

УДК 532.54

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В НАНОЖИДКОСТИ В ТОЧКЕ ОСТАНОВКИ ПОТОКА С УЧЕТОМ ТЕРМОФОРЕЗА И БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

С. Динарванд, Р. Хосейни\*, Х. Тамим\*, И. Дамангир\*, И. Поп\*\*

Исламский университет Азад, Тегеран, Иран

\* Технологический университет Амиркабир, 15875-4413 Тегеран, Иран

\*\* Университет Клужа, R-3400 Клуж, Румыния

E-mails: saeed\_dinarvand@yahoo.com, hoseinir@aut.ac.ir,

tamimhossein@gmail.com, damangir@aut.ac.ir, popm.ioan@yahoo.co.uk

Численно исследовано нестационарное трехмерное течение наножидкости в точке остановки потока на круглом цилиндре при синусоидальном изменении его радиуса. Путем введения новых преобразований подобия для скорости, температуры и объемной доли наночастиц основные уравнения течения, тепло- и массообмена приведены к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Полученная нелинейная система решена численно с использованием метода стрельбы и метода Рунге — Кутты четвертого порядка. Влияние термофореза и броуновского движения учитывается в уравнениях переноса. Получены зависимости скорости, температуры и концентрации наночастиц от параметра нестационарности, параметра броуновского движения, параметра термофореза, чисел Прандтля и Льюиса. Вычислены значения коэффициента трения, диффузионного потока массы и теплового потока. Установлено, что коэффициент трения и скорость теплообмена возрастают с увеличением нестационарности (наибольшая скорость теплообмена наблюдается на поверхности, когда термофорез и броуновское движение отсутствуют) и уменьшаются с увеличением как параметра броуновского движения, так и параметра термофореза. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с известными данными.

**Ключевые слова:** наножидкость, трехмерное течение в точке остановки потока, нестационарность, броуновское движение, термофорез, численное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20150407

**Введение.** Изучение течения вблизи точки остановки потока вызывает интерес исследователей вследствие его широкого применения, например для охлаждения электронных устройств вентиляторами, охлаждения ядерных реакторов при аварийной остановке, проектирования солнечных батарей, обтекаемых потоками ветра, и др. Исследование точки остановки потока на твердой поверхности в движущейся жидкости начато в работе [1], в которой с использованием преобразования подобия для приведения уравнений Навье — Стокса к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям проанализировано двумерное течение в лобовой точке на покоящейся пластине. Впоследствии эта идея применялась для решения других задач о течении вблизи точки остановки потока.

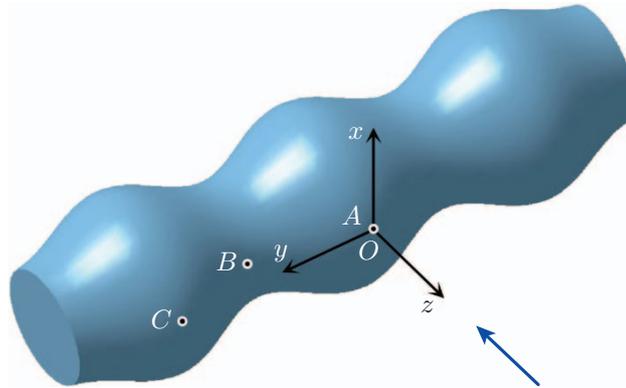


Рис. 1. Модель торможения потока жидкости, обтекающей круглый цилиндр с синусоидальным изменением радиуса (стрелка — направление течения)

Исследованию течения, теплообмена и характеристик массообмена в ламинарном пограничном слое в окрестности двумерной или осесимметричной точки остановки потока посвящено большое количество работ (см., например, [1–5]), что обусловлено фундаментальным характером проблемы.

Двумерные и осесимметричные течения можно рассматривать как частные случаи общего трехмерного течения вблизи точки остановки потока. Такое течение наблюдается, например, при натекании жидкости на тело конечных размеров, имеющее форму “волнистого” цилиндра (рис. 1). В точках  $A$ ,  $C$ , соответствующих максимальному радиусу цилиндра, безвихревое течение вблизи поверхности тела распространяется от точек остановки во всех направлениях. В точке  $B$ , соответствующей минимальному радиусу цилиндра, течение по поверхности приближается к точке остановки в одном направлении, а уходит в поперечном направлении. Точки  $A$ ,  $C$  называются узловыми точками, точка  $B$  — седловой точкой. И двумерные, и осесимметричные течения были распространены на трехмерные течения для несжимаемого ламинарного течения в пограничном слое в окрестности узловой точки остановки [6] и на течения в окрестности седловой точки [7]. В работе [8] изучались течение и теплообмен в несжимаемой вязкой электрически проводящей жидкости вблизи трехмерной точки остановки потока на теле, находящемся в равномерном магнитном поле. Анализ таких течений имеет большое значение, так как они являются основными в гидроаэромеханике и при теплопереносе при вынужденной тепловой конвекции.

В указанных выше работах рассматривалась ньютоновская жидкость, течения наножидкостей вблизи трехмерных точек остановки исследованы недостаточно.

Следует отметить, что модель наножидкости, предложенная в [9], использовалась в работах [10–12]. Также часто применяется модель наножидкости, предложенная в [13]. В частности, с использованием данной модели авторами [14, 15] изучена задача о точке остановки стационарного трехмерного течения наножидкости на круглом цилиндре с синусоидальным изменением радиуса. Цель настоящего исследования, являющегося продолжением работы [15], состоит в изучении нестационарного течения, тепло- и массообмена в наножидкости на таком же цилиндре с учетом термофореза и броуновского движения. В работе с помощью преобразования подобия уравнения пограничного слоя в частных производных приводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые решаются численно с использованием схемы Рунге — Кутты и метода стрельбы. Полученные численные результаты сравниваются с имеющимися данными для некоторых частных случаев рассматриваемой задачи. Обсуждается влияние нестационарности, броу-

уновского движения, термофореза, а также чисел Прандтля и Льюиса на течение жидкости и характеристики тепло- и массообмена.

