

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Асимптотическое поведение решений уравнений параболического типа при неограниченном возрастании времени исследовано для разных случаев в работах [1-6]. В данной работе рассматриваются две начально-краевые задачи. Найдено решение уравнения теплопроводности с нелинейной правой частью и с нелинейным граничным условием. Показано, что в зависимости от значений начальной функции и констант, входящих в условия задачи, решение соответствующей задачи стремится либо к устойчивому стационарному решению, либо к периодическому решению. Нахождению периодических решений этих двух задач, встречающихся в различных разделах гидродинамики (диффузии, подземной гидродинамики), и исследованию асимптотического поведения соответствующих начально-краевых задач при некоторых условиях посвящены работы [7, 8].

1. Рассмотрим в промежутке  $0 < x < l$  начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

$$F(u) = \begin{cases} c & \text{при } u(x^0, t) < u_* \\ -d & \text{при } u(x^0, t) > u_{**} \end{cases} \quad (u_{**} < u_*, c > 0, d > 0) \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

Здесь  $x^0$  — некоторая внутренняя точка промежутка  $0 < x < l$ .

Легко видеть, что уравнению и граничным условиям (1.1) удовлетворяют стационарные решения

$$v(x) = \frac{c}{2a^2} x(l-x) \quad (1.2)$$

$$w(x) = -\frac{d}{2a^2} x(l-x) \quad (1.3)$$

Исследование методом малых возмущений показывает, что эти стационарные решения устойчивы.

Будем считать для определенности, что при  $\varphi(x^0) < u_*$   $F(u) = c$ , а при  $\varphi(x^0) > u_{**}$   $F(u) = -d$ . Тогда решение задачи (1.1) до некоторого момента времени будет описываться выражениями

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n \exp(-\lambda_n^2 t) - c\alpha_n [1 - \exp(-\lambda_n^2 t)]\} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (1.4)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{D_n \exp(-\lambda_n^2 t) + d\alpha_n [1 - \exp(-\lambda_n^2 t)]\} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (1.5)$$

Формула (1.4) имеет место при  $\varphi(x^0) < u_*$ , (1.5) — при  $\varphi(x^0) > u_{**}$ .

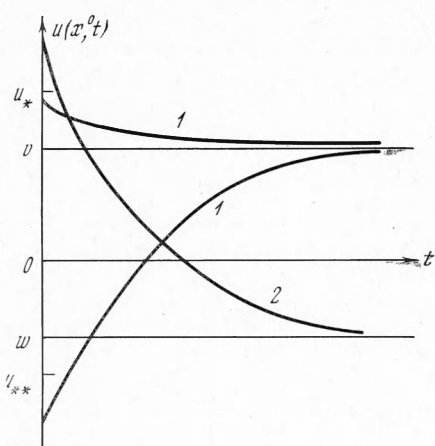
Здесь, как и в работе [7], введены обозначения

$$\lambda_n = \frac{\pi a n}{l}, \quad \alpha_n = \frac{2l^2 [(-1)^n - 1]}{a^2 \pi^3 n^3} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

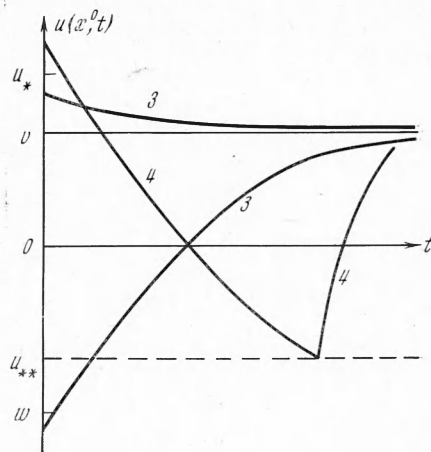
где  $C_n$  и  $D_n$  — коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$ , которую считаем удовлетворяющей условиям Дирихле

$$C_n = D_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (1.7)$$

Нетрудно убедиться, что при стремлении времени  $t$  к бесконечности решение  $u_1(x, t)$ , определенное формулой (1.4), стремится к  $v(x)$ , решение  $u_2(x, t)$  (1.5) — к  $w(x)$ . Таким образом, если  $\varphi(x^0) < v(x^0) < u_*$ , то при



Фиг. 1



Фиг. 2

неограниченном возрастании времени  $t$  решение (1.4) стремится к стационарному решению  $v(x)$ . Аналогично, если  $\varphi(x^0) > u_*$  и  $w(x^0) > u_{**}$ , то (1.5) стремится к стационарному решению  $w(x)$ . Можно видеть, что в зависимости от соотношений между величинами  $u_*$ ,  $u_{**}$ ,  $v(x^0)$  и  $w(x^0)$  осуществляется один из четырех случаев поведения решения задачи (1.1).

