УДК 519.632, 519.853.2

Двойственный метод для решения задачи о равновесии тела, содержащего тонкий дефект*

А.В. Жильцов[1], Н.Н. Максимова[2]

[1]Дальневосточный государственный университет путей сообщения, ул. Серышева, 47, Хабаровск, 680021

[2]Амурский государственный университет, Игнатьевское шоссе, 21, Благовещенск, 675000

E-mails: egrevid@gmail.com (Жильцов А.В.), maksimova.nn@amursu.ru (Максимова Н.Н.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 16, 2023.

Жильцов А.В., Максимова Н.Н. Двойственный метод для решения задачи о равновесии тела, содержащего тонкий дефект // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 183–198.

Рассматривается задача о двумерном теле с тонким дефектом, свойства которого характеризуются параметром разрушения. Проводится дискретизация задачи и доказывается теорема о точности аппроксимации. Для решения задачи применяется двойственный метод, основанный на модифицированном функционале Лагранжа. В вычислительных экспериментах при решении прямой задачи используется обобщенный метод Ньютона с выбором шага, удовлетворяющего условию Армихо.

DOI: 10.15372/SJNM20230205

Ключевые слова: *тело с дефектом, метод конечных элементов, методы двойственности, функционалы Лагранжа, обобщенный метод Ньютона, условие Армихо.*

Zhiltsov A.V., Maksimova N.N. A dual method for solving the equilibrium problem of a body containing a thin defect // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 183–198.

An equilibrium problem of a two-dimensional body with a thin defect whose properties are characterized by a fracture parameter is considered. The problem is discretized, and an approximation accuracy theorem is proved. To solve the problem, a dual method based on a modified Lagrange functional is used. In computational experiments, when solving the direct problem, a generalized Newton's method is used with a step satisfying Armijo's condition.

Keywords: *body with defect, finite element method, duality methods, Lagrange functionals, generalized Newton's method, Armijo's condition.*

Введение

В настоящее время интенсивно развивается направление, связанное с моделированием и исследованием задач о равновесии упругих тел с тонкими включениями и трещинами. Математическая постановка соответствующей задачи существенно зависит от характера моделирования тонкого включения и вида краевых условий на берегах трещин. Классический подход для описания задач теории трещин приводит к тому, что на берегах

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001-8).

трещины задаются краевые условия типа равенств [1]. Линейные краевые условия соответствуют нулевым напряжениям на берегах, что не исключает возможности проникновения берегов трещины друг в друга. Естественными с точки зрения механики являются модели с нелинейными (в виде неравенств) краевыми условиями на берегах трещины, которые обспечивают взаимное непроникновение берегов трещины [2]. В работе [3] представлена систематизация математических моделей в задачах равновесия упругих тел с тонкими включениями при наличии отслоений.

Математические модели задач о равновесии тел с дефектами допускают вариационную постановку в виде минимизации функционала потенциальной энергии на замкнутом выпуклом подмножестве исходного гильбертова пространства и в виде вариационного неравенства. Экстремальная постановка позволяет применить эффективные методы двойственности и свести задачу отыскания решения исходной задачи к задаче поиска седловой точки соответствующего функционала Лагранжа [4–6]. Актульной является разработка эффективных численных алгоритмов решения указанных вариационных задач. Для получения приближенных решений используется конечно-элементная аппроксимация [7, 8].

В данной работе проводится исследование задачи о равновесии упругого тела с тонким дефектом; строится схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа. Данный подход рассматривается в работах [9–18]. Доказывается теорема о точности конечно-элементной аппроксимации для случая квадратной области, приводятся численные примеры.

1. Описание модели

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область с липшицевой границей Γ. В области имеется дефект $\overline{\gamma_0} \subset \Omega$, представляющий собой гладкую кривую без самопересечений. Обозначим $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к γ_0, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — касательный вектор, $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\gamma_0}$. Область Ω_0 представляет собой область, занятую эластичным материалом, γ_0 соответствует дефекту в материале.

Через $v = (v_1, v_2)$ обозначим векторное поле перемещений. Полагая перемещения малыми, определим компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(v) = a_{ijkm}\varepsilon_{km}(v)$, где $i, j, k, m = 1, 2$, и используем правило суммирования по повторяющимся индексам. Для компонент a_{ijkm} тензора упругости A выполняется свойство симметрии $a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij}$, и существует такая константа $a_0 > 0$, что всюду в Ω_0 справедлива оценка $a_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \geqslant a_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ для любых ε_{ij}.

Краевая задача о равновесии тела Ω_0 и дефекта γ_0 формулируется следующим образом. Для данных объемных сил $f = (f_1, f_2) \in L_2(\Omega)^2$, действующих на тело, требуется найти поле перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, i, j = 1, 2$, определенные в Ω_0, такие что выполняется система равенств и неравенств:

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{2}$$

$$[u_\nu] \geqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \tag{3}$$

$$-\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu] \geqslant 0, \quad -\sigma_\tau + \frac{1}{\delta}[u_\tau] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0, \tag{4}$$

$$[u_\nu]\Big(-\sigma_\nu+\frac{1}{\delta}[u_\nu]\Big)=0 \quad \text{на} \quad \gamma_0. \tag{5}$$

Здесь $[\varphi]=\varphi^+-\varphi^-$ — скачок функции φ на γ_0, обозначение $\varphi^\pm$ используется для следов функции φ на берегах дефекта $\gamma_0^\pm$. Знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям вектора нормали ν; $\sigma\nu=(\sigma_{1j},\sigma_{2j})$, $\sigma_\nu=\sigma_{ij}\nu_i\nu_j$, $\sigma_\tau=\sigma\nu\cdot\tau$, $u_\nu=u\nu$, $u_\tau=u\tau$.

Соотношения (1) представляют собой уравнение равновесия для упругого тела и закон Гука. Для простоты на внешней границе Γ задано условие закрепления (2), в целом же результаты справедливы и для условий типа Синьорини. Первое неравенство в (3) накладывает запрет на проникновение берегов дефекта друг в друга. Если в некоторой точке нет контакта берегов, т.е. $[u_\nu]>0$, то из (5) следует, что $-\sigma_\nu+\frac{1}{\delta}[u_\nu]=0$ в этой точке. С другой стороны, если $-\sigma_\nu+\frac{1}{\delta}[u_\nu]>0$, то контакт есть, т.е. $[u_\nu]=0$.