**1. Математическое описание.** Рассмотрим нестационарное трехмерное течение, тепло- и массообмен в несжимаемой вязкой наножидкости в точке остановки на круглом цилиндре, радиус которого изменяется синусоидально (см. рис. 1). Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  наножидкость находится в состоянии покоя при постоянных значениях температуры окружающей среды  $T_\infty$  и объемной доли наночастиц  $C_\infty$ . В момент времени  $t = 0$  возникает течение по нормали к продольному направлению цилиндра, температура и объемная доля наночастиц на поверхности увеличиваются со значений  $T_\infty$ ,  $C_\infty$  до значений  $T_w$ ,  $C_w$  соответственно, зависящих от времени. Точка остановки потока расположена в центре декартовой системы координат  $Oxyz$ , ось  $x$  которой направлена вверх по потоку, ось  $y$  — вдоль,  $z$  — по нормали к поверхности. Используем компоненты скорости для невязкого безвихревого течения, введенные в [6] вблизи точки  $O$ , в виде

$$u_e = \frac{ax}{1 - \gamma t}, \quad v_e = \frac{by}{1 - \gamma t}, \quad w_e = -\frac{(a + b)z}{1 - \gamma t}, \quad (1)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  — константы, зависящие от скорости свободного потока, размера и формы тела. Заметим, что величины  $u_e$ ,  $v_e$  не удовлетворяют уравнению неразрывности, однако с учетом оттока из пограничного слоя уравнение удовлетворяется.

Без потери общности будем полагать, что при  $a > 0$   $|a| \geq |b|$ . Очевидно, что равенство  $b = 0$  соответствует случаю остановки течения на плоскости,  $b = a$  — осесимметричный случай. Линии тока во внешнем течении определяются уравнениями

$$y_e = c_1 x_e^c, \quad z_e x_e^{1+c} = c_2, \quad (2)$$

где

$$c = b/a, \quad (3)$$

$c_1$ ,  $c_2$  — константы, определяющие линию тока. Случаи  $0 < c \leq 1$  описывают узловые точки остановки, случай  $c = 0$  — плоское течение, а случаи  $-1 < c \leq 0$  описывают седловые точки остановки трехмерного течения. В сделанных предположениях управляющие уравнения для нестационарного течения в пограничном слое, тепло- и массообмена имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \tau \left[ D_b \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{D_t}{T_\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]; \quad (7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D_b \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{D_t}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Начальные и граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} t < 0: \quad & u = v = w = 0, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \quad \forall x, y, z, \\ t \geq 0: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T = T_w(t), \quad C = C_w(t) \quad \text{при } z = 0, \\ & u \rightarrow u_e, \quad v \rightarrow v_e, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad C \rightarrow C_\infty \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты скорости вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  $\rho$  — плотность основной жидкости;  $T$  — температура;  $C$  — объемная доля наночастиц;  $\nu$  — кинематическая вязкость основной жидкости;  $\alpha$  — температуропроводность основной жидкости;  $\tau = (\rho c)_p / (\rho c)_f$  — отношение теплоемкости наночастиц и теплоемкости основной жидкости;  $D_b$  — коэффициент броуновской диффузии;  $D_t$  — коэффициент термофоретической диффузии.

Из уравнения (7) следует, что в наножидкости тепло может переноситься посредством конвекции (левая часть), проводимости (первый член правой части), а также диффузии наночастиц (второй и третий члены правой части). Следует отметить, что последние два члена правой части вносят дополнительный вклад, обусловленный скольжением наночастиц относительно жидкости вследствие броуновского движения и термофореза.

Будем полагать, что в рассматриваемой задаче изменение температуры и концентрации наножидкости на стенке описывается следующими формулами:

$$T_w(t) = T_\infty + \frac{\Delta T}{(1 - \gamma t)^2}, \quad C_w(t) = C_\infty + \frac{\Delta C}{(1 - \gamma t)^2}. \quad (10)$$

Используя уравнение Бернулли для свободного потока, уравнения (5), (6) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (12)$$

При подстановке (1) уравнения (11), (12) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\gamma a x}{(1 - \gamma t)^2} + \frac{a^2 x}{(1 - \gamma t)^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\gamma b y}{(1 - \gamma t)^2} + \frac{b^2 y}{(1 - \gamma t)^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

При выполнении условия прилипания (9) на поверхности образуется вихревой слой, который диффундирует в наножидкость, затем с помощью конвекции переносится назад к стенке натекающим потоком в застойной зоне. С течением времени создается новая завихренность, что обеспечивает выполнение условия прилипания на поверхности. Поскольку скорость диффузии на расстоянии от поверхности и конвекция в направлении к стенке не зависят от координат  $x, y$ , целесообразно искать решение уравнений пограничного слоя, в которых завихренность ограничена слоем однородной толщины. Выражение для толщины  $(\nu(1 - \gamma t)/a)^{1/2}$  является единственным выражением, имеющим размерность длины. Таким образом, можно ввести безразмерное расстояние  $\eta$  в направлении нормали:

$$\eta = \left( \frac{a}{\nu(1 - \gamma t)} \right)^{1/2} z. \quad (14)$$

Уравнения (2)–(8) допускают автомодельное решение:

$$\begin{aligned} u &= \frac{ax}{1 - \gamma t} f'(\eta), & v &= \frac{by}{1 - \gamma t} g'(\eta), & w &= -\left( \frac{a\nu}{1 - \gamma t} \right)^{1/2} (f + cg), \\ T &= T_\infty + \frac{\Delta T \theta(\eta)}{(1 - \gamma t)^2}, & C &= C_\infty + \frac{\Delta C \varphi(\eta)}{(1 - \gamma t)^2}, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по  $\eta$ . Используя преобразования подобия (13), (14), уравнения (4)–(8) приводим к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$f''' + (f + cg)f'' - f'^2 + 1 + A(1 - f' - \eta f''/2) = 0; \quad (15)$$

$$g''' + (f + cg)g'' + c(1 - g'^2) + A(1 - g' - \eta g''/2) = 0; \quad (16)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \theta'' + (f + cg)\theta' - A\left(2\theta + \frac{\eta}{2}\theta'\right) + N_b\theta'\varphi' + N_t\theta'^2 = 0; \quad (17)$$

$$\frac{1}{\text{Le}} \varphi'' + (f + cg)\varphi' - A\left(2\varphi + \frac{\eta}{2}\varphi'\right) + \frac{1}{\text{Le}} \frac{N_t}{N_b} \theta'' = 0 \quad (18)$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1; \quad (19)$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g'(\infty) = 1; \quad (20)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0; \quad (21)$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\infty) = 0. \quad (22)$$

