

УДК 517.956.3

## Применение спектрального метода для численного моделирования распространения сейсмических волн в пористых средах при наличии диссипации энергии\*

Х.Х. Имомназаров, А.А. Михайлов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,  
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: imom@omzg.sccc.ru (Имомназаров Х.Х.), alex\_mikh@omzg.sccc.ru (Михайлов А.А.)

**Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А.** Применение спектрального метода для численного моделирования распространения сейсмических волн в пористых средах при наличии диссипации энергии // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 2. — С. 139–147.

Предлагается алгоритм решения динамической задачи сейсмологии для пористых сред на основе спектрально-разностного метода. Рассматривается линейная двумерная задача в виде динамических уравнений распространения волнового поля в пористой среде с учетом диссипации энергии, записанные в терминах компонент скоростей, напряжений и порового давления. Управляющие уравнения основаны на законах сохранения и согласованы с условиями термодинамики. Среда считается изотропной и двумерно-неоднородной по пространству. Для численного решения задачи предлагается метод на основе совместного использования интегрального преобразования Лагерра по времени и конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам. Приводится описание численной реализации предлагаемого метода и анализируются его особенности при расчетах. Обсуждается эффективность применения преобразования Лагерра и его отличие от преобразования Фурье при использовании спектрального метода решения прямых динамических задач сейсмологии. Представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для тестовой модели среды.

**Ключевые слова:** преобразование Лагерра, пористая среда, численное моделирование, волновое поле, разностная схема.

**Imomnazarov Kh.Kh., Mikhailov A.A.** Application of a spectral method for numerical modeling of propagation of seismic waves in porous media for dissipative case // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 2. — P. 139–147.

This paper presents the algorithm, based on the application of the spectral Laguerre method for approximation of temporal derivatives as applied to the problem of seismic wave propagation in the porous media with dissipation of energy. The initial system of equations is written down as the first order hyperbolic system in terms of velocities, stresses and pore pressure. For the numerical solution of the problem in question, the method of a combination of the analytical Laguerre transformation and a finite difference method is used. The proposed method of the solution can be considered to be an analog to the known spectral method based on the Fourier transform. However, unlike the Fourier transform, application of the integral Laguerre transform with respect to time allows us to reduce the initial problem to solving a system of equations in which the parameter of division is present only in the right-hand side of equations and has a recurrent dependence. As compared to the time-domain method, with the help of an analytical transformation in the spectral method it is possible to reduce an original problem to solving a system of differential equations, in which there are only derivatives with respect to spatial coordinates. This allows us to apply a known stable difference scheme for recurrent solutions to similar systems. Such an approach is effective when solving dynamic problems for

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00689) и проекта Президиума РАН (№ 4.9).

porous media. Thus, because of the presence of the second longitudinal wave with a low velocity, the use of difference schemes in all coordinates for stable solutions requires a consistent small step both with respect to time and space, which inevitably results in an increase in computer costs.

**Key words:** *Laguerre transform, porous media, numerical modeling, wave field, difference scheme.*

## 1. Введение

Пористая среда, состоящая из упруго-деформируемой матрицы, заполненной вязкой жидкостью, является реалистической моделью, которая позволяет объяснять наблюдаемые эффекты сейсмических исследований свойств горных пород при наличии поровой жидкости. В последние годы численное моделирование распространения сейсмических волн в флюидонасыщенных жидкостью пористых средах получило значительное внимание из-за его практического применения в различных областях задач геофизики, биомеханики и нефтяной разработки. В качестве математической модели, как правило, используется модель Френкеля–Био [1, 2]. Особенностью этих моделей является наличие дополнительной второй продольной волны. В теории Френкеля–Био скорости распространения таких волн являются функциями четырех упругих параметров для заданных значений физических параметров среды [1, 2]. В 1989 г. В.Н. Доровский [3], основываясь на общих первых физических принципах, построил нелинейную математическую модель для пористых сред. Так же, как в теории Френкеля–Био, в модели В.Н. Доровского есть три типа звуковых колебаний: поперечный и два типа продольных. В отличие от моделей типа Френкеля–Био, в линеаризованной модели В.Н. Доровского среда описывается тремя упругими параметрами [4, 5]. Эти упругие параметры взаимнооднозначно выражаются тремя скоростями упругих колебаний. Это обстоятельство является важным для численного моделирования распространения упругих волн в пористых средах, когда известны распределения скоростей акустических волн, физических плотностей вмещающей среды и насыщающей ее жидкости и значение коэффициента пористости.

