

УДК 539.3+539.375

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЗАДАННЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА КОНТУРАХ ОТВЕРСТИЙ

С. А. Калоеров, А. В. Петренко, К. Г. Хорошев*

Донецкий национальный университет, 83055 Донецк, Украина

* Национальный транспортный университет, 01010 Киев, Украина

E-mails: kaloerov@mail.ru, alexcpp@inbox.ru, k.g.khoroshev@gmail.com

С использованием обобщенных комплексных потенциалов и методов конформных отображений, рядов и наименьших квадратов решена плоская задача электромагнитоупругости для бесконечной пластины с отверстиями и трещинами при заданных на их контурах электрических потенциалах. Для пластин с двумя круговыми отверстиями, круговым отверстием и трещиной, двумя трещинами проведены исследования электромагнитоупругого состояния и изменения коэффициента интенсивности напряжений в зависимости от геометрических и физико-механических свойств материала.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, комплексные потенциалы, плоская задача, трещина, потенциал электрического поля.

Введение. Возросший в последние десятилетия интерес к исследованию электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) тел из пьезоматериалов обусловлен развитием электроники и техники, а также использованием этих материалов при конструировании различных деталей, устройств и приборов. Элементы многих конструкций из пьезоматериалов могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий, трещин, включений, что необходимо учитывать при их проектировании и эксплуатации. В настоящее время достаточно полно исследовано электроупругое (магнитоупругое) состояние тел без учета магнитных (электрических) свойств материалов [1]. В работе [2] для случая связанных задач электромагнитоупругости, в которых учитываются как электрические, так и магнитные свойства пьезоматериалов, предложена методика решения двумерных и плоских задач электромагнитоупругости для любых многосвязных тел с использованием обобщенных комплексных потенциалов, построено решение задачи для бесконечной области с отверстием или трещиной, в [3] приведены решения задач для многосвязной области с отверстиями или трещинами, изучены электромагнитомеханические закономерности влияния свойств материалов и геометрических характеристик сред на основные характеристики ЭМУС. Исследования проводились с учетом действия механических сил или электромагнитных полей заданной напряженности или индукции. В данной работе с использованием указанного подхода получено решение плоской задачи электромагнитоупругости для бесконечной пластины с отверстиями, на контурах которой заданы электрические потенциалы.

1. Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим бесконечную многосвязную пластину из пьезоматериала, в срединной плоскости которой имеется область S , ограниченная контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$). В общем случае контуры отверстий L_l могут быть аппроксимированы дугами эллипсов, поэтому будем считать эти контуры эллиптическими с заданными полуосями a_l, b_l и центрами в точках (x_l, y_l) выбранной прямоугольной системы координат Oxy . Контуры отверстий свободны от внешних усилий и

не подкреплены, на них магнитная индукция равна нулю и заданы потенциалы электрического поля φ_l . На бесконечности заданы компоненты векторов напряженности $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$ или индукции $D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty$ электромагнитного поля, напряжения равны нулю.

При использовании обобщенных комплексных потенциалов определение ЭМУС рассматриваемой пластины сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из граничных условий [1, 2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \delta_k \Phi_k'(t_k) = 0 \quad (i = 1, 2, 4); \quad (1.1)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{k3}^0 \Phi_k(t_k) = \varphi_l - \varphi_0, \quad (1.2)$$

где

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (1.3)$$

μ_k — корни известного характеристического уравнения; g_{ki}^0 — величины, зависящие от параметра μ_k и физико-механических свойств материала; $\delta_k = dt/ds$ — производная по дуге контура; φ_0 — нулевой уровень потенциала электрического поля; t_k — граничное значение переменной z_k . Для удобства граничные условия (1.1) записаны в дифференциальной форме.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из заданной области S аффинным преобразованием (1.3) и ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l области S . Для данной задачи комплексные потенциалы имеют вид [1, 2]

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=1}^L \Phi_{kl}(z_k), \quad (1.4)$$

где c_{k0} — неизвестные постоянные; Γ_k — постоянные, определяемые из системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, 0),$$

если на бесконечности заданы значения индукции электромагнитного поля, или из системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, -h_k^0, -\mu_k h_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty, 0),$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля (электрической и магнитной); A_{kl} — постоянные, удовлетворяющие системе уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, Q_l/(2\pi), 0, 0, 0, 0, 0), \quad (1.5)$$