Здесь  $f, g$  — функции, связанные с полем скорости;  $\theta$  — безразмерная температура;  $\varphi$  — безразмерная концентрация наножидкости;  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  — число Прандтля;  $\text{Le} = \nu/D_b$  — число Льюиса;  $N_b$  — параметр броуновского движения;  $N_t$  — параметр термофореза;  $A = \gamma/a$  — параметр нестационарности ( $A > 0$  соответствует ускорению свободного потока,  $A < 0$  — его замедлению).

Представим коэффициенты трения  $C_{fx}, C_{fy}$  вдоль осей  $x$  и  $y$ , локальное число Нуссельта и локальное число Шервуда в виде

$$C_{fx} = \frac{\tau_{wx}}{\rho u_e^2}, \quad C_{fy} = \frac{\tau_{wy}}{\rho u_e^2}, \quad \text{Nu}_x = \frac{xq_w}{k(T_w - T_\infty)}, \quad \text{Sh}_x = \frac{x s_w}{D_b(C_w - C_\infty)},$$

где  $\tau_{wx} = \mu(\partial u/\partial z)|_{z=0}$ ,  $\tau_{wy} = \mu(\partial v/\partial z)|_{z=0}$  — поверхностные напряжения сдвига вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $q_w = -k(\partial T/\partial z)|_{z=0}$  — поток тепла на поверхности;  $s_w = -D_b(\partial C/\partial z)|_{z=0}$  — поток массы на поверхности.

Используя уравнения (13), (14), получаем

$$C_{fx}[\text{Re}_x]^{1/2} = f''(0), \quad C_{fy}[\text{Re}_x]^{1/2} = c(y/x)g''(0), \\ [\text{Re}_x]^{-1/2} \text{Nu}_x = -\theta'(0), \quad [\text{Re}_x]^{-1/2} \text{Sh}_x = -\varphi'(0), \quad \text{Re}_x = \frac{u_e x}{\nu}.$$

В работе [11] введены числа  $(\text{Re}_x^{-1/2}) \text{Nu}_x$  и  $(\text{Re}_x^{-1/2}) \text{Sh}_x$  как приведенное число Нуссельта  $\text{Nu} r = -\theta'(0)$  и приведенное число Шервуда  $\text{Sh} r = -\varphi'(0)$  соответственно.

**2. Метод решения.** Нелинейные автомодельные уравнения (15)–(18) с граничными условиями (19)–(22) преобразовывались в задачу

$$f' = p, \quad p' = q, \quad q' = -(f + cg)q + p^2 - 1 - A(1 - p - \eta q/2); \quad (23)$$

$$g' = o, \quad o' = r, \quad r' = -(f + cg)r - c(1 - o^2) - A(1 - o - \eta r/2); \quad (24)$$

$$\theta' = d, \quad d' = -\text{Pr}[(f + cg)d - A(2\theta + \eta d/2) + N_b d e + N_t d^2]; \quad (25)$$

$$\varphi' = e, \quad (26)$$

$$e' = -\text{Le} \left\{ (f + cg)e - A\left(2\varphi + \frac{\eta}{2}e\right) - \frac{\text{Pr}}{\text{Le}} \frac{N_t}{N_b} \left[ (f + cg)d - A\left(2\theta + \frac{\eta}{2}d\right) + N_b d e + N_t d^2 \right] \right\}$$

с начальными условиями

$$f(0) = 0, \quad p(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad o(0) = 0, \quad \theta(0) = 1, \quad \varphi(0) = 1, \quad (27)$$

которая решалась с использованием метода стрельбы.

Для того чтобы решить систему уравнений (23)–(27) как задачу с начальными условиями, необходимо задать значения для  $q(0)$ ,  $r(0)$ ,  $u(0)$ ,  $s(0)$ , т. е. для  $f''(0)$ ,  $g''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$ . Задавались некоторые начальные значения  $f''(0)$ ,  $g''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$  и применялся метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Вычисленные значения  $f'(\eta)$ ,  $g'(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ ,  $\varphi(\eta)$  при соответствующем выбранном конечном большом значении  $\eta$  сравнивались с заданными граничными условиями  $f'(\eta_\infty) = 1$ ,  $g'(\eta_\infty) = 1$ ,  $\theta(\eta_\infty) = 0$ ,  $\varphi(\eta_\infty) = 0$ . Начальные значения  $f''(0)$ ,  $g''(0)$ ,  $\theta'(0)$ ,  $\varphi'(0)$  многократно корректировались с помощью метода секущих для получения лучшей аппроксимации решения. При этом использовались размер шага  $\Delta\eta = 0,001$  и критерии сходимости  $10^{-6}$ . В расчетах точка  $\eta = \infty$  должна быть заменена приближением  $\eta = \eta_{\max}$ , где  $\eta_{\max}$  — произвольная величина, такая что при  $\eta > \eta_{\max}$  решение практически не меняется.

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Уравнения (15)–(18) для импульса, энергии и концентрации с граничными условиями (19)–(22) решались численно с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка и метода стрельбы. Получены профили скорости, температуры и концентрации для различных значений управляющих параметров, а также значения безразмерных коэффициентов трения  $C_{fx}[\text{Re}_x]^{1/2}$ ,  $C_{fy}[\text{Re}_x]^{1/2}(x/y)$ , локальных чисел Нуссельта  $[\text{Re}_x]^{-1/2} \text{Nu}_x$  и Шервуда  $[\text{Re}_x]^{-1/2} \text{Sh}_x$  для установившегося течения ( $A = 0$ ) в отсутствие термофореза и броуновских эффектов. Проведено сравнение полученных результатов и результатов работы [15] (табл. 1), которое показало, что они хорошо согласуются.