В данной работе численно решается система линеаризованных уравнений для двухмерной динамической задачи распространения сейсмических волн в пористых средах [4, 5] с учетом диссипации энергии. Исходная система записывается в виде гиперболической системы в терминах скоростей матрицы, скорости насыщающей жидкости, тензора напряжений и давления жидкости. Для численного решения поставленной задачи используется метод комплексирования аналитического преобразования Лагерра и конечно-разностного метода. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [6, 7], а затем развит и для задач вязкоупругости [8, 9]. Предлагаемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты  $\omega$  мы имеем параметр  $m$  — степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость.

В отличие от конечно-разностного метода, в спектральном методе с помощью аналитического преобразования можно свести исходную задачу к решению дифференциальной системы уравнений, в которой имеются производные только по пространственным координатам. Это позволяет применить известные устойчивые разностные схемы для последующего решения подобных систем. Такой подход является эффективным при решении нестационарных динамических задач для пористых сред. Так как из-за наличия

второй продольной волны с малой скоростью при использовании разностных схем по всем координатам для устойчивости решения необходимо задание согласованного малого шага дискретизации и по времени, и по пространству, что неизбежно увеличивает объем требуемых вычислений.

## 2. Постановка задачи

Пусть полуплоскость  $x_2 > 0$  заполнена пористой средой, насыщенной жидкостью. Тогда распространение сейсмических волн в данной среде при наличии потери энергии описывается следующей системой дифференциальных уравнений [4, 5, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\rho_l}{\rho \rho_s} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} (u_i - v_i) &= F_i f(t), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \chi \rho_l (u_i - v_i) &= F_i f(t), \\ \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \left( \frac{\rho_s}{\rho} K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u} - \frac{\rho_s}{\rho} K \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial t} - (K - \alpha \rho \rho_s) \operatorname{div} \vec{u} + \alpha \rho \rho_l \operatorname{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  и  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  — векторы скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью  $\rho_s$  и жидкости с парциальной плотностью  $\rho_l$  соответственно,  $P$  — поровое давление,  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжений,  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  — распределение локализованного в пространстве источника,  $f(t)$  — заданный временной сигнал в источнике;  $\rho = \rho_l + \rho_s$ ,  $\rho_s = \rho_s^f (1 - d_0)$ ,  $\rho_l = \rho_l^f d_0$ ,  $\rho_s^f$  и  $\rho_l^f$  — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно,  $d_0$  — пористость,  $\chi$  — коэффициент межфазного трения,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера,  $K = \lambda + 2\mu/3$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$ , — коэффициенты Ламе,  $\alpha = \rho \alpha_3 + K/\rho^2$ ,  $\rho^3 \alpha_3 > 0$  — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды. Упругие модули  $K$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_3$  выражаются через скорость распространения поперечной волны  $c_s$  и две скорости продольных волн  $c_{p1}$ ,  $c_{p2}$  следующими формулами [11, 12]:

$$\begin{aligned} \mu &= \rho_s c_s^2, \\ K &= \frac{\rho \rho_s}{2 \rho_l} \left( c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_l}{\rho} c_s^2 - \sqrt{(c_{p1}^2 - c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4} \right), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2 \rho^2} \left( c_{p1}^2 + c_{p2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_s}{\rho} c_s^2 + \sqrt{(c_{p1}^2 - c_{p2}^2)^2 - \frac{64}{9} \frac{\rho_l \rho_s}{\rho^2} c_s^4} \right). \end{aligned}$$

Задача решается при нулевых начальных данных:

$$u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = \sigma_{ik}|_{t=0} = P|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и граничных условиях на свободной поверхности в плоскости  $x_2 = 0$ :

$$\sigma_{22} + P|_{x_2=0} = \sigma_{12}|_{x_2=0} = \frac{\rho_l}{\rho} P \Big|_{x_2=0} = 0. \quad (3)$$

### 3. Алгоритм решения

Для решения поставленной задачи (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени

$$\vec{W}^m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \vec{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht) \quad (4)$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^\infty \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}^m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht), \quad (5)$$

где  $l_m^\alpha(ht)$  — функции Лагерра.

