

увеличением ошибки его аппроксимации конечным тригонометрическим рядом в случае, когда $\min(h)/H \rightarrow 0$.

В заключение автор выражает признательность В.В. Пухначеву за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ivanov I.B. (Ed.) The Liquid Films: Fundamentals and Applications — N.Y.; Basel: Dekker, 1988. — (Surfactant Sci. Ser.; V. 29).
2. Tambe D.E., Sharma M.M. Hydrodynamics of thin liquid films bounded by viscoelastic interfaces // J. Colloid Interface Sci. — 1991. — V. 147, N 1. — P. 137—151.
3. Lee J.C., Hodgson T.D. Film flow and coalescence — I. Basic relations, film shape and criteria for interface mobility // Chem. Eng. Sci. — 1968. — V. 23. — P. 1375—1397.
4. Entov V.M. On the dynamics of films of viscous and elastoviscous liquid // Arch. Mech. Stos. — 1982. — V. 34, N 4. — P. 395—407.
5. Антановский Л.К. Динамика свободных пленок жидкости // ПМТФ. — 1989. — № 2. — С. 81—86.
6. Antanovskii L.K. Stretching of a free liquid film fixed at a frame // Microgravity Quart. — 1992. — V. 2, N 3. — P. 189—195.

г. Новосибирск

Поступила 23/IV 1993 г.

УДК 532.5+532.6

Л.Г. Бадрагинова, С.Г. Славчев

ЗАКРИТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ «НА ПОТОЛКЕ»

В [1—3] отмечалось, что равновесное состояние подогреваемого со стороны свободной поверхности слоя жидкости «на потолке» может быть устойчивым, если силовое поле достаточно слабое. Изотермическая в состоянии равновесия свободная поверхность при возмущениях становится неизотермической. Возникающие на ней термокапиллярные силы стабилизируют длинноволновые возмущения, являющиеся наиболее опасными. Для состояния равновесия существует порог устойчивости, определяющийся критическим соотношением между дестабилизирующей силой тяжести и стабилизирующим термокапиллярным эффектом.

В данной работе находятся условия, при которых возникающее в закритической области стационарное термокапиллярное течение представляет собой плоскую одновихревую структуру в слое, толщина которого не постоянна, а монотонно изменяется вдоль слоя. Показано также существование закритических режимов с двухвихревой структурой течения и формой свободной поверхности, имеющей выпуклость или вогнутость в сторону расположенной снизу газовой фазы.

1. Уравнения длинных волн. Пусть жидкий слой заключен между горизонтальными твердыми пластинами $z = 0$, $z = d$ и занимает область $0 < z < h(x, t)$. На пластинах $z = 0$, d заданы постоянные температуры T_0 , T_{10} . В области $h(x, t) < z < d$ находится теплопроводящий газ, плотность и вязкость которого пренебрежимо малы. Коэффициенты теплопроводности λ , λ_1 и температуропроводности χ , χ_1 жидкости и газа, коэффициент кинематической вязкости ν , плотность ρ жидкости, а также ускорение силы тяжести g предполагаются постоянными. Система жидкость — газ находится в условиях пониженной гравитации.

Коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейной функцией температуры T :

© Л.Г. Бадрагинова, С.Г. Славчев, 1994

$$(1.1) \quad \sigma = \sigma_0 - \sigma_T [T - \min(T_{10}, -T_0)].$$

В (1.1) σ_0, σ_T — заданные положительные постоянные. Ниже изучаются двумерные течения, для которых вектор скорости имеет две неравные тождественно нулю компоненты (u, w) в направлениях осей x, z . Через p, T, T_1 обозначим соответственно давление жидкости и температуры жидкости и газа. Введем следующие безразмерные переменные:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x' &= x/L, z' = z/d, h' = h/d, t' = Ut/L, \\ u' &= u/U, w' = w/\varepsilon U, p' = pd^2/\rho\nu UL, \\ \theta &= [T - \min(T_{10}, T_0)]/[T - \min(T, T_0)]/|T - T_0|. \end{aligned}$$

Здесь L — характерный продольный размер; предполагается, что $\varepsilon = d/L$ — малый параметр; U — характерная скорость термокапиллярного движения: $U = \varepsilon |T_{10} - T_0| \sigma / \rho\nu$.

