УДК 532.516; 532.582

О ДВИЖЕНИИ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача о движении твердого шара в вязкой жидкости, происходящем вследствие заданных пульсаций шара и заданных колебаний жидкости вдали от него.

В [1] изложены экспериментальные результаты, позволяющие считать установленным существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости. Это явление состоит в том, что сжимаемое твердое тело в жидкости, находящейся в замкнутом сосуде, вследствие заданных колебаний и деформаций сосуда перемещается в заданном направлении (в положительном или в отрицательном направлении оси, вдоль которой колеблется сосуд, в зависимости от того, как колеблется и деформируется сосуд). Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости аналогично преимущественно однонаправленному движению газового пузыря в колеблющейся жидкости [2–4] и допускает аналогичное объяснение [1–3]. Однако в отличие от движения газового пузыря, теоретически исследованного в [2, 4], соответствующего теоретического исследования движения сжимаемого твердого тела проведено не было. В связи с этим в данной работе рассматривается задача о движении твердого шара в вязкой жидкости в условиях, аналогичных условиям, реализованным в представленном в [1] эксперименте.

1. В вязкой несжимаемой не ограниченной извне жидкости находится тело — сжимаемый твердый шар. Радиус шара и скорость жидкости на бесконечности относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z заданным образом периодически с периодом T изменяются со временем t (среднее значение скорости жидкости на бесконечности равно нулю). Распределение составляющей шар среды симметрично относительно его центра (центр инерции и центр шара совпадают). Течение жидкости является не зависящим от начальных условий. Положение шара определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{S}$ его центра. Требуется найти, как $\boldsymbol{S}$ зависит от t.

Рассматриваемая постановка задачи соответствует следующему: имеется замкнутый сосуд, заполненный жидкостью, содержащей тело — сжимаемый твердый шар; все стенки сосуда находятся на очень больших расстояниях от тела, часть стенок является деформируемой; сосуд совершает заданные поступательные колебания и заданным образом деформируется; вследствие деформаций сосуда тело заданным образом пульсирует (объем тела периодически изменяется со временем); изменения давления в жидкости на поверхности тела, связанные с колебаниями сосуда, малы по сравнению с изменениями давления в жидкости на поверхности тела, связанными с деформациями сосуда.

Будем рассматривать течение жидкости и движение шара относительно прямоугольной системы координат $X_1 = X - S_X$, $X_2 = Y - S_Y$, $X_3 = Z - S_Z$ (S_X, S_Y, S_Z — соответственно X-, Y-, Z-компоненты вектора $\boldsymbol{S}$).

Пусть $\tau = t/T$; $A = A_0(1 + \text{æ}a)$ — радиус шара $\Big(A_0$ $(A_0 > 0)$ — постоянная; æ (æ < 1) — наибольшее значение $|A - A_0|/A_0$; $a = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$ $(a_m$ — постоянные)$\Big)$; $\boldsymbol{U} = \hat{U}\boldsymbol{u} = \hat{U}u\boldsymbol{k}$ — скорость жидкости на бесконечности $\Big(\hat{U}$ — наибольшее значение $|\boldsymbol{U}|$; $u = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$ $(u_m$ — постоянные); $\boldsymbol{k} = (0,0,1)\Big)$; $x_1 = X_1/A_0$; $x_2 = X_2/A_0$; $x_3 = X_3/A_0$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; $\varepsilon = \hat{U}T/A_0$; ρ — плотность жидкости; m — масса шара; $\mu = 3m/(4\pi A_0^3\rho)$; (s) — поверхность шара (уравнение (s) есть $r = 1 + \text{æ}a$); $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к (s); $\boldsymbol{V}$ — скорость жидкости; $\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{V}/A_0$; P — давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho A_0^2)$; $\boldsymbol{w} = (1/A_0)\, d\boldsymbol{S}/d\tau$; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = A_0^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\mathcal{P}$ — тензор напряжений в жидкости; $\wp = T^2\mathcal{P}/(\rho A_0^2)$; $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на шар со стороны жидкости; $\boldsymbol{f} = T^2\boldsymbol{F}/(\rho A_0^4) = \iint\limits_{(s)} \wp\cdot\boldsymbol{n}\, ds$.