Примерный вид зависимости  $u(x^0, t)$  для этих случаев представлен соответственно на фиг. 1—4.

1°.  $u_{**} < w(x^0) < v(x^0) < u_*$ .

Если  $\varphi(x^0) < u_*$ , решение описывается формулой (1.4). При  $t \rightarrow \infty$   $u_1(x, t) \rightarrow v(x)$ , т. е. решение стремится к стационарному решению (1.2) (фиг. 1, кривые 1) (во всяком случае, если  $\varphi(x^0) < v(x^0)$ ).

При  $\varphi(x^0) > u_*$  решение описывается формулой (1.5). При  $t \rightarrow \infty$   $u_2(x, t) \rightarrow w(x)$ , т. е. решение стремится к стационарному решению (1.3) (фиг. 1, кривая 2).

2°.  $w(x^0) < u_{**} < v(x^0) < u_*$ .

Для  $\varphi(x^0) < u_*$  решение описывается формулой (1.4). При  $t \rightarrow \infty$   $u_1(x, t) \rightarrow v(x)$  (фиг. 2, кривые 3).

Если  $\varphi(x^0) > u_*$ , решение описывается формулой (1.5) ( $u_2(x, t)$ ) до момента времени  $t = T_1$ , когда  $u_2(x^0, T_1) = u_{**}$ . Начиная с момента  $t = T_1$  решение описывается формулой (1.4) ( $u_1(x, t)$ ), в которой  $t$  следует заменить на  $t - T_1$ , а  $C_n$  — коэффициенты Фурье функции  $u_2(x, T_1)$ , где

$u_2(x, t)$  дано выражением (1.5). При  $t \rightarrow \infty u_1(x, t) \rightarrow v(x)$  (фиг. 2, кривая 4).

3°.  $u_{**} < w(x^0) < u_* < v(x^0)$ .

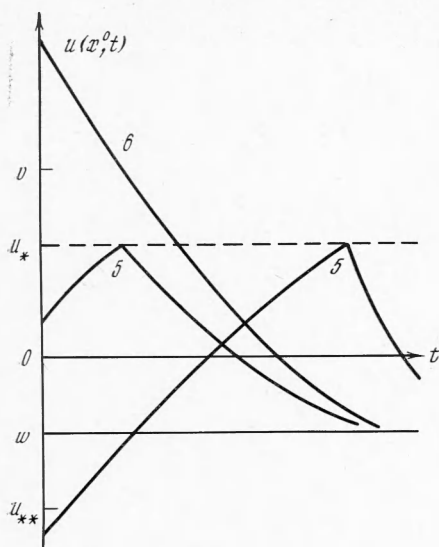
В случае  $\varphi(x^0) < u_*$  решение описывается формулой (1.4) ( $u_1(x, t)$ ) до момента  $t = T_1$ , когда  $u_2(x^0, T_1) = u_{**}$ . Начиная с момента  $T_1$  решение описывается выражениями (1.5) ( $u_2(x, t)$ ), где нужно  $t$  заменить на  $t - T_1$ , а  $D_n$  — коэффициенты Фурье функции  $u_1(x, T_1)$ . При  $t \rightarrow \infty u_2(x, t) \rightarrow w(x)$  (фиг. 3, кривые 5).

Если  $\varphi(x^0) > u_*$ , решение описывается формулой (1.5) ( $u_2(x, t)$ ). При  $t \rightarrow \infty u_2(x, t) \rightarrow w(x)$  (фиг. 3, кривая 6).

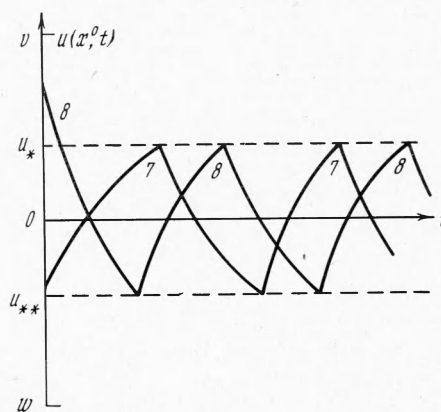
Возможны еще две картины, аналогичные описанным выше.

4°.  $w(x^0) < u_{**} < u_* < v(x^0)$ .