Состояние жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса и конвективного теплообмена. Температура в газовой фазе находится из уравнения теплопроводности. Для скорости на пластине $z = 0$ ставится условие прилипания. На границе раздела выполняются кинематическое условие и два динамических условия, выражающих равенство нормальной компоненты вектора напряжения капиллярному давлению и касательного напряжения — напряжению, возникающему из-за переменности поверхностного натяжения. Система дополняется условиями непрерывности температур и тепловых потоков на границе раздела и заданием температур на твердых пластинах. Эта система уравнений, записанная в безразмерных переменных (1.2), имеет следующий вид:

при $0 < z < h$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u_{zz} - p_x &= \varepsilon^2 \text{Re}(u_t + uu_x + ww_z) - \varepsilon^2 u_{xx}, \\ p_z + \gamma &= \varepsilon^2 w_{zz} - \varepsilon^4 \text{Re}(w_t + uw_x + ww_z) + \varepsilon^4 w_{xx}, \\ u_x + w_z &= 0, \theta_{zz} = \varepsilon^2 \text{RePr}(\theta_t + u\theta_x + w\theta_z) - \varepsilon^2 \theta_{xx}; \end{aligned}$$

при $h < z < 1$

$$(1.4) \quad \theta_{izz} = \varepsilon^2 \chi_*^{-1} \text{RePr} \theta_{iz} - \varepsilon^2 \theta_{ixx};$$

при $z = h$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} h_t &= w - uh_x, -(\alpha - \varepsilon^2 \theta)(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-3/2} h_{xx} + \\ &+ 2\varepsilon^2 (w_z - h_x u_z) - 2\varepsilon^4 (w_x - h_x u_x)(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-1} h_x = -p, \\ [u_z + \varepsilon^2 (w_x - h_x^2 u_z - \varepsilon^2 h_x^2 w_x + 2h_x w_z - 2h_x u_x)] &\times \\ &\times (1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{-1/2} = -\theta_x, \theta = \theta_1, \\ \theta_z - \varepsilon h_x \theta_x &= \lambda_* (\theta_{iz} - \varepsilon h_x \theta_{ix}); \end{aligned}$$

при $z = 0$

$$(1.6) \quad u = w = 0, \theta = \theta_0;$$

при $z = 1$

$$(1.7) \quad \theta_1 = \theta_{10}.$$

Здесь штрихи у безразмерных переменных для удобства опущены; $\text{Re} = UL/\nu$ и $\text{Pr} = \nu/\chi$ — числа Рейнольдса и Прандтля; $\lambda_* = \lambda_1/\lambda$; $\chi_* = \chi_1/\chi$;

$$(1.8) \quad \alpha = \varepsilon^2 \sigma_0 / \sigma_T |T_{10} - T_0|, \gamma = \pm \varepsilon^2 \rho g L^2 / \sigma_T |T_{10} - T_0|$$

— безразмерные параметры, характеризующие отношение капиллярных сил и гидростатического давления к термокапиллярным. Знаки плюс и минус в (1.8) и ниже соответствуют случаям направленности силы тяжести против (слой на подложке) и вдоль оси z (слой «на потолке»).

Для получения уравнений длинноволнового приближения надо осуществить в уравнениях (1.3)—(1.7) предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$. Предполагая, что при $\epsilon \rightarrow 0$ величины $\epsilon^2 \text{RePr}$, $\epsilon^2 \text{Re}$, $\epsilon^2 \chi_*^{-1} \text{RePr}$, $\epsilon \lambda_*$ стремятся к нулю, а α и γ остаются постоянными, из (1.3)—(1.7) получим краевую задачу для длинноволнового приближения, из которой в результате интегрирования находятся явные выражения давления, скорости и температуры сред через толщину h :

$$(1.9) \quad \begin{aligned} p &= \gamma(h - z) - \alpha h_{xx}, \\ u &= (z^2/2 - zh)(\gamma h_x - \alpha h_{xxx}) - z(\theta_h)_x, \\ w &= \left(\frac{z^2 h}{2} - \frac{z^3}{6} \right) (\gamma h - \alpha h_{xxx})_{xx} + \frac{z^2}{2} [\gamma h x^2 - \alpha h_x h_{xx} + (\theta_h)_{xx}] ; \\ (1.10) \quad \theta &= \lambda_* \text{sgn}(T_{10} - T_0) z / (1 - h + \lambda_* h) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sgn}(T_{10} - T_0), \\ \theta_1 &= \text{sgn}(T_{10} - T_0) (z - 1) / (1 - h + \lambda_* h) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(T_{10} - T_0). \end{aligned}$$

В формулах (1.9) θ_h — температура на свободной границе. Выражение для функции θ_h получается подстановкой $z = h$ в первую (или вторую) формулу (1.10). Уравнение для толщины $h(x, t)$ получается из кинематического условия с использованием выражений (1.9) и имеет вид

$$(1.11) \quad h_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\lambda_* \text{sgn}(T_{10} - T_0) h^2 h_x}{2(1 - h + \lambda_* h)^2} + \frac{h^3}{3} (\gamma h_x - \alpha h_{xxx}) \right].$$

Уравнения (1.9)—(1.11) описывают в длинноволновом приближении плоские термокапиллярные течения в слое $0 < z < h$. Начальные данные для функции h не задаются, поскольку ниже изучаются только стационарные течения и устойчивость равновесного состояния.