Уравнение движения центра инерции шара, уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на (s) и при $r \to \infty$, имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{f} - \frac{4\pi}{3}\,\mu\,\frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau} = 0, \quad \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0; \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{v} = \text{æ}\frac{da}{d\tau}\,\boldsymbol{n} \quad \text{на} \quad (s), \qquad \boldsymbol{v} \sim \varepsilon\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{1.2}$$

2. Будем рассматривать задачу (1.1), (1.2) при малых по сравнению с единицей значениях ε.

Предположим, что при $\varepsilon \to 0$

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}^{(0)} + \varepsilon\boldsymbol{v}^{(1)}, \quad p \sim p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}, \quad \boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{w}^{(0)} + \varepsilon\boldsymbol{w}^{(1)}. \tag{2.1}$$

Согласно (1.1), (1.2), (2.1) в M-м ($M = 0$, 1) приближении имеем

$$\boldsymbol{f}^{(M)} - \frac{4\pi}{3}\,\mu\,\frac{d\boldsymbol{w}^{(M)}}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(M)}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}^{(0)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(M)} + M(\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(0)} + \nabla p^{(M)} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}^{(M)} + \frac{d\boldsymbol{w}^{(M)}}{d\tau} = 0, \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{(M)} = 0;$$

$$\boldsymbol{v}^{(M)} = (1 - M)\text{æ}\frac{da}{d\tau}\,\boldsymbol{n} \quad \text{при} \quad r = 1 + \text{æ}a, \qquad \boldsymbol{v}^{(M)} \sim M\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}^{(M)} \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{f}^{(M)} = \iint\limits_{(s)} \wp^{(M)}\cdot\boldsymbol{n}\, ds$ ($\wp^{(M)}$ есть $\wp$ при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(M)}$, $p = p^{(M)}$).

Пусть $M = 0$. При $\varepsilon = 0$ центр инерции шара покоится относительно системы координат X, Y, Z, течение жидкости симметрично относительно начала координат x_1, x_2, x_3. Задача (2.2), (2.3) имеет решение

$$\boldsymbol{v}^{(0)} = (1 + \text{æ}a)^2\text{æ}\,\frac{da}{d\tau}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}; \tag{2.4}$$

$$p^{(0)} = \frac{(1+æa)^2}{r}\Big\{æ\,\frac{d^2a}{d\tau^2} + \frac{2æ^2}{1+æa}\Big(\frac{da}{d\tau}\Big)^2\Big[1 - \frac{(1+æa)^3}{4r^3}\Big]\Big\} + c^{(0)};$$
$$\boldsymbol{w}^{(0)} = 0. \qquad (2.5)$$

Здесь $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$; $c^{(0)}$ — функция от τ.

Пусть $M = 1$. Будем рассматривать задачу (2.2), (2.3) при малых по сравнению с единицей значениях $æ$ (значения ε малы по сравнению с значениями $æ$).

Из (2.4) следует, что при $æ \to 0$

$$\boldsymbol{v}^{(0)} \sim æ\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)}, \qquad (2.6)$$

где $\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)} = \dfrac{da}{d\tau}\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

Предположим, что при $æ \to 0$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} \sim \boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)} + æ\boldsymbol{v}^{(1)}_{(1)}, \quad p^{(1)} \sim p^{(1)}_{(0)} + æp^{(1)}_{(1)}, \quad \boldsymbol{w}^{(1)} \sim \boldsymbol{w}^{(1)}_{(0)} + æ\boldsymbol{w}^{(1)}_{(1)}. \qquad (2.7)$$

Согласно (2.2), (2.3), (2.6), (2.7) в N-м ($N = 0,\ 1$) приближении имеем

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{(N)} - \frac{4\pi}{3}\,\mu\,\frac{d\boldsymbol{w}^{(1)}_{(N)}}{d\tau} = 0,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)}}{\partial\tau} + \nabla p^{(1)}_{(N)} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} + \frac{d\boldsymbol{w}^{(1)}_{(N)}}{d\tau} = -N\big[(\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)} + (\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)}\big], \qquad (2.8)$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} = 0;$$

$$\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} = -N\,\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)}}{\partial r}\,a \quad \text{при} \quad r = 1, \qquad \boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} \sim (1-N)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}^{(1)}_{(N)} \quad \text{при} \quad r\to\infty, \qquad (2.9)$$

где $\boldsymbol{f}^{(1)}_{(N)} = \displaystyle\iint\limits_{(s)} \wp^{(1)}_{(N)}\cdot\boldsymbol{n}\,ds$ ($\wp^{(1)}_{(N)}$ есть $\wp$ при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)}$, $p = p^{(1)}_{(N)}$).