Исследуем течение в пограничном слое, тепло- и массообмен в окрестности узловой точки остановки  $A$  (см. рис. 1). Пусть  $\text{Pr} = \text{Le} = 2,0$ , за исключением случая, описанного в [15]. В табл. 2, 3 показано влияние параметра нестационарности  $A$  на коэффициенты трения, локальные числа Нуссельта и Шервуда при различных значениях параметров термофореза и броуновского движения.

Из табл. 2 следует, что при всех рассмотренных значениях параметра термофореза коэффициенты трения и локальное число Нуссельта увеличиваются с увеличением параметра нестационарности. Минимального значения локальное число Шервуда достигает при особом значении параметра нестационарности при наличии термофореза. Наибольшая скорость теплообмена получена в случае, когда эффекты термофореза отсутствуют, при увеличении параметра термофореза скорость уменьшается. В табл. 3 приведены значения коэффициентов трения, локального числа Нуссельта и локального числа Шервуда при различных значениях параметра броуновского движения. Как и предполагалось, для коэффициентов трения получены те же результаты. При всех рассмотренных значениях параметра броуновского движения локальное число Нуссельта увеличивается при увеличении параметра нестационарности, наибольшая скорость теплообмена достигается, когда влияние броуновского движения очень мало ( $N_b \rightarrow 0$ ). Отрицательные значения локаль-

Таблица 1

Значения безразмерных коэффициентов трения и локальных чисел Нуссельта и Шервуда при  $A = 0$ ,  $\text{Pr} = 6,2$ ,  $c = 0,5$

Источник	$[\text{Re}_x]^{1/2} C_{fx}$	$(x/y)[\text{Re}_x]^{1/2} C_{fy}$	$[\text{Re}_x]^{-1/2} \text{Nu}_x$	$[\text{Re}_x]^{-1/2} \text{Sh}_x$
Работа [15]	1,2680	0,4991	1,3303	—
Настоящая работа	1,2678	0,4991	1,3302	0,7063

Таблица 2

Значения коэффициентов трения, локальных чисел Нуссельта и Шервуда  
при  $Pr = Le = 2,0$ ,  $N_b = 0,2$ ,  $c = 0,5$   
и различных значениях параметра термофореза и параметра нестационарности

$N_t$	$A$	$[Re_x]^{1/2} C_{fx}$	$(x/y)[Re_x]^{1/2} C_{fy}$	$[Re_x]^{-1/2} Nu_x$	$[Re_x]^{-1/2} Sh_x$
0	-0,5	1,124	0,413	-0,297	-0,051
	-0,2	1,209	0,464	0,377	0,514
	0	1,266	0,498	0,705	0,855
	0,5	1,399	0,577	1,297	1,496
	1,0	1,524	0,649	1,731	1,978
0,2	-0,5	1,124	0,413	-0,455	0,685
	-0,2	1,209	0,464	0,271	0,658
	0	1,266	0,498	0,604	0,751
	0,5	1,399	0,577	1,179	1,059
	1,0	1,524	0,649	1,590	1,332
0,5	-0,5	1,124	0,413	-0,666	2,329
	-0,2	1,209	0,464	0,144	1,096
	0	1,266	0,498	0,479	0,832
	0,5	1,399	0,577	1,034	0,659
	1,0	1,524	0,649	1,415	0,676

Таблица 3

Значения коэффициентов трения, локальных чисел Нуссельта и Шервуда  
при  $Pr = Le = 2,0$ ,  $N_t = 0,2$ ,  $c = 0,5$  и различных значениях  
параметра броуновского движения и параметра нестационарности

$N_b$	$A$	$[Re_x]^{1/2} C_{fx}$	$(x/y)[Re_x]^{1/2} C_{fy}$	$[Re_x]^{-1/2} Nu_x$	$[Re_x]^{-1/2} Sh_x$
0,2	-0,5	1,124	0,413	-0,455	0,685
	-0,2	1,209	0,464	0,271	0,658
	0	1,266	0,498	0,604	0,751
	0,5	1,399	0,577	1,179	1,059
	1,0	1,524	0,649	1,590	1,332
0,5	-0,5	1,124	0,413	-0,746	0,405
	-0,2	1,209	0,464	0,103	0,614
	0	1,266	0,498	0,432	0,863
	0,5	1,399	0,577	0,956	1,391
	1,0	1,524	0,649	1,313	1,806
1,0	-0,5	1,124	0,413	-1,108	0,269
	-0,2	1,209	0,464	-0,091	0,592
	0	1,266	0,498	0,232	0,886
	0,5	1,399	0,577	0,685	1,482
	1,0	1,524	0,649	0,969	1,944

