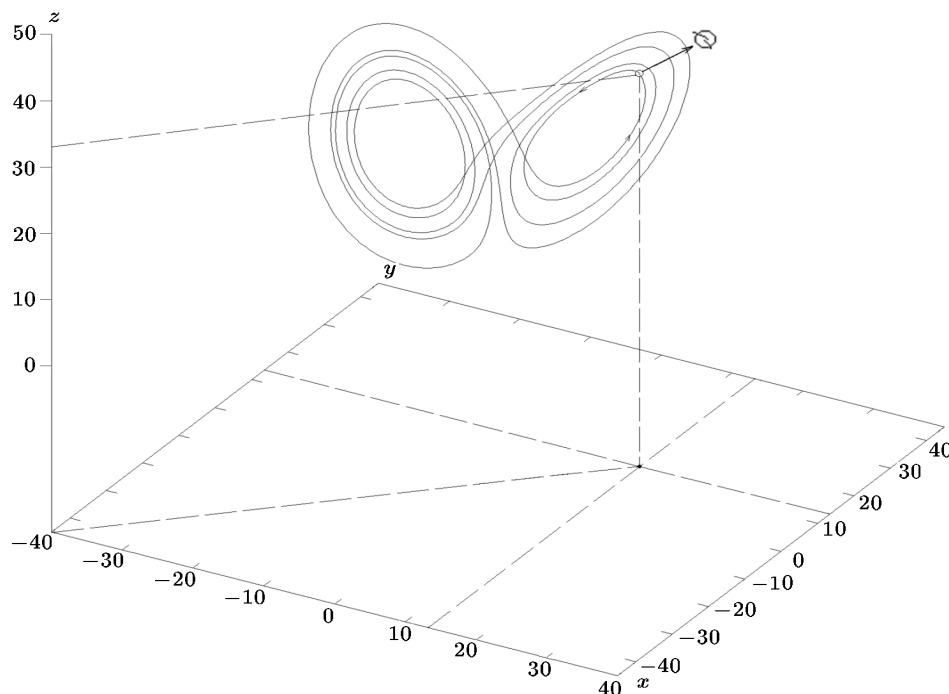
$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= 0.5164, & \dot{y}(0) &= -86.7184, & \dot{z}(0) &= 91.3612, \\ \dot{x}(6.827) &= -0.0628, & \dot{y}(6.827) &= -86.2444, & \dot{z}(6.827) &= 89.177 \end{aligned}$$

(уменьшая  $\varepsilon_p$ , результат не изменяется). При этом можно брать вещественные числа с меньшим объемом памяти.

Дуга траектории, построенная на заданном отрезке времени, представлена на рис. 2. Стрелочкой отмечено возвращение в  $\varepsilon$ -окрестность начальных условий ( $\varepsilon = 0.13$ ). По теореме Биркгофа [5, с. 402] аттрактор Лоренца содержит рекуррентные траектории, а каждая такая траектория устойчива по Пуассону [5, с. 363–372]. Это означает, что найдутся сколь угодно большие значения  $t$  такие, что точка на траектории оказывается в любой  $\varepsilon$ -окрестности своего начального положения. Рекуррентной траекторией может быть и цикл, но делать вывод об этом, исходя из найденного возврата траектории в

некоторую окрестность начальных условий, нельзя. Как показали расчеты, в системе Лоренца динамика поведения решений на аттракторе достаточно сложна, и рекуррентные траектории, содержащиеся в нем, могут, например, описываться почти периодическими решениями или иметь более сложную структуру [17].

Указанная точность представления вещественного числа была выбрана с целью отследить не только возврат траектории, но и для прохода назад по времени от конечной точки к начальной на дуге траектории. Тогда в расчетах нужно брать  $\varepsilon_p = 10^{-50}$ . В результате получаются значения, совпадающие с начальными до четвертого знака после запятой. Такое малое значение  $\varepsilon_p$  выбрано потому, что при движении по траектории в отрицательные значения времени наблюдается сильная неустойчивость решений — они сразу уходят в бесконечность от аттрактора, поскольку мы при расчетах находимся вблизи от него, а не непосредственно на нем.



**Рис. 2.** Дуга траектории, построенная на отрезке времени  $[0, 6.827]$  для  $x(0) = 13.41265629$ ,  $y(0) = 13.46430003$ ,  $z(0) = 33.46156416$

В работе [18, с. 90, 91] для исследования поведения траекторий на аттракторе применяется метод Эйлера с переменным шагом  $\Delta t$  интегрирования. Величина  $\Delta t$  выбирается с отслеживанием ошибки на текущем шаге (т. е. локальный контроль), используя интервальную арифметику. Однако нет проверки общей ошибки интегрирования. Проход назад по времени, описанный выше, нам гарантирует правильность построения приближенного решения. Варьируя точностью оценки общего члена ряда, можно уменьшить ошибку на шаге, что не позволяет метод Эйлера. Также в рассмотренной модификации метода степенных рядов преимуществом перед общей схемой метода рядов Тейлора является быстрый расчет по формулам (5) коэффициентов разложения по сравнению с процедурой символьного дифференцирования правых частей уравнений системы (кроме того, в нелинейном случае под символьные выражения требуется много памяти для их хранения при вычислении производных высших порядков).