Пусть $N = 0$. Задача (2.8), (2.9) имеет решение

$$v^{(1)}_{(0)r} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial\psi_{(0)}}{\partial\theta}, \qquad v^{(1)}_{(0)\theta} = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\psi_{(0)}}{\partial r}, \qquad v^{(1)}_{(0)\varphi} = 0;$$
$$p^{(1)}_{(0)} = \Big\{\Big[-\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^3}\Big)\Big]\psi_{(0)} - \frac{dw_{(0)}}{d\tau}\,r\sin^2\theta\Big\}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + c_{(0)};$$
$$\boldsymbol{w}^{(1)}_{(0)} = w_{(0)}\boldsymbol{k}. \qquad (2.10)$$

Здесь $v^{(1)}_{(0)r}$, $v^{(1)}_{(0)\theta}$, $v^{(1)}_{(0)\varphi}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)}$ (θ — угол между векторами $(0, 0, 1)$ и (x_1, x_2, x_3); φ — угол между векторами $(1, 0, 0)$ и $(x_1, x_2, 0)$);

$$\psi_{(0)} = \Big\{\frac{1}{2}\,(u - w_{(0)})r^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{(0)m} - u_m}{q_m^2}\times$$
$$\times\Big[\frac{q_m^2 + 3q_m + 3}{r} - 3\Big(q_m + \frac{1}{r}\Big)\mathrm{e}^{q_m(1-r)}\Big]\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}\Big\}\sin^2\theta;$$

$c_{(0)}$ — функция от τ; $w_{(0)} = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} w_{(0)m}\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$ $\Bigl(w_{(0)m} = 3\dfrac{q_m^2+3q_m+3}{(2\mu+1)q_m^2+9q_m+9}\,u_m$; $q_m = (1+i)\sqrt{m\pi\,\mathrm{Re}}\Bigr)$.

Пусть $N=1$. Задача (2.8), (2.9) имеет решение

$$v_{(1)r}^{(1)} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial\bar\psi_{(1)}}{\partial\theta} + \tilde v_r, \quad v_{(1)\theta}^{(1)} = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\bar\psi_{(1)}}{\partial r} + \tilde v_\theta, \quad v_{(1)\varphi}^{(1)} = 0;$$

$$p_{(1)}^{(1)} = \left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigl(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^3}\Bigr)\bar\psi_{(1)} - \frac{1}{r^2}\int\limits_0^1 \frac{\partial^2\psi_{(0)}}{\partial r^2}\,\frac{da}{d\tau}\,d\tau\right]\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \tilde p + c_{(1)};$$

$$\boldsymbol{w}_{(1)}^{(1)} = (\bar w_{(1)} + \tilde w_{(1)})\boldsymbol{k}. \tag{2.11}$$

Здесь $v_{(1)r}^{(1)}$, $v_{(1)\theta}^{(1)}$, $v_{(1)\varphi}^{(1)}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\boldsymbol{v}_{(1)}^{(1)}$;

$$\bar\psi_{(1)} = \Bigl(-\frac{1}{2}\,\bar w_{(1)}r^2 + \frac{\alpha}{r} + \beta r + \Phi\Bigr)\sin^2\theta \qquad \Bigl(\alpha = -\frac{1}{4}\,\bar w_{(1)} + \frac{1}{2}\,(\lambda - 2\eta + \xi)\big|_{r=1};$$

$$\beta = \frac{3}{4}\,\bar w_{(1)} - \frac{1}{2}\,(\lambda + 3\xi)\big|_{r=1}; \qquad \Phi = \frac{\eta}{r} + r^2\xi; \qquad \lambda = \frac{1}{\sin^2\theta}\int\limits_0^1 \frac{\partial^2\psi_{(0)}}{\partial r^2}\,a\,d\tau;$$

$$\eta = \int\limits_\infty^r r\sigma\,dr; \qquad \xi = \int\limits_r^\infty \frac{\sigma}{r^2}\,dr; \qquad \sigma = \frac{1}{9}\,\mathrm{Re}\Bigl(r^3\int\limits_r^\infty \omega\,dr + \int\limits_\infty^r r^3\omega\,dr\Bigr);$$

$$\omega = \frac{1}{r^3\sin^2\theta}\int\limits_0^1 \Bigl(\frac{\partial^3\psi_{(0)}}{\partial r^3} - \frac{2}{r}\,\frac{\partial^2\psi_{(0)}}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial\psi_{(0)}}{\partial r} + \frac{8}{r^3}\,\psi_{(0)}\Bigr)\frac{da}{d\tau}\,d\tau\Bigr);$$

$$\tilde v_r = \mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} v_{rm}\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}; \qquad \tilde v_\theta = \mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} v_{\theta m}\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}; \qquad \tilde p = \mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} p_m\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$$