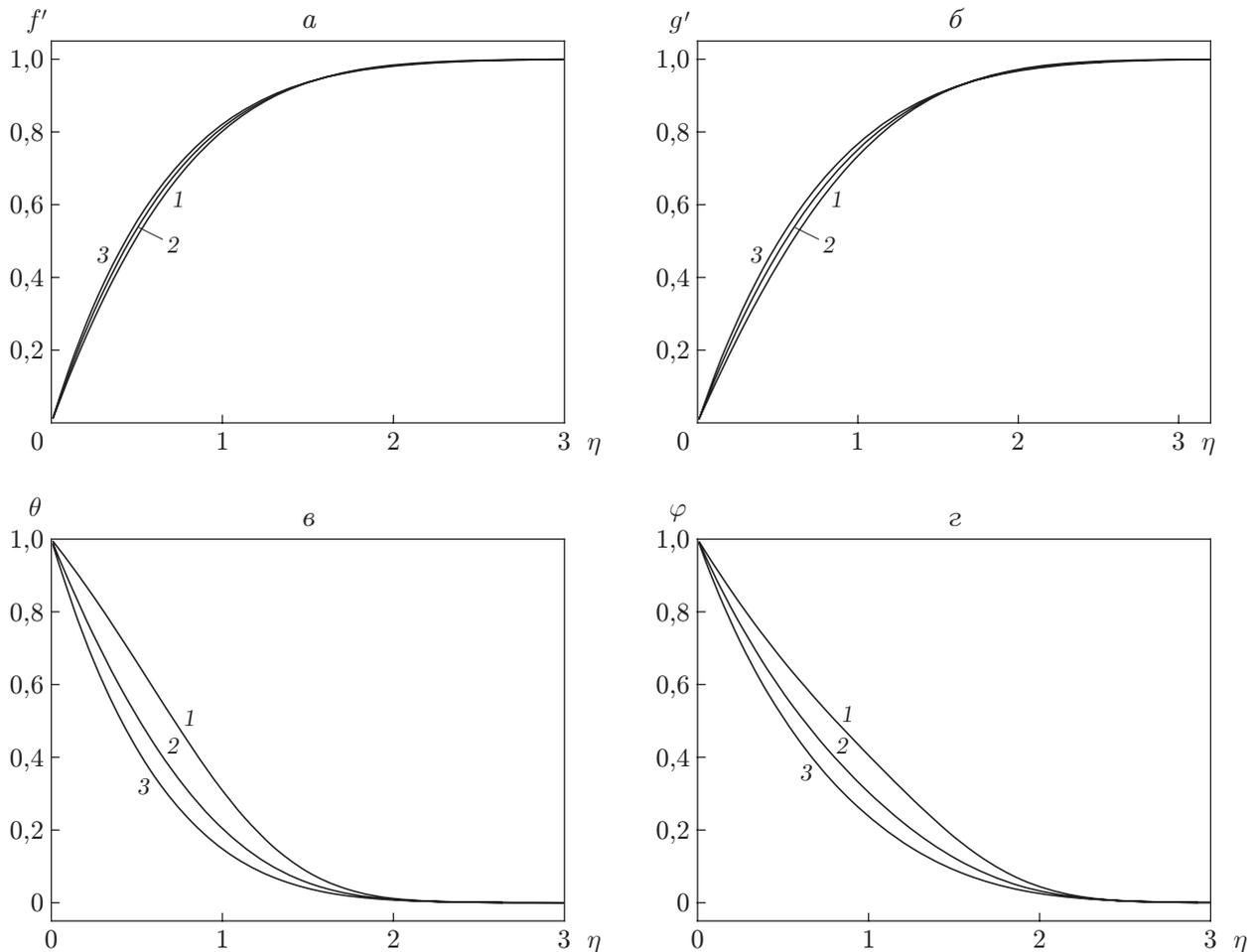


Рис. 2. Зависимости  $f'$  (а),  $g'$  (б),  $\theta$  (в),  $\varphi$  (г) от параметра подобия  $\eta$  при  $c = 0,5$ ,  $Pr = Le = 2,0$ ,  $N_t = N_b = 0,2$  и различных значениях параметра нестационарности:  
 1 —  $A = 0$ , 2 —  $A = 0,5$ , 3 —  $A = 1,0$

ного числа Нуссельта в табл. 2, 3 свидетельствуют о том, что при некоторых значениях параметра нестационарности тепло передается от наножидкости к телу.

На рис. 2 показано влияние параметра нестационарности  $A$  на зависимости  $f'(\eta)$ ,  $g'(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$  и  $\varphi(\eta)$ . Видно, что с увеличением параметра нестационарности компоненты скорости увеличиваются, а температура и объемная доля наночастиц уменьшаются. Влияние параметра термофореза на зависимости  $\theta(\eta)$ ,  $\varphi(\eta)$  показано на рис. 3. Из уравнений (15), (16) следует, что термофорез и броуновское движение не оказывают влияния на компоненты скорости, поскольку параметры  $N_t$ ,  $N_b$  отсутствуют в этих уравнениях. На рис. 3 видно, что температура и объемная доля наночастиц увеличиваются при увеличении параметра термофореза, т. е. толщины пограничного слоя температуры и концентрации наночастиц увеличиваются с увеличением параметра термофореза. Также следует отметить, что наличие термофореза оказывает более существенное влияние на объемную долю наночастиц, чем на температуру.

На рис. 4 показано влияние параметра броуновского движения на температуру и концентрацию наночастиц. Видно, что с увеличением параметра броуновского движения температура увеличивается, в то время как концентрация наночастиц уменьшается. На рис. 5

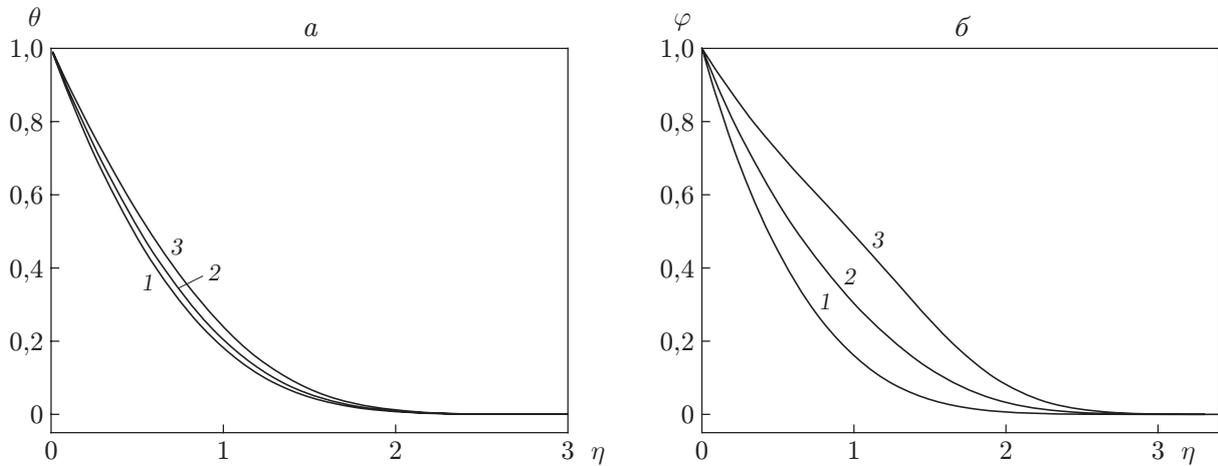


Рис. 3. Зависимости  $\theta$  (а),  $\varphi$  (б) от параметра подобия  $\eta$  при  $c = 0,5$ ,  $\text{Pr} = \text{Le} = 2,0$ ,  $A = 0,5$ ,  $N_b = 0,2$  и различных значениях параметра термофореза: 1 —  $N_t = 0$ , 2 —  $N_t = 0,2$ , 3 —  $N_t = 0,5$