В уравнении (1.11) выражение, стоящее в квадратных скобках, — расход жидкости поперек слоя. В данной работе находятся стационарные решения с нулевым поперечным расходом. Для отыскания таких решений из (1.11) в стационарном случае после замены $\xi = \sqrt{3\lambda_*/2\alpha} \cdot x$ получаем уравнение

$$(1.12) \quad h''' - \text{sgn}(T_{10} - T_0) \left[\frac{1}{h(1 - h + \lambda_* h)^2} - G \right] h' = 0,$$

в котором

$$(1.13) \quad G = - \frac{2\gamma \text{sgn}(T_{10} - T_0)}{3\lambda_*} = \mp \frac{2 \text{sgn}(T_{10} - T_0) \rho g d^2}{3\lambda_* \sigma_T |T_{10} - T_0|},$$

а штрих обозначает дифференцирование по ξ .

2. Об устойчивости равновесия плоского слоя. На основе длинноволновой модели конвекции (1.9)—(1.11) можно исследовать устойчивость равновесного состояния слоя относительно длинноволновых возмущений. Уравнение (1.11) имеет решение $h = h_0$, $h_0 \in (1, 0)$. Как видно из (1.9), (1.10), этому решению соответствует состояние механического равновесия слоя с кусочно-линейным распределением температуры по z . Подставляя возмущенную толщину $h = h_0 + \delta \exp(\lambda_\omega t + i\omega x)$ (δ — малая амплитуда) в линеаризованное в окрестности положения равновесия $h = h_0$ уравнение (1.11), получим для инкремента λ_ω уравнение

$$(2.1) \quad \lambda_\omega = - \frac{3\lambda_* \text{sgn}(T_{10} - T_0) h_0^3}{2} (G_* - G) \omega^2 - \alpha \omega^4,$$

где параметр G определен формулой (1.13), а

$$(2.2) \quad G_{\pm} = \frac{1}{h_0(1 - h_0 + \lambda_* h_0)^2}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ последним членом в (2.1) можно пренебречь. Эволюция длинноволновых возмущений определяется знаком произведения $\text{sgn}(T_{10} - T_0)(G_* - G)$.

Для слоя «на потолке» при подогреве со стороны твердой пластины $T_0 > T_{10}$, при этом параметр $G < 0$, инкремент λ_{ω} положителен. Порог устойчивости существует в области длинноволновых возмущений при подогреве со стороны свободной поверхности, т.е. $T_0 < T_{10}$. Условие устойчивости ($\lambda_{\omega} < 0$) имеет вид $G < G_*$. При $G > G_*$ состояние равновесия подогреваемого со стороны газовой фазы слоя жидкости «на потолке» неустойчиво.

Для слоя на подложке при подогреве со стороны газовой фазы $T_{10} > T_0$, $G > 0$ и $\lambda_{\omega} < 0$. Состояние равновесия устойчиво относительно длинноволновых возмущений. При подогреве со стороны твердой пластины $T_{10} < T_0$; состояние равновесия устойчиво, если $G > G_{\pm}$, и неустойчиво, если $G < G_{\pm}$.

В рассмотренных случаях условие потери устойчивости состояния равновесия слоя относительно возмущений с бесконечной длиной волны сводится к уравнению $G = G_*$, в котором выражения G и G_{\pm} определены формулами (1.13), (2.2). Заметим, что уравнение $G = G_*$ может быть получено из общего уравнения, определяющего критическое условие потери устойчивости равновесного состояния заключенной между параллельными пластинами подогреваемой двухслойной жидкости [1], предельным переходом $\omega \rightarrow 0$, $\rho_* \rightarrow 0$, $\mu_* \rightarrow 0$, где ρ_{\pm} и μ_{\pm} — отношения плотностей и коэффициентов динамической вязкости жидкостей.