При  $\varphi(x^0) < u_*$  решение описывается формулой (1.4) до момента  $t = T_1$ , когда  $u_1(x^0, T_1) = u_*$ , затем формулой (1.5), пока не будет  $t = T_2$ , где  $u_2(x^0, T_2) = u_{**}$  и т. д. Следовательно, решение имеет колебательный характер. В работе [7] выписано это решение и при некоторых ограниче-



Фиг. 3



Фиг. 4

ниях показано, что при  $w(x^0) < u_{**} < u_* < v(x^0)$  оно стремится к периодическому (фиг. 4, кривая 7).

Для  $\varphi(x^0) > u_*$  решение снова имеет колебательный характер, описываясь то формулой (1.5), то формулой (1.4), и при безграничном росте времени  $t$  стремится к периодическому (фиг. 4, кривая 8).

Таким образом, при стремлении времени  $t$  к бесконечности решение начально-краевой задачи стремится либо к одному из двух устойчивых стационарных решений, либо к периодическому решению, найденному в работе [7]. Следовательно, имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний.

В работах [9, 10] рассмотрены периодические решения релейных систем с распределенными параметрами.

2. Рассмотрим теперь в промежутке  $-l < x < 0$  другую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u(-l, t)}{\partial x} = F[u(-l, t)], \quad u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.1)$$

Здесь  $F(u)$  — трехзначная  $S$ -образная функция

$$F(u) = \begin{cases} hu + q_1 & \text{при } u < u_* \\ f(u) & \text{при } u_{**} < u < u_* \\ hu + q_2 & \text{при } u > u_{**} \end{cases} \quad (2.2)$$

$(u_* > u_{**}, q_2 > q_1, h \geq 0)$

где  $f(u)$  — непрерывная функция с отрицательной производной  $f'(u) < 0$ , такая, что  $f(0) = 0$ ,  $f(u_*) = hu_* + q_1$ ,  $f(u_{**}) = hu_{**} + q_2$ . (Здесь и в дальнейшем штрих означает производную.)

Задача (2.1), (2.2) имеет следующие стационарные решения:

$$u \equiv 0, \quad u = A_i x \quad (u_{**} \leq -A_i l \leq u_*, \quad i = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$v(x) = q_1 x / (1 + hl) \quad (2.4)$$

$$w(x) = q_2 x / (1 + hl) \quad (2.5)$$

При этом  $A_i$  — корни уравнения

$$A_i = f(-A_i l)$$

Нетрудно видеть, что стационарные решения (2.4) и (2.5) устойчивы.

Стационарные решения (2.3) соответствуют ветви  $F(u) = f(u)$ . При этом, как и для случая  $u \equiv 0$  [11], решение  $u = A_i x$  устойчиво, если выполняется неравенство  $-lf'(-A_i l) < 1$ , и неустойчиво, если  $-lf'(-A_i l) > 1$ . В самом деле, исследование устойчивости стационарного решения  $u = A_i x$  в силу (2.1), (2.2) сводится к отысканию возмущений  $u'(x, t)$  вида  $e^{\lambda_n t} \psi_n(x)$  и к решению уравнения

$$a^2 \psi_n''(x) = \lambda_n \psi_n(x) \quad (2.6)$$

с граничными условиями

$$\psi_n'(-l) = f'(-A_i l) \psi_n(-l), \quad \psi_n(0) = 0 \quad (2.7)$$

для определения функции  $\psi_n(x)$ . Уравнению (2.6) и второму условию (2.7) удовлетворяют функции  $\psi_n(x) = \sin \omega_n x$  и  $\psi(x) = \text{sh } \Omega x$ . В первом случае из (2.6) и (2.7) получаем следующие уравнения для нахождения величин  $\omega_n$  и  $\lambda_n$ :

$$\text{tg } \omega_n l = -\frac{\omega_n}{f'(-A_i l)}, \quad \lambda_n = -a^2 \omega_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

во втором случае имеем

$$\text{th } \Omega l = -\frac{\Omega}{f'(-A_i l)}, \quad \lambda = a^2 \Omega^2 \quad (2.9)$$