Функции Лагерра  $l_m^\alpha(ht)$  выражаются через классические ортонормированные многочлены Лагерра  $L_m^\alpha(ht)$  [6]. В данной статье мы выбираем параметр  $\alpha$  целым и положительным, тогда

$$l_m^\alpha(ht) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_m^\alpha(ht).$$

Для первой производной полиномов Лагерра по переменной  $t$  справедливо следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_m^\alpha(ht) = -h \sum_{k=0}^{m-1} L_k^\alpha(ht).$$

Легко заметить, что для автоматического удовлетворения начальным условиям задачи достаточно положить значение  $\alpha \geq 1$ , а для удобства расчетов выбираем его целым. Кроме того, в этих формулах введен параметр сдвига  $h > 0$ , смысл и эффективность применения которого подробно обсуждается в работах [8, 9].

В результате данного преобразования исходная задача (1)–(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области, которая записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} u_i^m + \frac{1}{\rho_s} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}^m}{\partial x_j} + \frac{\rho_l}{\rho \rho_s} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} + \chi \frac{\rho_l^2}{\rho_s} (u_i^m - v_i^m) &= F_i f^m - h \sum_{n=0}^{m-1} u_i^n, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \\ \frac{h}{2} v_i^m + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^m}{\partial x_i} - \chi \rho_l (u_i^m - v_i^m) &= F_i f^m - h \sum_{n=0}^{m-1} v_i^n, \\ \frac{h}{2} \sigma_{ik}^m + \mu \left( \frac{\partial u_k^m}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^m}{\partial x_k} \right) + \left( \lambda - \frac{\rho_s}{\rho} K \right) \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u}^m - \frac{\rho_s}{\rho} K \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v}^m &= -h \sum_{n=0}^{m-1} \sigma_{ik}^n, \\ \frac{h}{2} P^m - (K - \alpha \rho \rho_s) \operatorname{div} \vec{u}^m + \alpha \rho \rho_l \operatorname{div} \vec{v}^m &= -h \sum_{n=0}^{m-1} p^n \end{aligned} \quad (6)$$

с граничными условиями:

$$\sigma_{22}^m + P^m|_{x_2=0} = \sigma_{12}^m|_{x_2=0} = \frac{\rho_l}{\rho} P^m \Big|_{x_2=0} = 0, \quad (7)$$

где  $f^m$  — коэффициенты разложения функции источника  $f(t)$  по Лагерру;  $u_i^m, v_i^m, \sigma_{ik}^m, P^m$  — коэффициенты разложения соответствующих компонент поля в ряд по функциям

Лагерра. Верхний индекс  $m$  у всех компонент означает номер коэффициента в разложении по Лагерру. Легко заметить, что значение  $m$  присутствует явно только в правой части уравнений в виде рекуррентной зависимости для всех компонент поля.

Для решения приведенной задачи воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по пространственным координатам на сдвинутых сетках с 4-м порядком точности [13]. Для этого в расчетной области введем в направлении координаты  $z = x_1$  сеток  $\omega z_1$  и  $\omega z_{1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta z$ , сдвинутых относительно друг друга на  $\Delta z/2$ :

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z, t), \quad \omega z_{1/2} = \left(x, j\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, t\right), \quad j = 0, \dots, M.$$

Аналогично введем в направлении координаты  $x = x_2$  сеток  $\omega x_1$  и  $\omega x_{1/2}$  с шагом дискретизации  $\Delta x$ , сдвинутых относительно друг друга на  $\Delta x/2$ :

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z, t), \quad \omega x_{1/2} = \left(i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, z, t\right), \quad i = 0, \dots, N.$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\begin{aligned} u_1^m(x, z), v_1^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_1, \\ u_2^m(x, z), v_2^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2}, \\ \sigma_{11}^m(x, z), \sigma_{22}^m(x, z), P^m(x, z) &\in \omega x_{1/2} \times \omega z_1, \\ \sigma_{12}^m(x, z) &\in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}. \end{aligned}$$

Выбор расположения компонент в целых и полужелых узлах сетки осуществляется на основе разностной аппроксимации уравнений системы (6) и удовлетворения граничному условию (7), для аппроксимации которого используется второй порядок точности. Для боковых и нижних границ задаются граничные условия 1-го или 2-го рода для соответствующих компонент.