Параметр разрушения $\delta>0$ описывает свойства дефекта. В работе [19], где описана данная модель, проводится анализ задачи при фиксированном δ и при $\delta\to 0,\infty$. Крайний случай при $\delta\to 0$ соответствует задаче без дефекта. В случае $\delta\to\infty$ задача превращается в задачу с трещиной, описанную в [2]. Численное моделирование такой задачи можно найти в [20] и с использованием модифицированных функционалов Лагранжа в [17, 20].

Задача (1)–(5) представима в вариационном виде. Для этого введем пространство

$$H^1_\Gamma(\Omega_0)=\{v\in H^1(\Omega_0)\colon v=0 \text{ на } \Gamma\}$$

и функционал энергии

$$\Pi(v)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sigma(v)\varepsilon(v)\,d\Omega-\int\limits_{\Omega_0} fv\,d\Omega+\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma_0}[v]^2\,d\Gamma.$$

Для упрощения записей здесь и далее (где это не приводит к недоразумению) будем использовать обозначения типа $H^1_\Gamma(\Omega_0)$ вместо $H^1_\Gamma(\Omega_0)^2$. Кроме того, свертку тензоров $\sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)$ обозначим через $\sigma(v)\varepsilon(v)$, а $fv=f_iv_i$.

Пусть K_0 — множество допустимых перемещений:

$$K_0=\big\{v\in H^1_\Gamma(\Omega_0)\colon [v_\nu]\geqslant 0 \text{ на } \gamma_0\big\},$$

которое, очевидно, является выпуклым. В таком случае рассматриваемая задача представима в виде задачи минимизации функционала

$$\inf_{v\in K_0}\Pi(v). \tag{6}$$

Эта задача имеет единственное решение $u\in K_0$, удовлетворяющее вариационному неравенству

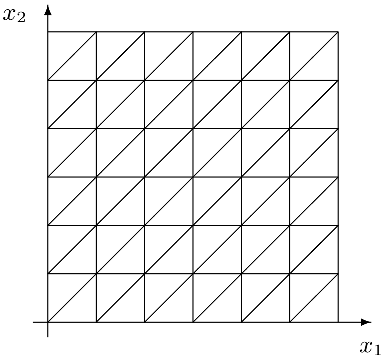
$$\int\limits_{\Omega_0}\sigma(u)\varepsilon(v-u)d\Omega-\int\limits_{\Omega_0} f(v-u)d\Omega+\frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma_0}[u][v-u]\,d\Gamma\geqslant 0 \quad \forall v\in K_0. \tag{7}$$

Разрешимость следует из коэрцитивности функционала $\Pi(\cdot)$ на множестве K_0 и слабой полунепрерывности снизу в $H^1_\Gamma(\Omega_0)$ [19, 21].

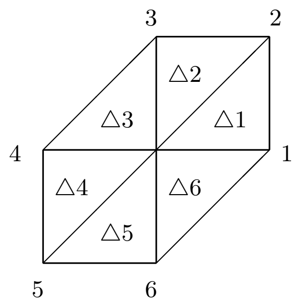
2. Аппроксимация задачи

Пусть моделируемое тело Ω является квадратом; дефект γ_0 представляет собой прямолинейный отрезок, параллельный оси Ox_1. Нормальный и касательный векторы на γ_0 сонаправлены с координатными осями: $\nu = (0, 1)$, $\tau = (1, 0)$.

Триангуляцию области осуществим с помощью равномерной сетки (рисунок 1) из равнобедренных прямоугольных треугольников с диагональю h. Для большинства узлов связанные с ними конечные элементы состоят из шести прилегающих к ним треугольников. В каждом конечном элементе используются кусочно-линейные базисные функции $\varphi(x_1, x_2)$, на которых строится линейная оболочка V^h, аппроксимирующая пространство $H^1_\Gamma(\Omega_0) = \{v \in H^1(\Omega_0) \colon v_1 = v_2 = 0 \text{ на } \Gamma\}$ [7, с. 110].



а) Разбиение области



б) Обозначение узлов конечного элемента

Рис. 1. Триангуляция T_h

Каждому узлу, лежащему на γ_0, соответствуют два усеченных конечных элемента (для верхнего и для нижнего берегов). Соответственно в каждом из этих конечных элементов своя базисная функция и свои значения $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$, где нижний индекс — это номер конечного элемента (а не узла), а верхнее число в скобках — это номер компоненты вектора. Пусть всего имеется n конечных элементов и $2n$ компонент вектора $\mathbf{v}$, описывающего функцию $v_h = (v_h^{(1)}, v_h^{(2)})$ из линейной оболочки V^h:

$$v_h^{(1)}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \varphi_i(x_1, x_2), \qquad v_h^{(2)}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_{(n+i)} \varphi_i(x_1, x_2).$$

Сформулируем задачу об отыскании приближенного решения. Пусть K_0^h — пересечение множеств K_0 и V^h. Тогда конечно-элементным решением задачи (6) будет функция

$$u_h = \operatorname*{argmin}_{v_h \in K_0^h} \Pi(v_h),$$

удовлетворяющая также вариационному неравенству

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma(u_h)\varepsilon(v_h - u_h)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega_0} f(v_h - u_h)\, d\Omega + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\gamma_0} [u_h][v_h - u_h]\, d\Gamma \geqslant 0 \quad \forall\, v_h \in K_0^h.$$

Для компактности записей далее будем использовать обозначения

$$a(v,w)=\int\limits_{\Omega_0}\sigma(v)\varepsilon(w)\,d\Omega,\qquad (f,v)=\int\limits_{\Omega_0} fv\,d\Omega.$$

Теорема 1. *Пусть Ω — прямоугольная область в $\mathbb{R}^2$, $f\in L_2(\Omega)$, решение исходной задачи $u\in H^2_\Gamma(\Omega_0)$. Тогда имеет место оценка*

$$\|u_h-u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_0)}\leqslant C'h\|u\|_{H^2(\Omega_0)}+C''h^2\|u\|^2_{H^2(\Omega_0)},$$

где константы C', C'' не зависят от h.