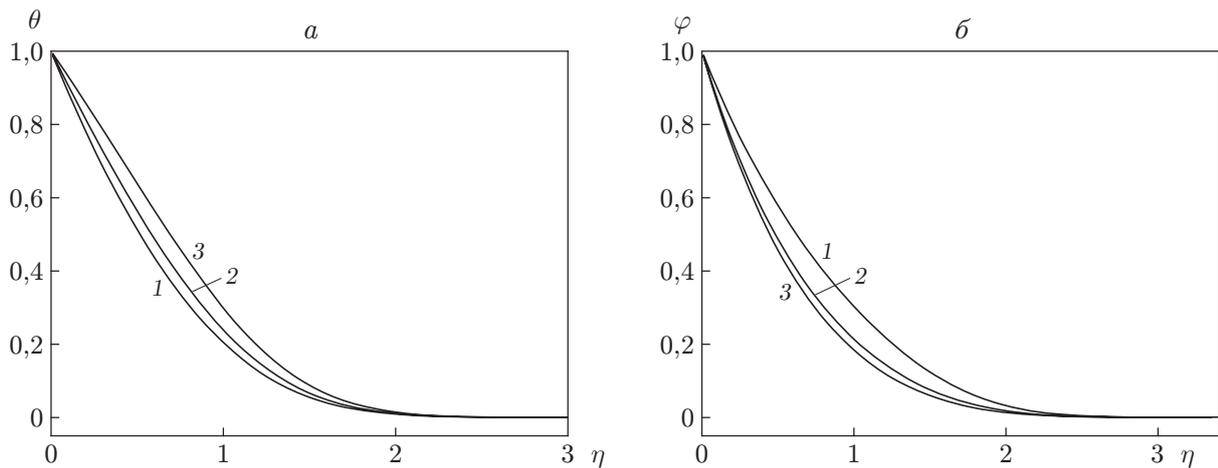


Рис. 4. Зависимости  $\theta$  (а),  $\varphi$  (б) от параметра подобия  $\eta$  при  $c = 0,5$ ,  $\text{Pr} = \text{Le} = 2,0$ ,  $A = 0,5$ ,  $N_t = 0,2$  и различных значениях параметра броуновского движения: 1 —  $N_b = 0,2$ , 2 —  $N_b = 0,5$ , 3 —  $N_b = 1,0$

показано изменение локальных коэффициентов трения  $f''(0)$ ,  $g''(0)$  при изменении параметра нестационарности  $A$ . Видно, что оба локальных коэффициента трения увеличиваются с увеличением параметра нестационарности, и скорости их изменения близки. На рис. 6 показаны зависимости локального числа Нуссельта  $-\theta'(0)$  и локального числа Шервуда  $-\varphi'(0)$  от параметра нестационарности при различных значениях параметра термофореза. Видно, что при всех значениях параметра термофореза локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением параметра нестационарности. При этом наибольшая скорость теплообмена на поверхности получена в случае отсутствия термофореза.

Зависимости локального числа Нуссельта и локального числа Шервуда от параметра нестационарности при различных значениях параметра броуновского движения показаны на рис. 7. На рис. 7, а видно, что при всех значениях параметра броуновского движения локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением параметра нестационарности, при очень малых значениях параметра броуновского движения достигается наибольшая скорость теплообмена, которая уменьшается с увеличением влияния броуновского движения.

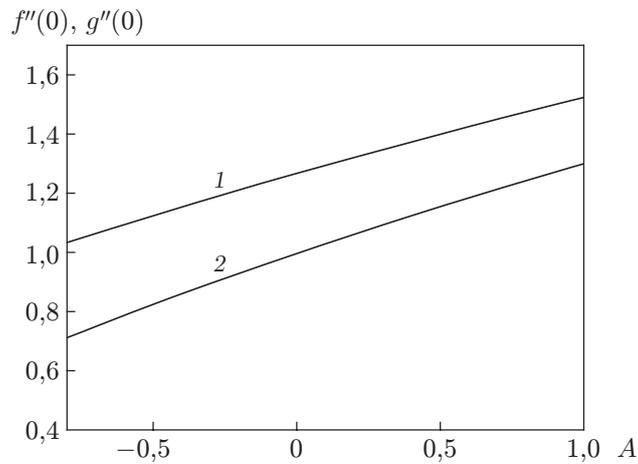


Рис. 5. Зависимости локальных коэффициентов трения  $f''(0)$  (1),  $g''(0)$  (2) от параметра нестационарности при  $c = 0,5$ ,  $Pr = Le = 2,0$