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6), (7) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения  $\vec{W}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{W}(m) &= (\vec{V}_0(m), \vec{V}_1(m), \dots, \vec{V}_{M+N}(m))^T, \\ \vec{V}_{i+j} &= \left(u_1^{i,j}, u_2^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, v_1^{i,j}, v_2^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \sigma_{11}^{i+\frac{1}{2},j}, \sigma_{22}^{i+\frac{1}{2},j}, \sigma_{12}^{i,j+\frac{1}{2}}, P^{i+\frac{1}{2},j}\right)^T. \end{aligned}$$

Тогда данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана так:

$$\left(A_\Delta + \frac{h}{2}E\right)\vec{W}(m) = \vec{F}_\Delta(m-1). \quad (8)$$

Последовательность компонент волнового поля в векторе решения  $\vec{V}$  выбирается с учетом минимизации количества диагоналей в матрице  $A_\Delta$ . При этом на главной диагонали матрицы специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве множителя параметр  $h$ . Следует отметить, что за счет выбора параметра  $h$  имеется возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений (8), можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля  $\vec{W}(m)$ . Затем, воспользовавшись формулой обращения преобразований Лагерра (5), получим решение исходной задачи (1)–(3).

#### 4. Аспекты численной реализации

В аналитическом преобразовании Лагерра при определении значений функций по их спектру используются формулы обращения в виде сумм с бесконечным пределом. При численной реализации необходимым условием является определение требуемого количества членов суммируемого ряда для построения решения с заданной точностью. Количество членов ряда в разложении по функциям Лагерра, необходимых для определения значений компонент поля по формуле (5), зависит от задаваемого сигнала в источнике  $f(t)$ , выбора параметра  $h$  и значения временного интервала моделируемого волнового поля. Как можно определить требуемое количество гармоник и выбрать оптимальное значение параметра  $h$ , подробно рассмотрено в работах [6, 8].

Анализ численных расчетов показывает, что основная погрешность вычислений в представленном алгоритме решения поставленной задачи связана с численной аппроксимацией пространственных производных. Поэтому для разностной аппроксимации использовался четвертый порядок точности. Для более точного описания производных вблизи границ раздела сильноконтрастных слоев среды, а также более точного учета граничных условий лучше использовать разностную сетку с переменным шагом дискретизации. Таким образом можно уменьшать шаг разбиения сетки при аппроксимации производных на определенных участках среды, что позволяет получить решение с требуемой точностью при меньшем количестве узлов разностной сетки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (8) наиболее эффективным оказалось использование итерационного метода сопряженных градиентов. В этом случае для матриц систем большой размерности не требуется хранение всей матрицы в машинной памяти. Преимуществом этого метода является также быстрая сходимость к решению задачи при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Наша матрица как раз обладает этим свойством за счет введенного параметра  $h$ . Задав нужное значение  $h$ , можно существенно ускорить сходимость итерационного процесса. Выбор оптимального значения  $h$ , в этом случае, осуществляется исходя из минимизации количества гармоник Лагерра в формуле обращения (5) и уменьшения количества итераций, требуемых для нахождения решения для каждой гармоники. На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряженных градиентов. В данной реализации при задании входных данных модели среды используется разбиение исходной пространственной области на множество подобластей, равных количеству процессоров. Такой подход дает возможность распределения памяти как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

Анализ тестовых расчетов показывает устойчивость представленного алгоритма даже для моделей сред, имеющих резкоконтрастные границы раздела слоев или содержащих тонкие слои, сравнимые с пространственной длиной волны.

#### 5. Численные результаты

В данной статье представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для тестовых моделей сред. В качестве первой модели была задана среда состоящая из трех однородных слоев: верхний слой — упругая среда; нижний левый слой — пористая среда без поглощения; нижний правый слой — пористая среда с поглощением. Физические характеристики слоев были заданы следующими:

1. Верхний упругий слой:  $\rho = 1.2 \text{ г/см}^3$ ,  $c_p = 1.4 \text{ км/с}$ ,  $c_s = 1 \text{ км/с}$ ;