Доказательство. Пусть $u_I\in V^h$ — кусочно-линейное восполнение решения u исходной задачи (6). В силу того, что трещина прямолинейная, для $u\in K_0$ гарантируется, что $u_I\in K_0^h$. Тогда для u^h будет справедливо неравенство

$$\Pi(u_h)\leqslant\Pi(u_I),$$

$$\Pi(u_h)-\Pi(u)\leqslant\Pi(u_I)-\Pi(u).\tag{8}$$

Очевидно, что разность $\Pi(u_h)-\Pi(u)$ представима в виде

$$\Pi(u_h)-\Pi(u)=a(u,u_h-u)-(f,u_h-u)+\frac{1}{\delta}\int\limits_{\gamma_0}[u][u_h-u]\,d\Gamma+\frac{1}{2}a(u_h-u,u_h-u)+$$
$$\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma_0}[u_h-u]^2\,d\Gamma.$$

Поскольку в этом представлении u — решение задачи, то в силу вариационного неравенства (7) сумма первых трех слагаемых будет неотрицательна. Тогда из неравенства (8) получим

$$\frac{1}{2}a(u_h-u,u_h-u)\leqslant\Pi(u_I)-\Pi(u).$$

Для оценки левой части в последнем неравенстве используем положительную определенность тензора модулей упругости и первое неравенство Корна для функций из $H^1_\Gamma(\Omega_0)$:

$$C_1\|u_h-u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_0)}\leqslant\Pi(u_I)-\Pi(u).$$

Преобразуем аналогично разность в правой части последнего неравенства, и первые три слагаемых обозначим как линейный функционал $L(u_I-u)=a(u,u_I-u)-(f,u_I-u)+\frac{1}{\delta}\int_{\gamma_0}[u][u_I-u]\,d\Gamma$. Приходим к неравенству

$$C_1\|u_h-u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_0)}\leqslant L(u_I-u)+\frac{1}{2}a(u_I-u,u_I-u)+\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma_0}[u_I-u]^2\,d\Gamma$$

$$\leqslant\|L\|\|u_I-u\|_{H^1(\Omega_0)}+\|A\|\|u_I-u\|^2_{H^1(\Omega_0)}+\frac{1}{2\delta}\int\limits_{\gamma_0}[u_I-u]^2\,d\Gamma.$$

В силу вложения пространств имеем $\frac{1}{2\delta}\int_{\gamma_0}[u_I - u]^2\,d\Gamma \leqslant C_2\|u_I - u\|^2_{H^1(\Omega_0)}$, поэтому получаем

$$C_1\|u_h - u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_0)} \leqslant C_3\|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)} + C_4\|u_I - u\|^2_{H^1(\Omega_0)}. \tag{9}$$

Согласно теореме 1 из [7, с. 112], для кусочно-линейного восполнения функций из H^2 можно дать следующую оценку:

$$\|u_I - u\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant ch\|u\|_{H^2(\Omega_0)}. \tag{10}$$

Применив данное неравенство к слагаемым правой части неравенства (9), окончательно получаем требуемую оценку точности аппроксимации задачи:

$$\|u_h - u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega_0)} \leqslant C'h\|u\|_{H^2(\Omega_0)} + C''h^2\|u\|^2_{H^2(\Omega_0)}. \qquad \square$$

Представленная выше теорема позволяет при достаточно малых $h < 1$ дать следующую оценку точности приближенных решений задачи:

$$\|u_h - u\|_{H^1_\Gamma(\Omega_0)} \leqslant Ch^{1/2}.$$

Можно перейти к более общему случаю, когда область Ω — выпуклый многоугольник. В таком случае не получится построить равномерную сетку, поэтому триангуляция будет характеризоваться двумя параметрами: минимальным из внутренних углов всех треугольников θ_0 и максимальной из сторон h. Если рассматривать систему триангуляций при $h \to 0$, являющуюся регулярной, то ее можно характеризовать только одним параметром $h > 0$ [8, с. 24]. В таком случае можно получить результаты, аналогичные теореме 1, сославшись вместо (10) на теорему 2 из [7, с. 120].

3. Двойственный метод для решения задачи

Для решения рассматриваемой задачи применим схему двойственности, основанную на модифицированном функционале Лагранжа. Это позволит снять ограничение $[v_\nu] \geqslant 0$ и проводить минимизацию функционала $\Pi(\cdot)$ на всем пространстве $H^1_\Gamma(\Omega_0)$.

Модифицированный функционал Лагранжа для задачи (6) имеет вид

$$M(v, l) = \Pi(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\gamma_0}\Big(\big((l - r[v_\nu])^+\big)^2 - l^2\Big)\,d\Gamma.$$

Здесь параметр двойственности $r > 0$ может оставаться неизменным либо меняться в определенных пределах, в отличие от метода штрафов, в котором он неограниченно возрастает.

Определение. Пара $(v^*, l^*) \in H^1_\Gamma(\Omega_0) \times L_2(\gamma_0)$ называется седловой точкой функционала $M(\cdot,\cdot)$, если выполняется двустороннее неравенство

$$M(v^*, l) \leqslant M(v^*, l^*) \leqslant M(v, l^*) \quad \forall\, v \in H^1_\Gamma(\Omega_0),\ \forall\, l \in L_2(\gamma_0).$$

В ранней работе [21] доказывается теорема о седловой точке классического функционала Лагранжа. Для выпуклых задач множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [6, 22]. Подробное доказательство можно построить по аналогии с приведенным в статье [23]. Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Если решение* u *задачи* (6) *принадлежит пространству* $H^2(\Omega_0)$, *то модифицированный функционал Лагранжа* $M(\cdot,\cdot)$ *обладает седловой точкой* $\left(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right)$ *на* $H^1_\Gamma(\Omega_0) \times L_2(\gamma_0)$, *т. е.*

$$M(u,l) \leqslant M\left(u, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right) \leqslant M\left(v, -\sigma_\nu + \frac{1}{\delta}[u_\nu]\right) \quad \forall\,(v,l) \in H^1_\Gamma(\Omega_0) \times L_2(\gamma_0).$$

Для поиска седловой точки $M(\cdot,\cdot)$ используется алгоритм Удзавы, который записывается следующим образом [17, 23]:

$$\begin{aligned} &(i) \quad u^{k+1} = \underset{v \in H^1_\Gamma(\Omega_0)}{\operatorname{argmin}}\ M(v, l^k), \\ &(ii) \quad l^{k+1} = \left(l^k - r[u_\nu^{k+1}]\right)^+. \end{aligned} \tag{11}$$

4. Описание численных экспериментов

Будем использовать следующие обозначения: n — количество всех узлов триангуляции, n_γ — количество узлов на дефекте γ. Так как область является многоугольником, обеспечено вложение пространств $V^h \subset H^1(\Omega_\gamma)$.