(v_{rm}, $v_{\theta m}$, p_m — функции от r, θ); $c_{(1)}$ — функция от τ;

$$\bar w_{(1)} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} a_m^* u_m q_m^2\Bigl[1 + \frac{\mu-1}{16}\,\times$$
$$\times\Bigl(q_m^5 - q_m^4 + 14q_m^3 - 18q_m^2 + 48q_m + 48 - q_m^4(q_m^2+12)\mathrm{e}^{q_m}\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-q_m r}}{r}\,dr\Bigr)\Big/((2\mu+1)q_m^2 + 9q_m + 9)\Bigr]$$

(a_m^* — постоянные, комплексно-сопряженные с a_m); $\tilde w_{(1)} = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} w_{(1)m}\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}$ ($w_{(1)m}$ — постоянные).

3. Используя (2.10), (2.11), получим

$$\boldsymbol{S} = \bar W t\boldsymbol{k} + \tilde{\boldsymbol{S}}, \tag{3.1}$$

где

$$\bar W = \frac{A_0}{T}\,\varepsilon æ\bar w_{(1)}; \tag{3.2}$$

$\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_0 + \mathrm{Real} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau} \boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{S}_0$, S_m — постоянные). Соотношением (3.1) приближенно определяется зависимость $\boldsymbol{S}$ от t.

Согласно (3.1) шар движется вдоль оси Z, и его движение состоит из колебаний и перемещения с постоянной скоростью в направлении $\boldsymbol{k}$ (при $\bar{W} > 0$) или в направлении $-\boldsymbol{k}$ (при $\bar{W} < 0$). Это означает, что вследствие пульсаций находящегося в жидкости твердого тела и колебаний жидкости вдали от него возможно перемещение тела в заданном направлении.

4. Условия рассматриваемой в данной работе задачи аналогичны условиям, реализованным в представленном в [1] эксперименте. И в теории, и в эксперименте вследствие аналогичных колебательных воздействий на систему, состоящую из жидкости и твердого тела, происходит перемещение тела в положительном или в отрицательном направлении оси, вдоль которой колеблется жидкость вдали от тела. Ввиду этого постановка задачи и результаты, содержащиеся в данной работе, могут служить основой математической модели явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости.

5. Пусть $a_1 \neq 0$, $u_1 \neq 0$, $a_n = 0$, $u_n = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Используя (3.2), получим

$$\frac{\bar{W}T}{\varepsilon æ A_0} \sim -\frac{2\pi}{9} \mathrm{Re}\,(\mu + 2) \mathrm{Imag}\,(a_1^* u_1) + \\ + \frac{\pi^2}{162} \mathrm{Re}^2\,(\mu - 1)(16\mu + 35)\,\mathrm{Real}\,(a_1^* u_1) \qquad \text{при} \quad \mathrm{Re} \to 0; \tag{5.1}$$

$$\frac{\bar{W}T}{\varepsilon æ A_0} \sim -\frac{2\pi}{3} \mathrm{Re}\,\mathrm{Imag}\,(a_1^* u_1) + 5\,\frac{\mu - 1}{2\mu + 1}\,\mathrm{Real}\,(a_1^* u_1) \quad \text{при} \quad \mathrm{Re} \to \infty. \tag{5.2}$$

Из (5.1), (5.2), в частности, следует, что если $\mathrm{Imag}\,(a_1^* u_1) = 0$, то направления перемещения шара при $\mu < 1$ и $\mu > 1$ противоположны, при $\mu = 1$ перемещение шара отсутствует.

Таким образом, при одних и тех же пульсациях находящегося в жидкости твердого тела и колебаниях жидкости вдали от него поведение тела может быть качественно различным в зависимости от того, как его средняя плотность соотносится с плотностью жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1993. № 1. С. 100, 101.
2. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 107–113.
3. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
4. **Сенницкий В. Л.** О поведении газового пузыря в вязкой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 73–79.

Поступила в редакцию 28/II 2000 г.,
в окончательном варианте — 17/IV 2000 г.