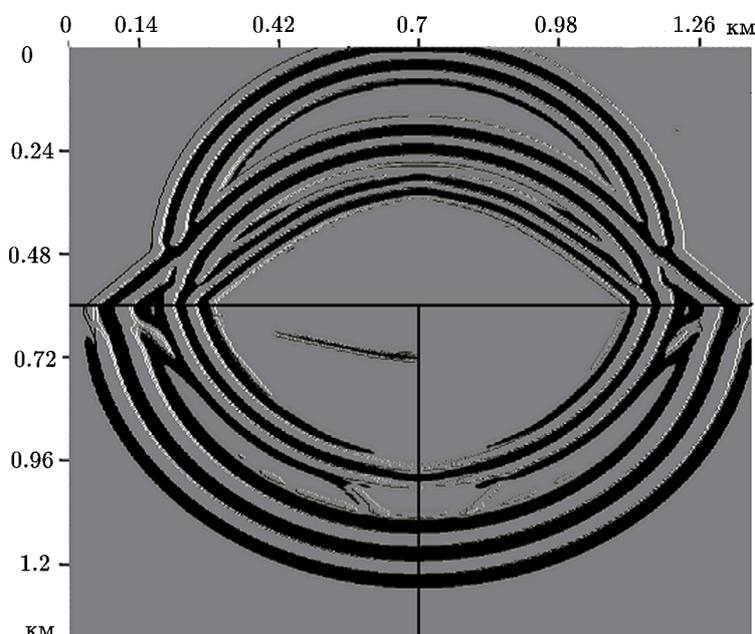
2. Нижний правый пористый слой с поглощением:  $\rho_s^f = 1.5 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_l^f = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $c_{p1} = 1.9 \text{ км/с}$ ,  $c_{p2} = 0.4 \text{ км/с}$ ,  $c_s = 1.3 \text{ км/с}$ ,  $d = 0.1$ ,  $\chi = 1000 \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}$ ,
3. Нижний левый пористый слой без поглощением:  $\rho_s^f = 1.5 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_l^f = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $c_{p1} = 1.9 \text{ км/с}$ ,  $c_{p2} = 0.4 \text{ км/с}$ ,  $c_s = 1.3 \text{ км/с}$ ,  $d = 0.1$ ,  $\chi = 0$ .

Толщина верхнего упругого слоя — 0.6 км. Вертикальная граница раздела между пористыми слоями проходит по линии  $x = 0.7 \text{ км}$ . Волновое поле моделировалось от точечного источника типа центра расширения с координатами  $x_0 = 0.7 \text{ км}$ ,  $z_0 = 0.5 \text{ км}$ , расположенного в верхнем упругом слое. Временной сигнал в источниках задавался в виде импульса Пузырева:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)), \quad (9)$$

где  $\gamma = 4$ ,  $f_0 = 30 \text{ Гц}$ ,  $t_0 = 0.05 \text{ с}$ .

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели среды представлены на рис. 1. На данном рисунке изображен мгновенный снимок волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений  $u_z(x, z)$  в фиксированный момент времени  $T = 0.4 \text{ с}$ . Из рисунка видно, что в нижнем левом пористом слое присутствует вторая продольная волна  $c_{p2} = 0.4 \text{ км/с}$ , а в правом пористом слое из-за наличия введенного поглощения амплитуда данной волны к этому времени уже значительно затухает.



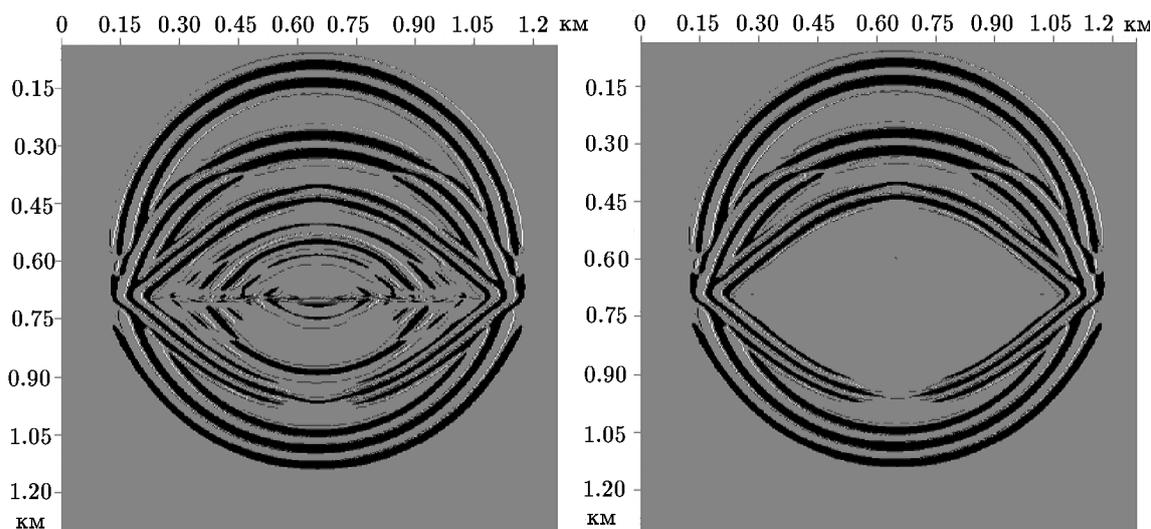
**Рис. 1.** Мгновенный снимок волнового поля для  $u_z(x, z)$  компоненты скорости смещений в момент времени  $T = 0.4 \text{ с}$ . Границы раздела слоев показаны сплошной линией