Для граничных интегралов на дефекте выполняем численное интегрирование по квадратурной формуле трапеций. Обозначим $\tilde{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ — матрица жесткости, $F = (f_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ — вектор-столбец правых частей. Определим целевой вектор $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{2n})$ — приближенное решение для поля перемещений в узлах сетки и $\alpha^k = (\alpha^k_1, \alpha^k_2, \ldots, \alpha^k_{n_\gamma})$ — приближение двойственной переменной l^k.

Для решения задачи минимизации конечномерной функции $\widehat{M}(t,\alpha)$ на первом шаге алгоритма Удзавы мы используем обобщенный метод Ньютона. Для этого необходимо вычислить градиент и обобщенный гессиан. Градиент $g(t)$, соответствующий функции $\widehat{M}(t,\alpha)$, принимает вид:

$$g(t) = \tilde{A}t - F + \beta(t).$$

Для удобства при $j = \overline{1, n_\gamma}$ мы введем обозначения: i^+_j, i^-_j — номера узлов, лежащих на верхнем и нижнем берегу дефекта соответственно, $\lambda_j = \alpha^k_j - r(t_{i^+_j+n} - t_{i^-_j+n})$, $(\lambda_j)^+ = \max\{0, \lambda_j\}$. Тогда коэффициенты вектора $\beta(t) = (b_i) \in \mathbb{R}^{2n}$ вычисляются следующим образом:

$$b_i(t) = \begin{cases} \dfrac{h}{\delta} \cdot t_{i^+_j}, & i \in \{i^+_j : j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ -\dfrac{h}{\delta} \cdot t_{i^-_j}, & i \in \{i^-_j : j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ \dfrac{h}{\delta} \cdot t_{i^+_j+n} - h \cdot (\lambda_j)^+, & i \in \{i^+_j + n \colon j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ -\dfrac{h}{\delta} \cdot t_{i^-_j+n} + h \cdot (\lambda_j)^+, & i \in \{i^-_j + n \colon j = \overline{1, n_\gamma}\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Гессиан $\partial g(t)$ вычисляется по формуле:

$$\partial g(t) = \tilde{A} + D(t),$$

где $D(t) = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ — симметричная разреженная матрица. Для касательных компонент целевого вектора коэффициенты матрицы принимают вид:

$$d_{i_j^+,i_j^+} = \frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^+,i_j^-} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-,i_j^+} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-,i_j^-} = \frac{h}{\delta};$$

для нормальных компонент при условии, если $\lambda_j > 0$, то

$$d_{i_j^++n,i_j^++n} = \frac{h}{\delta} + hr, \quad d_{i_j^++n,i_j^-+n} = -\frac{h}{\delta} - hr, \quad d_{i_j^-+n,i_j^++n} = -\frac{h}{\delta} - hr, \quad d_{i_j^-+n,i_j^-+n} = \frac{h}{\delta} + hr,$$

если $\lambda_j < 0$, то

$$d_{i_j^++n,i_j^++n} = \frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^++n,i_j^-+n} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-+n,i_j^++n} = -\frac{h}{\delta}, \quad d_{i_j^-+n,i_j^-+n} = \frac{h}{\delta}.$$

Алгоритм обобщенного метода Ньютона применительно к поставленной задаче в выбранных обозначениях запишется следующим способом.

1. Задается начальное значение t^0.
2. Для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно вычисляется

$$t^{m+1} = t^m - s_m(\partial g(t^m))^{-1} g(t^m),$$

   где s_m — шаг сдвига, в простейших случаях равный единице.
3. Проверяется условие

$$\frac{\|t^{m+1} - t^m\|_{V^h}}{\|t^{m+1}\|_{V^h}} < 10^{-7}.$$

Из-за положительной срезки в последнем слагаемом минимизируемой функции ее вторая производная не является непрерывной. Поэтому, несмотря на то, что функция квадратичная, метод Ньютона не приводит к решению за одну итерацию. По сути, выполнив один шаг этого метода, мы можем получить новую задачу с другим минимумом. Для того, чтобы добиться гарантированного уменьшения значения функции, будем выполнять дробление шага s до тех пор, пока не выполнится условие Армихо. Затем выполняется один шаг метода Ньютона. Поэтому на внутренних итерациях обобщенного метода Ньютона (шаг 2) выполняется следующая процедура:

2.1) задается $s = 1$;

2.2) вычисляется направление сдвига $d^m = (\partial g(t^m))^{-1} g(t^m)$;

2.3) вычисляется $t^{m+1} = t^m - s \cdot d^m$;

2.4) если $\widehat{M}(t^{m+1}, \alpha) < \widehat{M}(t^m, \alpha) + s \cdot \langle \nabla \widehat{M}(t^m, \alpha), d^m \rangle$, заканчиваем;

2.5) иначе $s = s/2$ и переход на 2.3.

На втором шаге метода Удзавы мы находим новое значение двойственной переменной

$$\alpha_j^{k+1} = (\lambda_j)^+, \quad j = \overline{1, n_\gamma}.$$

Критерием остановки для метода Удзавы является выполнение условия

$$\max_j |\alpha_j^{k+1} - \alpha_j^k| \leqslant 10^{-5}.$$

5. Численные эксперименты

Численные расчеты проведены для случая, когда Ω представляет собой единичный квадрат, а дефект $\gamma_0 = \left\{(x_1, x_2)\colon \frac{1}{4} < x_1 < \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}\right\}$, модуль упругости Юнга $E = 69000$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, параметр $r = 10^7$. Остальные параметры изменялись. Для наглядности условие закрепления (2) на всей внешней границе заменено закреплением на нижней стороне тела $\Gamma_u = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega\colon x_2 = 0\}$, а вместо объемных сил применены поверхностные к верхней стороне тела $\Gamma_f = \{(x_1, x_2) \in \partial\Omega\colon x_2 = 1\}$.

Рассмотрено три варианта распределения силы:

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -3, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -10, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f,\ x_1 < \dfrac{1}{2}, \\ +10, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f,\ x_1 > \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} +3, & (x_1, x_2) \in \Gamma_f, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Для каждого из них проведены тесты при разных значениях параметра δ. Количество итераций метода Удзавы ($k_{\text{МУ}}$) и метода Ньютона ($m_{\text{МН}}$) представлено в таблице 1. На серии рисунков 2–4 продемонстрировано деформированное состояние тела в лагранжевых координатах с увеличивающим коэффициентом 300 по обеим осям $(x + 300 \cdot u(x))$. Цветом показано распределение напряжений Мизеса — второго инварианта тензора напряжений.