$\lambda_{ik}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0$ — известные постоянные, зависящие от параметра μ_k и физико-механических свойств материала; Q_l — неизвестный суммарный поток электрической ин-

дукции через L_l в область S ; $\Phi_{kl}(z_k)$ — функции, голоморфные в областях S_k . Из системы (1.5) следует выражение

$$A_{kl} = \frac{Q_l}{2\pi} \frac{\Delta_k}{i\Delta} = Q_l D_k, \quad (1.6)$$

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_{61} & \lambda_{62} & \lambda_{63} & \lambda_{64} & \overline{\lambda_{61}} & \overline{\lambda_{62}} & \overline{\lambda_{63}} & \overline{\lambda_{64}} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \overline{\lambda_{21}} & \overline{\lambda_{22}} & \overline{\lambda_{23}} & \overline{\lambda_{24}} \\ \lambda_{81} & \lambda_{82} & \lambda_{83} & \lambda_{84} & \overline{\lambda_{81}} & \overline{\lambda_{82}} & \overline{\lambda_{83}} & \overline{\lambda_{84}} \\ \lambda_{101} & \lambda_{102} & \lambda_{103} & \lambda_{104} & \overline{\lambda_{101}} & \overline{\lambda_{102}} & \overline{\lambda_{103}} & \overline{\lambda_{104}} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \overline{p_1} & \overline{p_2} & \overline{p_3} & \overline{p_4} \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \overline{q_1} & \overline{q_2} & \overline{q_3} & \overline{q_4} \\ r_1^0 & r_2^0 & r_3^0 & r_4^0 & \overline{r_1^0} & \overline{r_2^0} & \overline{r_3^0} & \overline{r_4^0} \\ h_1^0 & h_2^0 & h_3^0 & h_4^0 & \overline{h_1^0} & \overline{h_2^0} & \overline{h_3^0} & \overline{h_4^0} \end{pmatrix},$$

Δ_k — определитель, получаемый из Δ после удаления третьей строки и k -го столбца.

2. Определение комплексных потенциалов. Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4]:

$$z_k = x + \mu_k y = z_{kl} + R_{kl}(\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}). \quad (2.1)$$

Здесь

$$R_{kl} = [a_l(\cos \alpha_l + \mu_k \sin \alpha_l) + ib_l(\sin \alpha_l - \mu_k \cos \alpha_l)]/2, \\ m_{kl} = [a_l(\cos \alpha_l + \mu_k \sin \alpha_l) - ib_l(\sin \alpha_l - \mu_k \cos \alpha_l)]/(2R_{kl}),$$

α_l — угол ориентации большей полуоси эллипса, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. Тогда функции $\Phi_{kl}(z_k)$, голоморфные вне эллипсов L_{kl} , в конформно отображенных областях будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} :

$$\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \zeta_{kl}^{-n}. \quad (2.2)$$

Подставляя разложения (2.2) в функции (1.4), с учетом (2.1), (1.6) для комплексных потенциалов и их производных получаем

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L D_k Q_l \ln \zeta_{kl} + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \\ \Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^L \frac{D_k Q_l \zeta_{kl}}{R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) \quad (k = \overline{1, 4}),$$

где $\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}$; $\varphi'_{kln}(z_k) = -n/[\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})]$; a_{kln} — неизвестные постоянные, которые определяются из граничных условий на контурах области S .

Таким образом, задача сводится к нахождению неизвестных постоянных c_{k0} и a_{kln} , а также суммарных потоков электрической индукции Q_l . Неизвестные величины будем находить методом наименьших квадратов. Для этого, используя (1.1), (1.2), а также замечая,

что в данном случае комбинацию постоянных функций $\Phi_k(z_k)$ целесообразно объединить в одну, представим функционал в виде

$$I = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left[2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_{km}) \right]^2 + \sum_{m=1}^M \left[c_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{k3}^0 (\Phi_k(t_{km}) - c_{k0}) - (\varphi_l - \varphi_0) \right]^2. \quad (2.3)$$

Здесь t_m ($m = \overline{1, M}$) — точки на контурах отверстий, для которых составляется квадрат невязки между левой и заданной правой частями граничных условий (1.1), (1.2); $c_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{k3}^0 c_{k0}$; знак “*” означает отсутствие члена при $i = 3$.