В качестве второй модели была задана однородная упругая среда с тонким пористым слоем. Заданная модель состоит из трех однородных слоев: верхний слой — упругая среда; средний — пористая среда; нижний — упругая среда. Физические характеристики среды были заданы следующими:

1. Верхний и нижний упругие слои:  $\rho = 1.2 \text{ г/см}^3$ ,  $c_p = 1.5 \text{ км/с}$ ,  $c_s = 1 \text{ км/с}$ ;
2. Средний пористый слой:  $\rho_s^f = 1.5 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_l^f = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $c_{p1} = 2 \text{ км/с}$ ,  $c_{p2} = 0.4 \text{ км/с}$ ,  $c_s = 1.3 \text{ км/с}$ ,  $d = 0.1$ .

Толщина верхнего слоя — 0.7 км. Толщина среднего слоя — 0.02 км. Волновое поле моделировалось от точечного источника типа центра расширения с координатами  $x_0 = 0.65 \text{ км}$ ,  $z_0 = 0.65 \text{ км}$ , расположенного в верхнем упругом слое. Временной сигнал в источнике задавался в виде импульса Пузырева по формуле (9).

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели среды представлены на рис 2. На данном рисунке изображены мгновенные снимки волнового поля для вертикальной компоненты скорости смещений  $u_z(x, z)$  в фиксированный момент времени при  $T = 0.4 \text{ с}$ : слева — для пористого слоя без поглощения, справа — для пористого слоя с поглощением ( $\chi = 1000 \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}$ ). Из рисунка видно, что в случае пористого слоя с поглощением отсутствуют волны, порождаемые многократным отражением второй (медленной) продольной волны в тонком пористом слое, толщина которого составляет приблизительно одну пространственную длину этой волны.



**Рис. 2.** Мгновенный снимок волнового поля для  $u_z(x, z)$  компоненты скорости смещений в момент времени  $T = 0.4 \text{ с}$  (слева — без поглощения; справа — с поглощением)

## 6. Заключение

Предлагаемый алгоритм является аналогом известных спектральных методов решения динамических задач. Однако, в отличие от классических преобразований Фурье и Лапласа, применение преобразования Лагерра приводит к системе уравнений, в которой параметр разделения по гармоникам входит только в правую часть в рекуррентном виде. В результате матрица системы сведенной задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

## Литература

1. **Френкель Я.И.** К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофизика. — 1944. — Т. 8, № 4. — С. 133–146.
2. **Biot М.А.** Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid I. low-frequency range // J. of the Acoustical Society of America. — 1956. — Vol. 28. — P. 168–178.
3. **Доровский В.Н.** Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. — 1989. — № 7. — С. 39–45.
4. **Доровский В.Н., Перепечко Ю.В., Роменский Е.И.** Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. — 1993. — № 1. — С. 100–111.
5. **Blokhin А.М., Dorovsky V.N.** Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum. — New York: Nova Science, 1995.
6. **Konyukh G.V., Mikhailenko B.G.** Application of integral Laguerre transformation for solving dynamic seismic problem // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics. — Novosibirsk. — 1998. — Iss. 4. — P. 79–91.
7. **Mikhailenko B.G.** Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. — 1999. — № 12. — P. 105–110.
8. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., and Reshetova G.V.** Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure appl. geophys. — 2003. — № 160. — P. 1207–1224.
9. **Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., and Reshetova G.V.** Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. — 2003. — № 51. — P. 37–48.
10. **Имомназаров Kh.Kh.** A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium: I. Excitation of oscillations of the magnetic field by the surface rayleigh wave // Math. Comput. Modelling. — 1996. — Vol. 24, № 1. — P. 79–84.
11. **Имомназаров Х.Х.** Несколько замечаний о системе уравнений Био // Доклады РАН. — 2000. — Т. 373, № 4. — С. 536–537.
12. **Имомназаров Kh.Kh.** Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Applied Mathematics Letters. — 2000. — Vol. 13, № 3. — P. 33–35.
13. **Levander A.R.** Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // Proc. 57-th SEG Annual Meeting. New Orleans. — 1987. — P. 234–245.

*Поступила в редакцию 29 мая 2013 г.,  
в окончательном варианте 11 сентября 2013 г.*