Таблица 1. Количество итераций для f_1, f_2, f_3 при разных δ

	$\delta = 10^{-7}$	$\delta = 10^{-5}$	$\delta = 10^{-1}$
f_1	$k_{\text{МУ}} = 18$ $m_{\text{МН}} = 24$	$k_{\text{МУ}} = 22$ $m_{\text{МН}} = 33$	$k_{\text{МУ}} = 23$ $m_{\text{МН}} = 28$
f_2	$k_{\text{МУ}} = 22$ $m_{\text{МН}} = 24$	$k_{\text{МУ}} = 11$ $m_{\text{МН}} = 16$	$k_{\text{МУ}} = 19$ $m_{\text{МН}} = 24$
f_3	$k_{\text{МУ}} = 1$ $m_{\text{МН}} = 2$	$k_{\text{МУ}} = 1$ $m_{\text{МН}} = 2$	$k_{\text{МУ}} = 1$ $m_{\text{МН}} = 2$

В задачах с f_1 естественно, что берега дефекта остаются полностью сомкнутыми. В таком случае слагаемые с $\beta(t)$ практически всегда остаются нулевыми и не оказывают никакого влияния на решение, а параметр δ фигурирует лишь в них. Таким образом, в подобных задачах δ не влияет на решение, но при некоторых распределениях нагрузки может оказаться отличной от нуля касательная составляющая скачка. Деформированное состояние представлено на рис. 2.

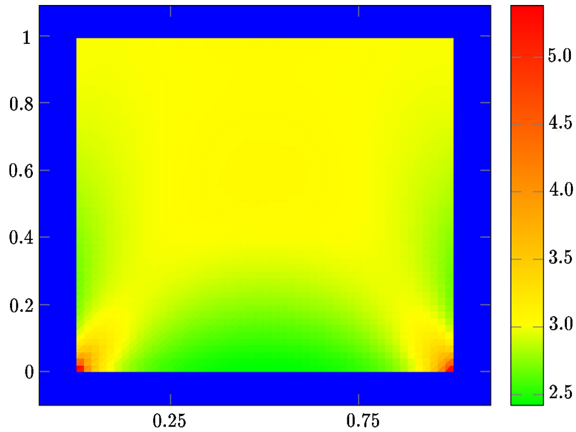
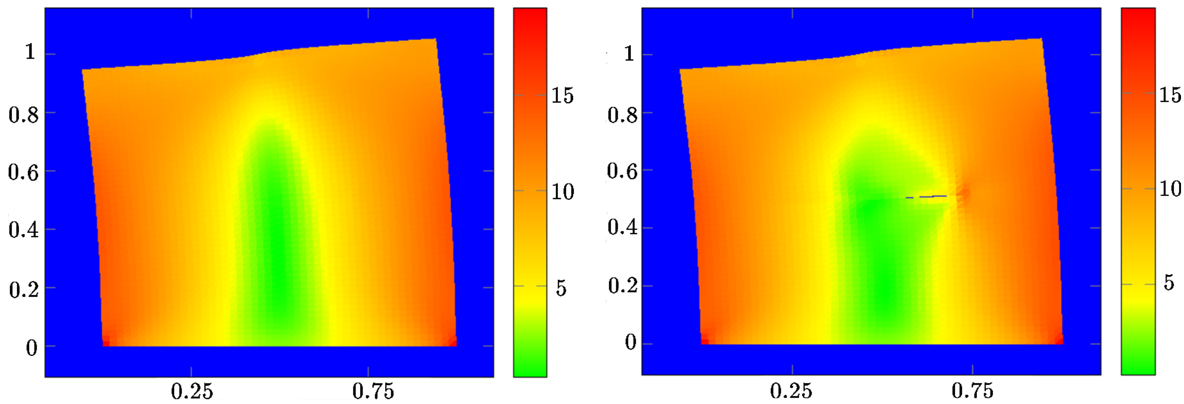


Рис. 2. Деформированное состояние для задачи с f_1

Задача с f_2 наиболее интересна, поскольку силы выбраны так, чтобы слипание берегов происходило лишь на части дефекта. При маленьком значении параметра δ дефект практически отсутствует (рис. 3а), при большем значении происходит переход к задаче с трещиной, и на рис. 3б можно увидеть появление концентратора напряжений. При еще больших значениях параметра разрушения получается решение задачи с трещиной (рис. 4).



а) $\delta = 10^{-7}$ б) $\delta = 10^{-5}$

Рис. 3. Деформированное состояние для задачи с f_2

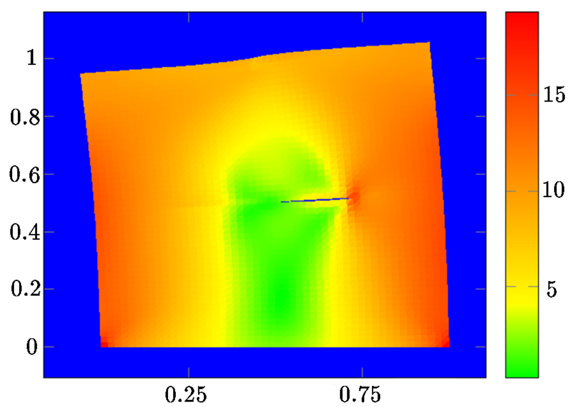


Рис. 4. Деформированное состояние для задачи с f_2 при $\delta = 10^{-1}$

На рис. 5 можно увидеть значения скачка нормальной составляющей вектора перемещения на дефекте при воздействии f_2 для тел с разным параметром разрушения. По вертикальной оси используется масштабирующий коэффициент 10^{-5}. Здесь хорошо видно, что на части дефекта берега остались слипшимися. На рис. 6 представлена форма дефекта и его расположение относительно исходного положения на уровне $x_2 = \frac{1}{2}$. Линии 1 и 2 соответствуют верхнему и нижнему берегу дефекта при $\delta = 10^{-1}$, а линии 3 и 4 — берегам при $\delta = 10^{-5}$. Ориентироваться на масштаб по вертикальной оси можно по рис. 5.