Из условий минимума функционала (2.3) $\partial I / \partial a_{kln} = 0$, $\partial I / \partial c_0 = 0$, $\partial I / \partial Q_l = 0$ получаем систему линейных алгебраических уравнений, в результате решения которой неизвестные постоянные, а следовательно, и комплексные потенциалы будут найдены. По известным формулам [1, 2] можно вычислить основные характеристики ЭМУС в любой точке пластины:

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\ (D_x, D_y, E_x, E_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k), \\ (B_x, B_y, H_x, H_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, -h_k^0, -\mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k), \\ (u, v, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0), \end{aligned}$$

а в случае трещин, кроме того, коэффициенты интенсивности напряжений k_1, k_2 , электрической k_D и магнитной k_B индукций, напряженностей полей k_E, k_H [1, 5]:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k} \sin^2 \varphi_l + \lambda_{2k} \cos^2 \varphi_l - 2\lambda_{6k} \sin \varphi_l \cos \varphi_l) M_k, \\ k_2 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [(\lambda_{2k} - \lambda_{1k}) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \lambda_{6k} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_k, \\ k_D &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\lambda_{8k} \cos \varphi_l - \lambda_{7k} \sin \varphi_l] M_k, & k_E &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\mu_k r_k^0 \cos \varphi_l - r_k^0 \sin \varphi_l] M_k, \\ k_B &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\lambda_{10k} \cos \varphi_l - \lambda_{9k} \sin \varphi_l] M_k, & k_H &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\mu_k h_k^0 \cos \varphi_l - h_k^0 \sin \varphi_l] M_k, \\ M_k &= \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left(A_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right). \end{aligned}$$

Постоянные материалов М1, М2 ($\alpha = 10^3$ МПа, $\beta = 1$ МКл/м², $\gamma = 1$ МВб/м²,

Материал	$c_{11}^{EH} = c_{33}^{EH}$	c_{22}^{EH}	$c_{12}^{EH} = c_{23}^{EH}$	c_{13}^{EH}	$c_{44}^{EH} = c_{66}^{EH}$	c_{55}^{EH}	$e_{21}^{\varepsilon,E} = e_{23}^{\varepsilon,E}$	$e_{22}^{\varepsilon,E}$
М1	$2,26\alpha$	$2,16\alpha$	$1,24\alpha$	$1,25\alpha$	$0,44\alpha$	$0,55\alpha$	$-2,20\beta$	$-9,30\beta$
М2	$74,10\alpha$	$83,60\alpha$	$39,30\alpha$	$45,20\alpha$	$13,20\alpha$	$17,40\alpha$	$-0,16\beta$	$0,35\beta$

3. Анализ результатов численных исследований. Численные исследования проведены для случая пластины с двумя отверстиями, на контурах которых заданы потенциалы φ_1 и φ_2 . Считалось, что на бесконечности электрическая и магнитная индукции поля равны нулю. В качестве материала пластины рассматривались феррит-пьезоактивные композиты М1 и М2, физико-механические постоянные которых приведены в табл. 1 (c_{ij}^{EH} ($i, j = \overline{1, 6}$) — коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных напряжениях электромагнитного поля; $e_{ki}^{\varepsilon,E}$, $f_{ki}^{\mu,H}$ ($k = \overline{1, 3}$, $i = \overline{1, 6}$) — пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули упругости и индукции, измеренные при постоянных деформациях и напряженностях; $\varepsilon_{kl}^{\varepsilon}$, μ_{kl}^{μ} , β_{kl}^{ε} ($k = \overline{1, 3}$, $l = \overline{1, 3}$) — коэффициенты электрической, магнитной и электромагнитной проницаемостей, измеренные при постоянных деформациях) [2, 6].

В табл. 2 для некоторых точек контура левого отверстия в пластине с двумя одинаковыми круговыми отверстиями (рис. 1, а) радиусом r приведены значения нормальных напряжений σ_s и магнитной индукции B_s на площадках, перпендикулярных контурам, электрической индукции D_n и электрической напряженности E_n на площадках, касательных к контурам, а также плотности внутренней энергии U в зависимости от отношения c/r (c — расстояние между отверстиями). В точках A и C напряжения σ_s и магнитная индукция B_s равны нулю, поэтому в табл. 2 они не приводятся. Заметим, что основные характеристики ЭМУС для точек правого контура и соответствующие характеристики для симметричных точек левого контура равны по величине и противоположны по знаку.