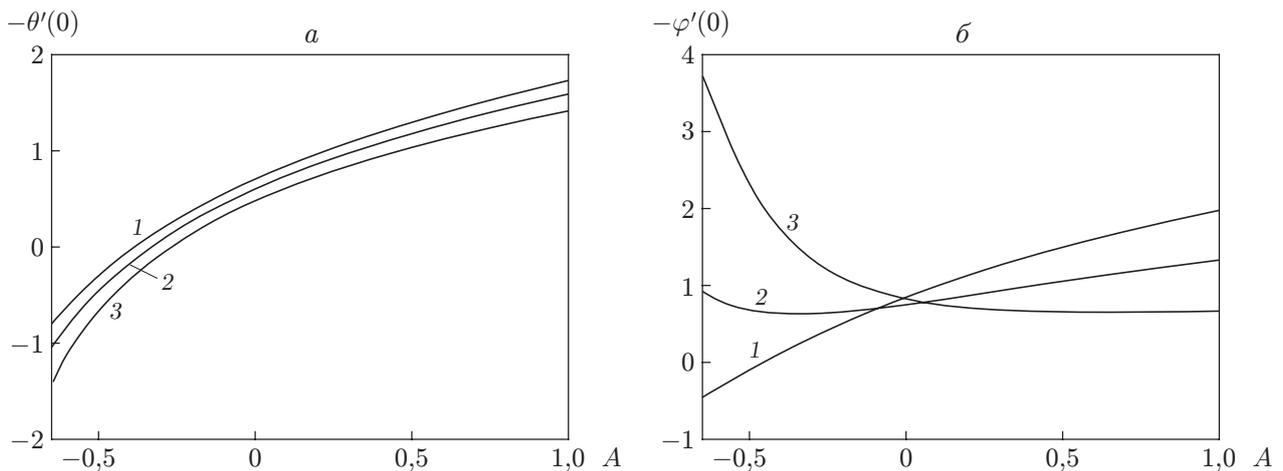


Рис. 6. Зависимости локальных чисел Нуссельта (а) и Шервуда (б) от параметра нестационарности при  $c = 0,5$ ,  $Pr = Le = 2,0$ ,  $N_b = 0,2$  и различных значениях параметра термофореза:  
1 —  $N_t = 0$ , 2 —  $N_t = 0,2$ , 3 —  $N_t = 0,5$

Из рис. 7, б следует, что локальное число Шервуда изменяется аналогично. На рис. 7 также видно, что при некотором значении параметра нестационарности имеет место минимум скорости массообмена на поверхности, который с увеличением параметра броуновского движения достигается при меньших значениях параметра нестационарности.

На рис. 8, 9 показано влияние чисел Прандтля и Льюиса на температуру и объемную долю наночастиц соответственно. Как и предполагалось, с увеличением чисел Прандтля и Льюиса толщины теплового и концентрационного пограничных слоев уменьшаются. При меньших значениях числа Льюиса имеет место максимум концентрации, исчезающий при увеличении числа Льюиса. Максимум температуры не наблюдается при всех значениях числа Прандтля.

**4. Выводы.** Проведен анализ характеристик тепло- и массообмена в точке остановки нестационарного трехмерного течения наножидкости на круглом цилиндре с синусоидальным изменением радиуса при наличии термофореза и броуновского движения. С исполь-

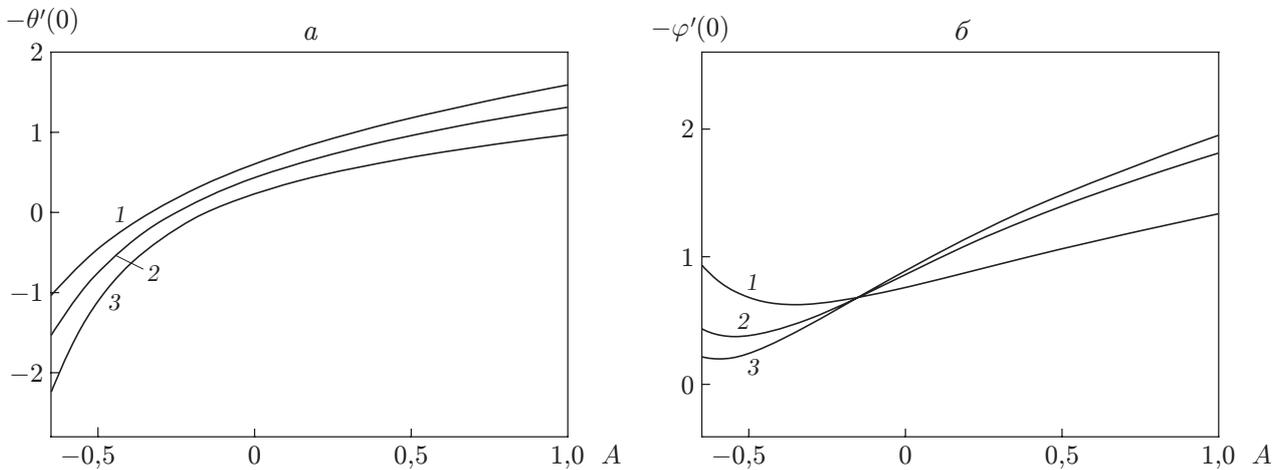


Рис. 7. Зависимости локальных чисел Нуссельта (а) и Шервуда (б) от параметра нестационарности при  $c = 0,5$ ,  $Pr = Le = 2,0$ ,  $N_t = 0,2$  и различных значениях параметра броуновского движения:  
 1 —  $N_b = 0,2$ , 2 —  $N_b = 0,5$ , 3 —  $N_b = 1,0$