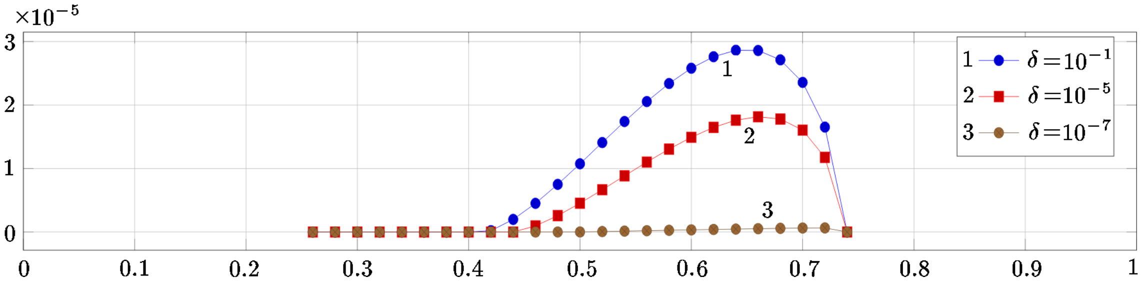


Рис. 5. Скачок в задачах с f_2 при разных значениях δ

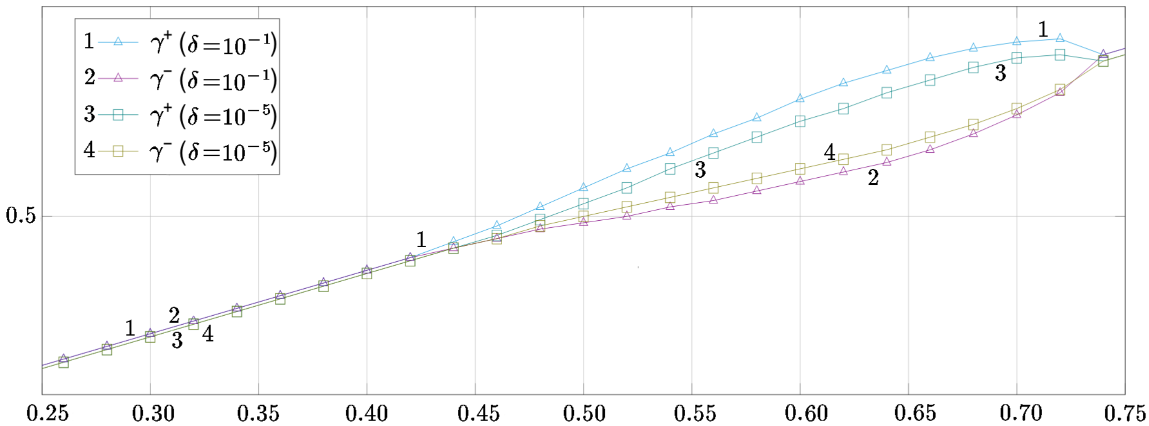


Рис. 6. Форма дефекта в задачах с f_2 при разных значениях δ

Задачи с f_3 отличаются тем, что берега полностью расходятся при условии, что δ не слишком мало (рис. 7).

В табл. 2 приведена оценка скорости сходимости метода для задачи с f_2 при широком диапазоне значений параметра разрушения δ. Можно увидеть, что при очень малых значениях δ для сходимости требуется большое количество итераций.

Таблица 2. Количество итераций для f_2 при разных δ (множитель уменьшения s равен 2)

δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$k_{\text{МУ}}$	26	21	19	17	15	50	18	111	899
$m_{\text{МН}}$	32	27	26	22	21	53	20	112	900

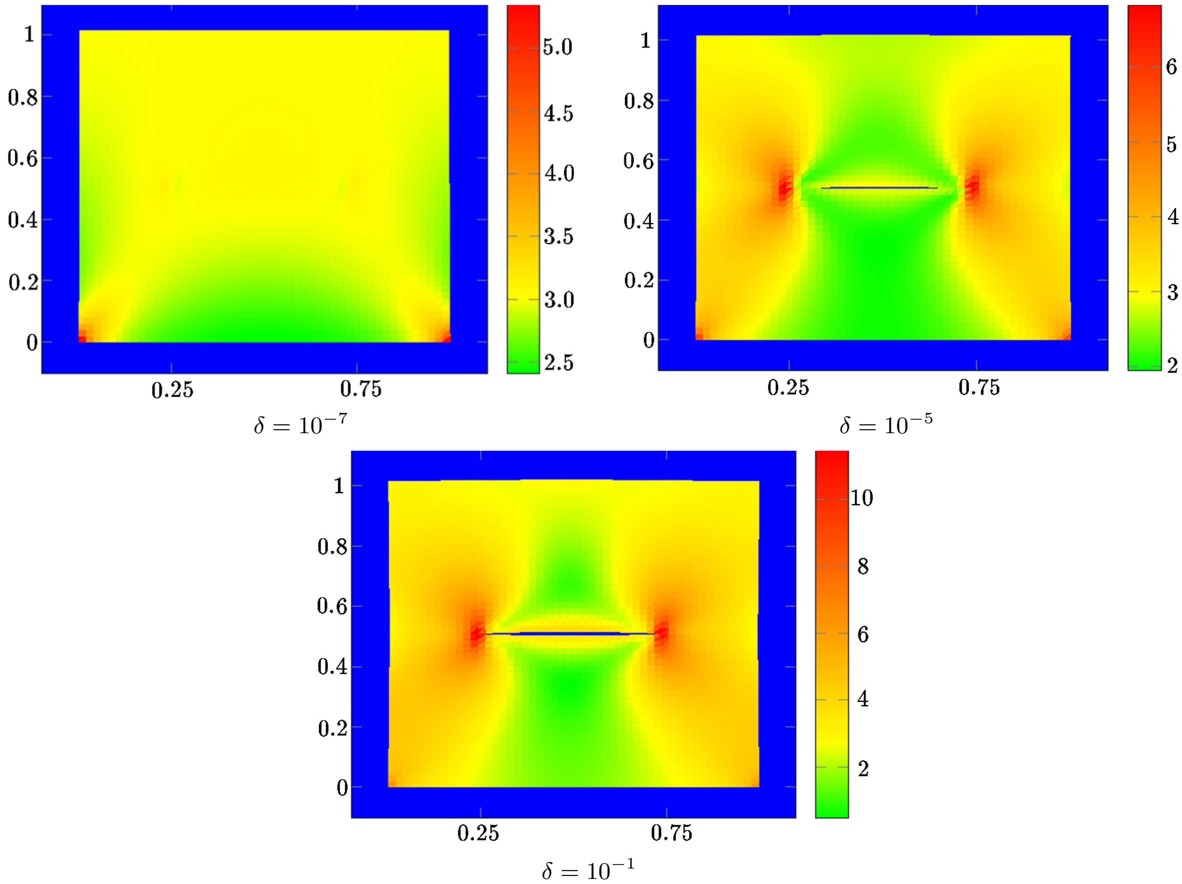


Рис. 7. Решения задачи для f_3

Отметим влияние параметра s на сходимость итерационного процесса. Если в обобщенном методе Ньютона дробление шага s выполнять с меньшим множителем, то можно добиться увеличения скорости сходимости. При этом будет выполняться больше итераций дробления шага (количество которых не отражено в табл. 2), но каждый шаг метода Ньютона станет эффективнее, поэтому количество итераций уменьшится, а значит и число самых продолжительных операций — вычисление обратных матриц к матрице Гессе. В табл. 3 приведена оценка скорости сходимости для задачи с f_2, когда s дробится по формуле $s = s/1.1$.