Таким образом, в первом случае выполняется неравенство  $\lambda_n < 0$  (решение устойчиво), во втором случае  $\lambda > 0$  (решение неустойчиво). Из первого равенства (2.9) ясно, что неустойчивость осуществляется при условии

$$-lf'(-A_i l) > 1 \quad (2.10)$$

В частности, для стационарного решения  $u \equiv 0$ , которое имеет место для любой функции  $f(u)$  с описанными выше свойствами, условия устойчивости и неустойчивости принимают вид

$$-lf'(0) < 1, \quad -lf'(0) > 1 \quad (2.11)$$

Остановимся теперь на случае, когда число  $s$  корней уравнения  $A = f(-Al)$  конечно, причем  $-lf'(-A_i l) \neq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Пусть для определенности выполнены следующие неравенства:

$$u_{**} < -A_1 l < -A_2 l < \dots < -A_{s-1} l < -A_s l < u_*$$

Тогда устойчивые стационарные решения будут чередоваться с неустойчивыми. Пусть стационарное решение  $u = A_i x$  неустойчиво. Тогда  $u = A_{i-1} x$  и  $u = A_{i+1} x$  устойчивы. Аналогично тому, как это было сделано для случая  $u \equiv 0$  в работе [11], можно сравнить нелинейное интегральное уравнение, к решению которого сводится начально-краевая задача (2.1), (2.2), где положено  $F(u) = f(u)$ , с соответствующим линейным интегральным уравнением, для которого  $F(u) = A_i - l^{-1}(u + A_i l)$ .

Оказывается, что, если  $-A_{i-1} l < \varphi(-l) < -A_i l$ , то при  $t \rightarrow \infty$  решение нелинейной задачи стремится к  $A_{i-1} x$ . Если  $-A_i l < \varphi(-l) < -A_{i+1} l$ , решение стремится к  $A_{i+1} x$ . Если стационарное решение  $u = A_s x$  устойчиво и  $-A_s l < \varphi(-l) < u_*$ , то решение задачи стремится к  $A_s x$ . Аналогично этому, если  $u = A_1 x$  устойчиво и  $u_{**} < \varphi(-l) < -A_1 l$ , то решение стремится к  $A_1 x$ . Если же стационарное решение  $A_s x$  неустойчиво и  $-A_s l < \varphi(-l) < u_*$ , то через конечный промежуток времени  $T_1$  функция  $u(-l, t)$  достигнет значения  $u_*$ . Аналогично, если стационарное решение  $u = A_1 x$  неустойчиво, то при  $u_{**} < \varphi(-l) < -A_1 l$  в момент  $T_1$  функцией  $u(-l, t)$  будет достигнуто значение  $u_{**}$ . Начиная с этого момента времени, функция  $F(u)$ , входящая в граничное условие, будет принимать значения либо  $hu + q_1$ , либо  $hu + q_2$ . Ветвь  $F(u) = f(u)$  теперь не нужно принимать во внимание. Решение задачи (2.1), (2.2) описывается выражениями

$$u_1(x, t) = \frac{q_1 x}{1 + hl} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin \alpha_n x \quad (2.12)$$

$$u_2(x, t) = \frac{q_2 x}{1 + hl} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin \alpha_n x \quad (2.13)$$

где  $\lambda_n$  — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_n l}{a} = -\frac{\lambda_n}{ah} \quad \left( \alpha_n = \frac{\lambda_n}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \right) \quad (2.14)$$

$C_n$  и  $D_n$  — коэффициенты Фурье функций  $\varphi(x) = q_1 x / (1 + hl)$  и  $\varphi(x) = -q_2 x / (1 + hl)$  соответственно [8], при этом в формулах (2.12) и (2.13) нужно за начальный момент времени  $t = 0$  принять момент  $t = T_1$ , а за начальную функцию  $\varphi(x)$  — функцию  $u(x, T_1)$ . Здесь  $u(x, t)$  — решение задачи (2.1), (2.2) для ветви  $F(u) = f(u)$ . Если  $-A_s l < \varphi(-l) < u_*$ , воспользуемся формулой (2.13), если же  $u_{**} < \varphi(-l) < -A_1 l$  — формулой (2.12).

Если рассматриваются ветви  $F(u) = hu + q_j$  ( $j = 1, 2$ ) функции  $F(u)$ , то будем снова считать для определенности, что при  $\varphi(-l) < u_*$  имеет место решение (2.12), а при  $\varphi(-l) > u_*$  — решение (2.13).

Как и для первой задачи, если  $\varphi(-l) < v(-l) < u_*$ , то при  $t \rightarrow \infty$   $u_1(x, t) \rightarrow v(x)$ ; если  $\varphi(-l) > u_*$  и  $w(-l) > u_{**}$ , то при  $t \rightarrow \infty$   $u_2(x, t) \rightarrow w(x)$ . Таким образом, если положить  $x^2 = -l$ , то при  $t \rightarrow \infty$  решение задачи (2.1), (2.2) либо стремится к одному из устойчивых стационарных решений (2.3), либо для задачи сохраняются все возможные кар-