## 6. Случай $b = 2\sigma$

Докажем, что если  $b = 2\sigma$ , то в системе (1) нет периодических решений (исключая, конечно, положения равновесия).

Сделаем замену

$$z = u + \frac{x^2}{b}, \quad (8)$$

где  $u$  — некоторая функция от  $t$ . Продифференцируем (8), получим

$$\dot{z} = \dot{u} + \frac{2x}{b} \dot{x}. \quad (9)$$

В левую часть выражения (9) подставим правую часть третьего уравнения системы (1), а в правую часть (9) — правую часть первого уравнения системы (1), учитывая, что  $b = 2\sigma$ . Получим

$$-bz = \dot{u} - x^2. \quad (10)$$

Вместо  $z$  в (10) подставим выражение (8), откуда имеем уравнение

$$\dot{u} = -bu,$$

решением которого является функция

$$u(t) = u_0 e^{-bt}, \quad (11)$$

где  $u_0$  — произвольная постоянная.

Теперь во второе уравнение системы (1) подставим вместо  $z$  выражение (8). При этом выразим  $y$  из первого уравнения системы (1). Получим

$$y = x + \frac{\dot{x}}{\sigma} \quad (12)$$

и

$$\dot{y} = rx - y - x \left( u + \frac{x^2}{2\sigma} \right). \quad (13)$$

Подставив (11) и (12) в (13), имеем

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} = -\sigma u_0 e^{-bt} x. \quad (14)$$

Рассмотрим неавтономный случай, когда  $u_0 \neq 0$  в уравнении (14). Предположим, что в этом случае уравнение (14) имеет периодическое решение с периодом  $T$ . Так как производная периодической функции с периодом  $T$  есть периодическая функция с периодом  $T$ , то левая часть уравнения (14) является периодической функцией с периодом  $T$ . Однако правая часть уравнения (14) непериодична, так как  $e^{-bt}$  не является периодической функцией. Получили противоречие.

Таким образом, при  $u_0 \neq 0$  уравнение (14) не имеет периодических решений.

Рассмотрим теперь случай, когда  $u_0 = 0$ . Имеем автономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} - \sigma(r - 1)x + \frac{x^3}{2} = 0,$$

у которого по критерию Бендиксона [5, с. 142, 143] нет периодических решений, что и доказывает их отсутствие в системе Лоренца при  $b = 2\sigma$ .

Заметим, что в этом случае параметр  $r$  может принимать любые значения. Тогда при достаточно больших его значениях в системе Лоренца также будут отсутствовать периодические решения, что кажется весьма неочевидным, поскольку параметр  $r$  пропорционален разности температур между нижним и верхним слоем жидкости при свободной конвекции. При увеличении градиента температуры в слое должны возникнуть конвективные валы, а здесь жидкость со временем приходит в стационарное состояние (ламинарный режим). Это подтверждается и в численном эксперименте (наблюдались устойчивые фокусы при разных значениях  $r$ ). Скорее всего, объясняется тем, что система Лоренца достаточно грубо описывает конвективный теплообмен, хотя при других соотношениях между  $\sigma$  и  $b$  ( $r$  принимает достаточно большое значение) в системе (1) наблюдается устойчивый предельный цикл [4, с. 291–294].

## Литература

1. **Lorenz E.** Deterministic nonperiodic flow // J. of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Vol. 20, № 2. — P. 130–141.
2. **Ланда П.С.** Нелинейные колебания и волны. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
3. **Покровский Л.А.** Решение системы уравнений Лоренца в асимптотическом пределе большого числа Релея. I. Система Лоренца в простейшей квантовой модели лазера и приложение к ней метода усреднения // Теоретическая и математическая физика. — 1985. — Т. 62, № 2. — С. 272–290.
4. **Неймарк Ю.И., Ланда П.С.** Стохастические и хаотические колебания. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
5. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. **Yorke J., Yorke E.** Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model // J. of Statistical Physics. — 1979. — Vol. 21, № 3. — P. 263–278.
7. **Sparrow C.** The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos, and Strange Attractors. — New York: Springer-Verlag, 1982.
8. **Kaloshin D.A.** Search for and stabilization of unstable saddle cycles in the Lorenz system // Diff. Equations. — 2001. — Vol. 37, № 11. — P. 1636–1639.
9. **Магницкий Н.А., Сидоров С.В.** Новые методы хаотической динамики. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
10. **Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.** Численные процессы решения дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1969.
11. The MPFR library for multiple-precision floating-point computations with correct rounding. — <http://www.mpfr.org/>.
12. **Дмитриев А.С., Панас А.И.** Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. — М.: Физматлит, 2002.
13. Texas Instruments Incorporated [SBFS017A]. MPY634: Wide Bandwidth Precision Analog Multiplier (Data Sheet). — <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/mpy634.pdf>, 2011.
14. **Матвеев Н.М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1967.
15. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

16. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. — М.: Наука, 1966.
17. **Пчелинцев А.Н.** О построении обобщенно-периодических решений сложной структуры неавтономной системы дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 1. — С. 63–71.
18. **Tucker W.** A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem // Foundations of Computational Mathematics. — 2002. — Vol. 2, № 1. — P. 53–117.

*Поступила в редакцию 31 января 2013 г.,  
в окончательном варианте 7 июня 2013 г.*