Из табл. 2 и других полученных результатов следует, что расстояние между отверстиями оказывает значительное влияние на основные характеристики ЭМУС и плотность внутренней энергии. Так, при уменьшении отношения c/r от 1,0 до 0,1 значения напряжений изменяются в 40 раз, индукции и напряженности поля — в 10 раз, а плотности потенциальной энергии — более чем в 100 раз. Также на основные характеристики ЭМУС существенное влияние оказывают физико-механические свойства материала. Значения D_n в пластине из материала М1, у которого диэлектрические постоянные больше, в 100 раз превышают значения, полученные для пластины из материала М2. В то же время значения диэлектрических постоянных практически не влияют на напряженность электрического поля.

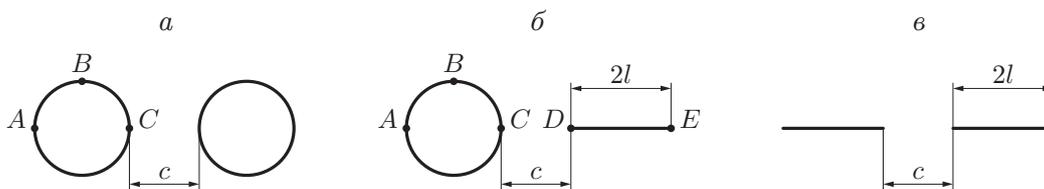


Рис. 1. Конфигурации пластин:

а — пластина с двумя отверстиями; б — пластина с отверстием и трещиной; в — пластина с двумя трещинами

Таблица 1

$\delta = 10^{-3}$ МКл/(МН·м²), $\lambda = 10^{-4}$ МГн/м, $\xi = 10^{-6}$ МН·с/(МВ·МКл)

$e_{16}^{\varepsilon,E} = e_{34}^{\varepsilon,E}$	$f_{21}^{\varepsilon,H} = f_{23}^{\varepsilon,H}$	$f_{22}^{\varepsilon,H}$	$f_{16}^{\varepsilon,H} = f_{34}^{\varepsilon,H}$	$\varepsilon_{11}^{\varepsilon} = \varepsilon_{33}^{\varepsilon}$	$\varepsilon_{22}^{\varepsilon}$	$\mu_{11}^{\varepsilon} = \mu_{33}^{\varepsilon}$	μ_{22}^{ε}	$\beta_{11}^{\varepsilon} = \beta_{33}^{\varepsilon}$	β_{22}^{ε}
5,80 β	290,20 γ	350,00 γ	275,00 γ	5,65 δ	6,35 δ	2,97 λ	0,84 λ	5,37 ξ	2737,50 ξ
-0,14 β	580,30 γ	699,70 γ	550,00 γ	0,08 δ	0,09 δ	0,05 λ	0,10 λ	-36126,80 ξ	-2,47 ξ

В табл. 3 для пластины с круговым отверстием и трещиной длиной $2l$ (см. рис. 1,б) приведены значения тех же величин, что и в табл. 2, в зависимости от отношения c/l (c — расстояние между отверстием и трещиной). Считалось, что радиус отверстия равен половине длины трещины. На концах трещины все коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности, кроме k_2 (коэффициента интенсивности касательных напряжений τ_{xy}), равны нулю, поэтому в табл. 3 они не приведены. Из табл. 3 следует, что при сближении трещины с отверстием закономерности изменения ЭМУС вблизи отверстия такие же, как и в случае пластины с двумя отверстиями. При этом существенно изменяются значения коэффициента интенсивности k_2 (более чем в пять раз) на концах трещины, особенно на ближайшем к отверстию.

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента k_2 для материалов М1 и М2 от отношения c/l (c — расстояние между трещинами) в концах левой трещины для пластины с двумя одинаковыми трещинами длиной $2l$, расположенными вдоль одной прямой (см. рис. 1,в). Видно, что по мере сближения трещин значения коэффициента k_2 возрастают по модулю. На значения k_2 существенное влияние оказывают физико-механические свойства материала. Так, для материала М1 максимальные значения этого коэффициента в десятки раз больше, чем для материала М2.