Таблица 3. Количество итераций для f_2 (множитель уменьшения s равен 1.1)

δ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$k_{\text{МУ}}$	8	12	8	11	10	11	19	121	888
$m_{\text{МН}}$	13	17	13	16	15	14	21	122	889

Заключение

Несмотря на то, что сходимость метода Удзавы с модифицированными функционалами Лагранжа доказывается в предположении H^2-регулярности решения, которая для задач теории трещин не свойственна, численная реализация методов стабильно приводит к решению.

В теореме 1 при $\delta \to 0$ константа C' может начать преобладать, так что оценка точности решения может ухудшиться. Численные расчеты показывают, что при предельных значениях параметра δ увеличивается сложность вычислений. В таких случаях целесообразно переходить к соответствующей предельной модели.

Литература

1. **Морозов Н.Ф.** Математические вопросы теории трещин. — М.: Наука, 1984.
2. **Хлуднев А.М.** Задачи теории упругости в негладких областях. — М.: Физматлит, 2010.
3. **Хлуднев А.М., Попова Т.С.** Об иерархии тонких включений в упругих телах // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 1. — С. 87–107.
4. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989.
5. **Бертсекас Д.** Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987.
6. **Гроссман К., Каплан А.А.** Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. — Новосибирск: Наука, 1981.
7. **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.
8. **Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И.** Решение вариационных неравенств в механике. — М.: Мир, 1986.
9. **Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А.** Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 1. — С. 26–36. Перевод: Woo G., Namm R.V., and Sachkoff S.A. An iterative method based on a modified Lagrangian functional for finding a saddle point in the semicoercive Signorini problem // Comput. Math. and Math. Phys. — 2006. — Vol. 46. — P. 23–33. — https://doi.org/10.1134/S0965542506010052.
10. **Вихтенко Э.М., Намм Р.В.** Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2007. — Т. 47, № 12. — С. 2023—2036. Перевод: Vikhtenko E.M., Namm R.V. Duality scheme for solving the semicoercive signorini problem with friction // Comput. Math. and Math. Phys. — 2007. — Vol. 47. — P. 1938–1951. — https://doi.org/10.1134/S0965542507120068.
11. **Кушнирук Н.Н., Намм Р.В.** Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 4. — С. 409–420. Перевод: Kushniruk N.N., Namm R.V. The lagrange multiplier method for solving a semicoercive model problem with friction // Numerical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 2, № 4. — P. 330–340. — https://doi.org/10.1134/S1995423909040053.
12. **Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В.** Модифицированные функционалы Лагранжа для решения вариационных и квазивариационных неравенств механики // Автомат. и телемеханика. — 2012. — № 4. — С. 3–17. Перевод: Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., and Namm R.V. Modified lagrange functionals to solve the variational and quasivariational inequalities of mechanics // Autom Remote Control. — 2012. — Vol. 73. — P. 605–615. — https://doi.org/10.1134/S0005117912040017.
13. **Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В.** Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 43–52. Перевод: Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., and Namm R.V. Sensitivity functionals in variational inequalities of mechanics and their applications to duality schemes //Numerical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 7, № 1. — P. 36–44. — https://doi.org/10.1134/S1995423914010042.

14. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2014. — Т. 54, № 7. — С. 1218–1228. Перевод: Vikhtenko E.M., Woo G., and Namm R.V. Sensitivity functionals in contact problems of elasticity theory // Comput. Math. and Math. Phys. — 2014. — Vol. 54. — P. 1190–1200. — https://doi.org/10.1134/S0965542514070112.
15. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневост. матем. журн. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 6–17.
16. **Вихтенко Э.М., Намм Р.В.** О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной // Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 36–43.
17. **Намм Р.В., Цой Г.И.** Модифицированная схема двойственности для решения упругой задачи с трещиной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 47–58. Перевод: Namm R.V., Tsoy G.I. A modified dual scheme for solving an elastic crack problem // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P. 37–46. — https://doi.org/10.1134/S1995423917010050.
18. **Намм Р.В., Цой Г.И.** Решение контактной задачи теории упругости с жестким включением // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 699–706. Перевод: Namm R.V., Tsoy G.I. Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion // Comput. Math. and Math. Phys. — 2019. — Vol. 59. — P. 659–666. — https://doi.org/10.1134/S0965542519040134.
19. **Khludnev A.M.** On modeling elastic bodies with defects // Sib. E‘lektron. Mat. Izv. — 2018. — Vol. 15. — P. 153–166.
20. **Rudoy E.M.** Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // Mathem. Modeling and Numer. Analysis. — 2016. — Vol. 50, № 4. — P. 995–1009.
21. **Жильцов А.В.** Седловая точка функционалов Лагранжа в задаче о теле, содержащем тонкий дефект с параметром // Информатика и системы управления. — 2022. — № 3(73). — С. 84–92.
22. **Вихтенко Э.М., Намм Р.В.** Характеристические свойства модифицированного функционала Лагранжа для контактной задачи теории упругости с заданным трением // Дальневост. матем. журн. — 2009. — Т. 9, № 1-2. — С. 38–47.
23. **Жильцов А.В.** Метод множителей Лагранжа для решения задачи об одностороннем контакте упругих тел с ограниченной зоной контакта // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 4. — С. 99–114.