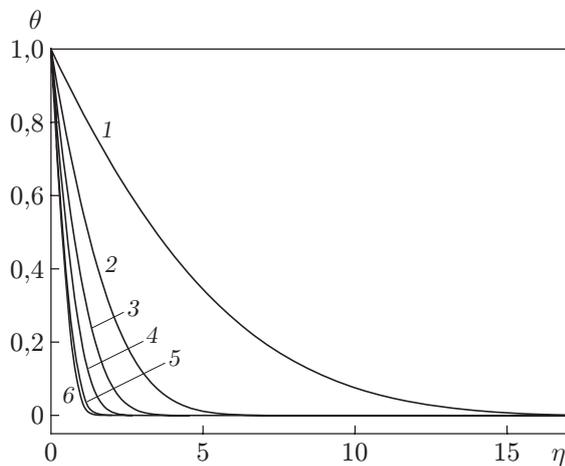


Рис. 8

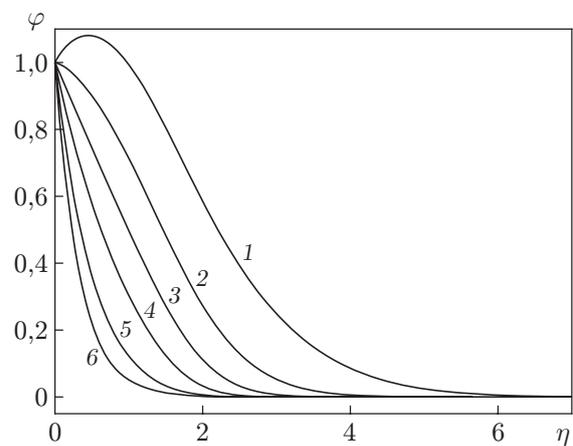


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость температуры  $\theta$  от параметра подобия  $\eta$  при  $c = 0,5$ ,  $N_t = N_b = 0,2$ ,  $Le = 2,0$ ,  $A = 0,5$  и различных значениях числа Прандтля:  
 1 —  $Pr = 0,02$ , 2 —  $Pr = 0,2$ , 3 —  $Pr = 0,7$ , 4 —  $Pr = 2,0$ , 5 —  $Pr = 6,2$ , 6 —  $Pr = 10,0$

Рис. 9. Зависимость объемной доли наночастиц  $\varphi$  от параметра подобия  $\eta$  при  $c = 0,5$ ,  $N_t = N_b = 0,2$ ,  $Pr = 2,0$ ,  $A = 0,5$  и различных значениях числа Льюиса:  
 1 —  $Le = 0,2$ , 2 —  $Le = 0,5$ , 3 —  $Le = 1,0$ , 4 —  $Le = 2,0$ , 5 —  $Le = 5,0$ , 6 —  $Le = 10,0$

зованием преобразований подобия управляющие дифференциальные уравнения в частных производных приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена численно с помощью схемы Рунге — Кутты четвертого порядка и метода стрельбы. Проведенное исследование влияния параметров нестационарности  $A$ , термофореза  $N_t$ , броуновского движения  $N_b$ , числа Прандтля  $Pr$  и числа Льюиса  $Le$  на течение наножидкости и характеристики теплообмена позволяет сделать следующие выводы.

При увеличении параметра нестационарности компоненты скорости также увеличиваются, в то время как температура и объемная доля наночастиц уменьшаются при всех значениях параметров термофореза и броуновского движения.

Влияние параметра нестационарности на температуру и объемную долю наночастиц более существенно, чем его влияние на скорость.

Температура в пограничном слое увеличивается с увеличением параметров термофореза и броуновского движения. Концентрация наночастиц увеличивается при увеличении влияния термофореза и уменьшается при увеличении влияния броуновского движения.

При всех значениях параметров термофореза и броуновского движения локальный коэффициент трения и локальное число Нуссельта увеличиваются с увеличением параметра нестационарности.

При некотором значении параметра нестационарности имеет место минимальное значение массообмена на поверхности.

Увеличение числа Прандтля и числа Льюиса вызывает уменьшение температуры и концентрации. Кроме того, при малых значениях числа Льюиса концентрация наночастиц достигает максимума.

Учет влияния термофореза и броуновского движения имеет большое значение для повышения теплообмена, лучшие характеристики которого достигаются в случаях, когда параметры термофореза и броуновского движения очень малы или стремятся к нулю.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Hiemenz K.** Die grenzschicht an einem in den gleichformigen Flussigkeitsstrom eingetauchten graden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. Bd 326. S. 321–331.
2. **Homann F.** Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // *Z. angew. Math. Mech.* 1936. Bd 16. S. 153–164.
3. **Garg W. K., Rajagopal K. R.** Stagnation-point flow of a non-Newtonian fluid // *Mech. Res. Comm.* 1990. V. 17. P. 415–421.
4. **Seshadri R., Sreeshylan N., Nat G.** Unsteady three-dimensional stagnation point flow of a viscoelastic fluid // *Intern. J. Engng Sci.* 1997. V. 35. P. 445–454.
5. **Domairry G., Ziabakhsh Z.** Solution of boundary layer and heat transfer of an electrically conducting micropolar fluid in a non-Darcian porous medium // *Meccanica.* 2012. V. 47. P. 195–202.
6. **Howarth L.** The boundary-layer in three dimensional flow. Pt 2. The flow near a stagnation point // *Philos. Mag.* 1951. V. 42. P. 1433–1440.
7. **Davey A.** A boundary layer flow at a saddle point of attachment // *J. Fluid Mech.* 1961. N 10. P. 593–610.
8. **Bhattacharyya S., Gupta A. S.** MHD flow and heat transfer at a general three-dimensional stagnation point // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1998. V. 33. P. 125–134.
9. **Buongiorno J.** Convective transport in nanofluids // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 2006. V. 128. P. 240–250.

10. **Nield D. A., Kuznetsov A. V.** The Cheng — Minkowycz problem for natural convective boundary-layer flow in a porous medium saturated by a nanofluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 5792–5795.
11. **Kuznetsov A. V., Nield D. A.** Natural convective boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate // Intern. J. Thermal Sci. 2010. V. 49. P. 243–247.
12. **Bachok N., Ishak A., Pop I.** Boundary-layer flow of nanofluids over a moving surface in a flowing fluid // Intern. J. Thermal. Sci. 2010. V. 49. P. 1663–1668.
13. **Tiwari R. J., Das M. K.** Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2007. V. 50. P. 2002–2018.
14. **Bachok N., Ishak A., Nazar R., Pop I.** Flow and heat transfer at a general three-dimensional stagnation point in a nanofluid // Phys. B. 2010. N 405. P. 4914–4918.
15. **Dinarvand S., Hosseini R., Damangir E., Pop I.** Series solutions for steady three-dimensional stagnation point flow of a nanofluid past a circular cylinder with sinusoidal radius variation // Meccanica. 2013. V. 48. P. 643–652.

*Поступила в редакцию 19/VII 2013 г.,  
в окончательном варианте — 7/X 2013 г.*

---