Таким образом, задание на контурах многосвязной пьезопластины разных потенциалов приводит к появлению вблизи контуров достаточно больших напряжений, а при наличии трещин — и больших значений коэффициентов интенсивности напряжений, индукции

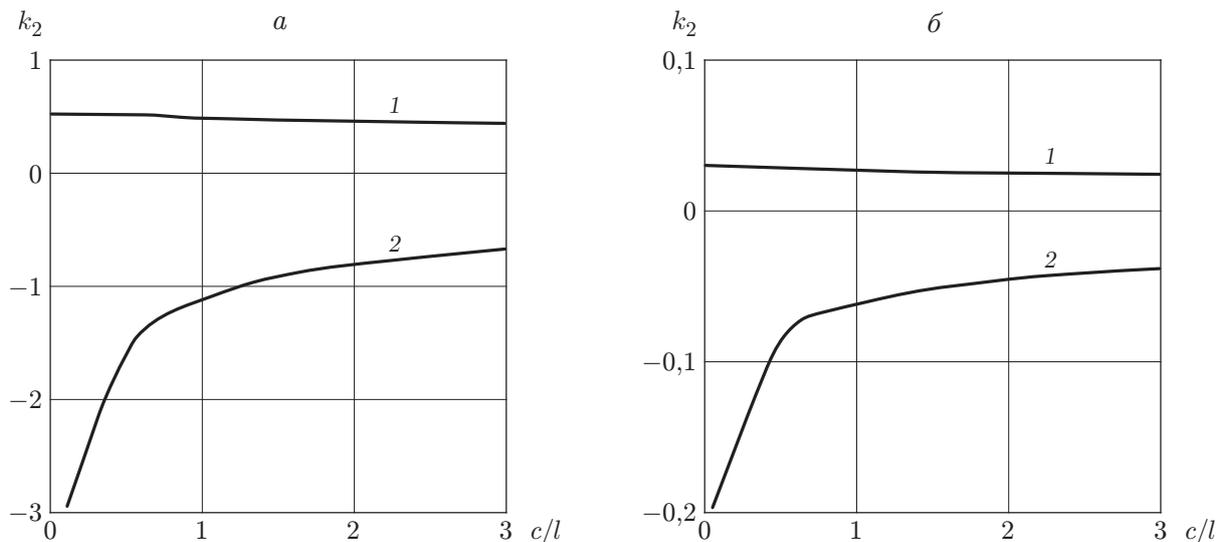


Рис. 2. Зависимость коэффициента интенсивности k_2 от отношения c/l в левом (1) и правом (2) концах левой трещины в случае пластины с двумя трещинами: a — материал М1, b — материал М2

Таблица 2

Характеристики ЭМУС материалов пластин с двумя отверстиями

c/r	A			B					C		
	$D_n \cdot 10^4$, МКл/М ²	E_n , МВ/М	$U \cdot 10^4$, МДж/М ³	σ_s , МПа/М ²	$D_n \cdot 10^4$, МКл/М ²	E_n , МВ/М	$B_s \cdot 10^2$, МГл	$U \cdot 10^4$, МДж/М ³	$D_n \cdot 10^4$, МКл/М ²	E_n , МВ/М	$U \cdot 10^4$, МДж/М ³
	М1										
100	-7,100	-0,111	0,300	0,500	-7,200	-0,102	0,001	0,300	-7,400	-0,115	0,400
10	-11,400	-0,179	1,000	0,904	-13,300	-0,187	0,024	1,200	-15,800	-0,248	2,000
2	-14,800	-0,231	1,700	1,281	-21,900	-0,307	0,061	3,400	-42,800	-0,669	14,300
1	-15,700	-0,245	1,900	1,230	-25,900	-0,360	0,058	4,600	-75,100	-1,173	44,000
0,5	-16,300	-0,254	2,100	0,965	-29,000	-0,402	0,047	5,800	-139,100	-2,173	151,100
0,1	-19,700	-0,309	3,000	0,031	-30,100	-0,412	0,032	6,200	-660,900	-10,326	3411,900
	М2										
100	-0,048	-0,225	0,005	0,009	-0,048	-0,059	0,002	0,001	-0,049	-0,232	0,005
10	-0,078	-0,367	0,014	0,017	-0,087	-0,093	0,027	0,004	-0,100	-0,471	0,024
2	-0,106	-0,500	0,027	0,030	-0,144	-0,154	0,102	0,011	-0,238	-1,123	0,134
1	-0,118	-0,554	0,033	0,039	-0,172	-0,184	0,133	0,016	-0,383	-1,792	0,341
0,5	-0,128	-0,611	0,040	0,037	-0,199	-0,212	0,165	0,022	-0,630	-2,982	0,940
0,1	-0,153	-0,770	0,063	-0,072	-0,243	-0,255	0,085	0,032	-2,362	-11,618	14,303