Поступила в редакцию 31 октября 2022 г.
После рецензирования без замечаний 28 ноября 2022 г.
Принята к печати 30 января 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Morozov N.F.** Matematicheskie voprosy teorii treschin. — M.: Nauka, 1984.
2. **Khludnev A.M.** Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh. — M.: Fizmatlit, 2010.
3. **Khludnev A.M., Popova T.S.** Ob ierarkhii tonkikh vklyuchenii v uprugikh telakh // Matematicheskie zametki SVFU. — 2016. — T. 23, № 1. — S. 87–107.
4. **Gol'shtein E.G., Tret'yakov N.V.** Modifitsirovannye funktsii Lagranzha. Teoriya i metody optimizatsii. — M.: Nauka, 1989.
5. **Bertsekas D.** Uslovnaya optimizatsiya i metody mnozhitelei Lagranzha. — M.: Radio i svyaz', 1987.
6. **Grossman K., Kaplan A.A.** Nelineinoe programmirovanie na osnove bezuslovnoi minimizatsii. — Novosibirsk: Nauka, 1981.

7. **Marchuk G.I., Agoshkov V.I.** Vvedenie v proektsionno-setochnye metody. — M.: Nauka, 1981.
8. **Glavachek I., Gaslinger YA., Nechas I.** Reshenie variatsionnykh neravenstv v mekhanike. — M.: Mir, 1986.
9. **Vu G., Namm R.V., Sachkov S.A.** Iteratsionnyi metod poiska sedlovoi tochki dlya polukoertsitivnoi zadachi Sin'orini, osnovannyi na modifitsirovannom funktsionale Lagranzha // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2006. — T. 46, № 1. — S. 26–36. Perevod: Woo G., Namm R.V., and Sachkoff S.A. An iterative method based on a modified Lagrangian functional for finding a saddle point in the semicoercive Signorini problem // Comput. Math. and Math. Phys. — 2006. — Vol. 46. — P. 23–33. — https://doi.org/10.1134/S0965542506010052.
10. **Vikhtenko E.M., Namm R.V.** Skhema dvoistvennosti dlya resheniya polukoertsitivnoi zadachi Sin'orini s treniem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2007. — T. 47, № 12. — S. 2023–2036. Perevod: Vikhtenko E.M., Namm R.V. Duality scheme for solving the semicoercive signorini problem with friction // Comput. Math. and Math. Phys. — 2007. — Vol. 47. — P. 1938–1951. — https://doi.org/10.1134/S0965542507120068.
11. **Kushniruk N.N., Namm R.V.** Metod mnozhitelei Lagranzha dlya resheniya polukoertsitivnoi model'noi zadachi s treniem // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2009. — T. 12, № 4. — S. 409–420. Perevod: Kushniruk N.N., Namm R.V. The lagrange multiplier method for solving a semicoercive model problem with friction // Numerical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 2, № 4. — P. 330–340. — https://doi.org/10.1134/S1995423909040053.
12. **Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., Namm R.V.** Modifitsirovannye funktsionaly Lagranzha dlya resheniya variatsionnykh i kvazivariatsionnykh neravenstv mekhaniki // Avtomat. i telemekhanika. — 2012. — № 4. — S. 3–17. Perevod: Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., and Namm R.V. Modified lagrange functionals to solve the variational and quasivariational inequalities of mechanics // Autom Remote Control. — 2012. — Vol. 73. — P. 605–615. — https://doi.org/10.1134/S0005117912040017.
13. **Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., Namm R.V.** Funktsionaly chuvstvitel'nosti v variatsionnykh neravenstvakh mekhaniki i ikh prilozhenie k skhemam dvoistvennosti // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2014. — T. 17, № 1. — S. 43–52. Perevod: Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., and Namm R.V. Sensitivity functionals in variational inequalities of mechanics and their applications to duality schemes //Numerical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 7, № 1. — P. 36–44. — https://doi.org/10.1134/S1995423914010042.
14. **Vikhtenko E.M., Vu G., Namm R.V.** Funktsionaly chuvstvitel'nosti v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2014. — T. 54, № 7. — S. 1218–1228. Perevod: Vikhtenko E.M., Woo G., and Namm R.V. Sensitivity functionals in contact problems of elasticity theory // Comput. Math. and Math. Phys. — 2014. — Vol. 54. — P. 1190–1200. — https://doi.org/10.1134/S0965542514070112.
15. **Vikhtenko E.M., Vu G., Namm R.V.** Metody resheniya polukoertsitivnykh variatsionnykh neravenstv mekhaniki na osnove modifitsirovannykh funktsionalov Lagranzha // Dal'nevost. matem. zhurn. — 2014. — T. 14, № 1. — S. 6–17.
16. **Vikhtenko E.M., Namm R.V.** O metode dvoistvennosti dlya resheniya model'noi zadachi s treschinoi // Tr. IMM UrO RAN. — 2016. — T. 22, № 1. — S. 36–43.
17. **Namm R.V., Tsoi G.I.** Modifitsirovannaya skhema dvoistvennosti dlya resheniya uprugoi zadachi s treschinoi // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2017. — T. 20, № 1. — C. 47–58. Perevod: Namm R.V., Tsoy G.I. A modified dual scheme for solving an elastic crack problem // Numerical Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P. 37–46. — https://doi.org/10.1134/S1995423917010050.
18. **Namm R.V., Tsoi G.I.** Reshenie kontaktnoi zadachi teorii uprugosti s zhestkim vklyucheniem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2019. — T. 59, № 4. — S. 699–706. Perevod: Namm R.V., Tsoy G.I. Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion // Comput. Math. and Math. Phys. — 2019. — Vol. 59. — P. 659–666. — https://doi.org/10.1134/S0965542519040134.

19. **Khludnev A.M.** On modeling elastic bodies with defects // Sib. E'lektron. Mat. Izv. — 2018. — Vol. 15. — P. 153–166.
20. **Rudoy E.M.** Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // Mathem. Modeling and Numer. Analysis. — 2016. — Vol. 50, № 4. — P. 995–1009.
21. **Zhil'tsov A.V.** Sedlovaya tochka funktsionalov Lagranzha v zadache o tele, soderzhaschem tonkii defekt s parametrom // Informatika i sistemy upravleniya. — 2022. — № 3(73). — C. 84–92.
22. **Vikhtenko E.M., Namm R.V.** KHarakteristicheskie svoistva modifitsirovannogo funktsionala Lagranzha dlya kontaktnoi zadachi teorii uprugosti s zadannym treniem // Dal'nevost. matem. zhurn. — 2009. — T. 9, № 1-2. — S. 38–47.
23. **Zhil'tsov A.V.** Metod mnozhitelei Lagranzha dlya resheniya zadachi ob odnostoronnem kontakte uprugikh tel s ogranichennoi zonoi kontakta // Matematicheskie zametki SVFU. — 2016. — T. 23, № 4. — C. 99–114.