Таблица 3

Характеристики ЭМУС материалов пластин с отверстием и трещиной

c/r	A			B				C				D	E
	$D_n \cdot 10^4$, МКл/м ²	E_{n1} , МВ/м	$U \cdot 10^4$, МДж/м ³	σ_{s1} , МПа/м ²	$D_n \cdot 10^4$, МКл/м ²	E_{n1} , МВ/м	$B_s \cdot 10^2$, МГл	$U \cdot 10^4$, МДж/м ³	$D_n \cdot 10^4$, МКл/м ²	E_{n1} , МВ/м	$U \cdot 10^4$, МДж/м ³	k_2 , МПа/√м	k_2 , МПа/√м
100	-9,100	-0,142	0,600	0,633	-9,200	-0,129	0,001	0,600	-9,200	-0,144	0,700	-0,172	0,165
10	-15,200	-0,237	1,800	1,118	-16,300	-0,229	0,015	1,900	-17,900	-0,279	2,500	-0,351	0,252
2	-23,700	-0,371	4,400	1,786	-27,600	-0,387	0,044	5,300	-39,700	-0,621	12,300	-0,804	0,251
1	-30,300	-0,473	7,200	2,183	-35,000	-0,491	0,038	8,600	-62,300	-0,976	30,500	-1,186	0,170
0,5	-40,800	-0,628	12,600	2,781	-44,800	-0,627	0,021	14,000	-104,800	-1,638	85,900	-1,698	-0,001
0,1	-80,000	-1,250	50,100	5,453	-80,900	-1,135	-0,065	45,900	-451,500	-7,057	1592,300	-3,430	-0,768
100	-0,046	-0,217	0,005	0,009	-0,047	-0,050	0,001	0,005	-0,047	-0,224	0,005	-0,013	0,013
10	-0,073	-0,343	0,012	0,015	-0,081	-0,087	0,025	0,020	-0,093	-0,436	0,020	-0,025	0,021
2	-0,103	-0,483	0,025	0,025	-0,132	-0,141	0,097	0,104	-0,210	-0,990	0,104	-0,049	0,027
1	-0,125	-0,591	0,037	0,033	-0,164	-0,176	0,122	0,253	-0,328	-1,545	0,253	-0,071	0,026
0,5	-0,165	-0,775	0,064	0,044	-0,207	-0,222	0,123	0,664	-0,531	-2,501	0,664	-0,111	0,021
0,1	-0,461	-2,221	0,523	0,070	-0,479	-0,511	-0,112	8,146	-1,866	-8,813	8,146	-0,310	-0,049

M1

M2

и напряженности, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации элементов конструкций из пьезоматериалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Калоеров С. А.** Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. Донецк: Юго-Восток, 2007.
2. **Калоеров С. А., Петренко А. В.** Двумерная задача электромагнитоупругости для многосвязных сред // Мат. методы та фіз.-мех. поля. 2008. Вып. 51. С. 208–221.
3. **Калоеров С. А., Петренко А. В.** Двумерная и плоская задачи электромагнитоупругости для тел с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. 2007. Вып. 43. С. 50–62.
4. **Калоеров С. А., Горянская Е. С.** Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. Киев: А.С.К., 1998. С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т.; Т. 7).
5. **Калоеров С. А.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред // Прикл. механика. 2007. Т. 43, № 6. С. 56–62.
6. **Peng-Fei Hou, Gao-Hang Teng, Hao-Ran Chen.** Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mat. 2009. V. 41. P. 329–338.

*Поступила в редакцию 14/VII 2009 г.,
в окончательном варианте — 8/VII 2010 г.*