3. Стоячая волна с монотонно изменяющимся уровнем свободной поверхности. Уравнение (1.12) инвариантно относительно преобразования $\xi \rightarrow \xi + \text{const}$. Для определенности будем считать, что при $\xi = 0$ значение h совпадает с невозмущенным, т.е. $h(0) = h_0$. Изучим решения уравнения (1.12), для которых $h(\xi)$ — монотонная функция на $(-\infty, \infty)$, удовлетворяющая условиям $h'(-\infty) = h'(\infty) = 0$. В силу монотонной зависимости $h(\xi)$ можно считать $h'(\xi)$ функцией h . Обозначая через $h_1, h_2 (h_1 < h_2)$ находимые в процессе решения значения h при $\xi = \mp \infty$, получаем

$$(3.1) \quad h' \Big|_{h=h_1} = h' \Big|_{h=h_2} = 0.$$

Из (1.12) с учетом (3.1) после двукратного интегрирования имеем выражение

$$(3.2) \quad h'^2 = (h_2 - h_1)^{-1}(h_2 - h)(h - h_1)F(h),$$

в котором через $F(h)$ обозначена функция

$$(3.3) \quad F = (\varphi - \varphi_1)(h - h_1)^{-1} + (\varphi - \varphi_2)(h_2 - h)^{-1},$$

где

$$(3.4) \quad \varphi = \text{sgn}(T_{10} - T_0) [2h \ln[h/(1 - h + \lambda_* h)] - Gh^2],$$

а φ_1, φ_2 — значения φ в точках h_1, h_2 .

Учитывая инвариантность уравнения (1.12) относительно преобразования $\xi \rightarrow -\xi$, рассмотрим решения с монотонно возрастающей функцией $h(\xi)$. Из (3.2) находится обратная зависимость ξ от h в виде квадратуры

$$(3.5) \quad \xi = (h_2 - h_1) \int_{h_0}^h \frac{d\tau}{\sqrt{(h_2 - \tau)(\tau - h_1)F(\tau)}}.$$

Для того чтобы формулы (3.3)—(3.5) определяли стоячую волну повышения уровня, необходимо выполнение условия

$$(3.6) \quad F(\tau) > 0, \tau \in (h_1, h_2), 0 < h_1 < h_2 < 1.$$

При $h = h_1, h_2$ значения ξ должны быть равны $-\infty, +\infty$. Отсюда и из справедливости разложений при $\tau \rightarrow h_1$

$$F(\tau) \sim \varphi'(h_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)/(h_2 - h_1) + o(\tau - h_1),$$

при $\tau \rightarrow h_2$

$$F(\tau) \sim \varphi'(h_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)/(h_2 - h_1) + o(\tau - h_2)$$

следует необходимость выполнения еще двух условий:

$$(3.7) \quad \varphi'(h_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)(h_2 - h_1)^{-1} = 0;$$

$$(3.8) \quad \varphi'(h_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)(h_2 - h_1)^{-1} = 0.$$

Как видно из формул (3.3)—(3.5), форма свободной поверхности зависит от четырех безразмерных параметров: λ_*, G, h_1, h_2 . В силу (3.7), (3.8) независимыми из них являются только два.

Из (3.7), (3.8) после подстановки выражения (3.4) и ряда преобразований получаем зависимости

$$(3.9) \quad \ln \frac{h_1(1 - h_2 + \lambda_* h_2)}{h_2(1 - h_1 + \lambda_* h_1)} + \frac{(h_2 - h_1)[2 - (1 - \lambda_*)h_1 - (1 - \lambda_*)h_2]}{(h_1 + h_2)(1 - h_1 + \lambda_* h_1)(1 - h_2 + \lambda_* h_2)} = 0;$$

$$(3.10) \quad G = \frac{2}{(1 - h_1 + \lambda_* h_1)(1 - h_2 + \lambda_* h_2)(h_1 + h_2)},$$

связывающие параметры λ_*, G, h_1, h_2 .

Из формулы (3.10) видно, что решение может существовать только при $G > 0$. Для слоя на подложке ($\gamma > 0$) в силу (1.13) решение может существовать только при подогреве со стороны подложки. Для слоя «на потолке» ($\gamma < 0$) в силу (1.13) решение может существовать при $T_{10} > T_0$, т.е. при подогреве со стороны свободной поверхности. На рис. 1 приведена зависимость амплитуды стоячей волны $a = h_2 - h_1$ от наименьшего уровня h_1 при некоторых значениях λ_* . Эта зависимость построена по результатам численного решения уравнения (3.9). Штриховые линии 1, 2 соответствуют пределам $\lambda_* \rightarrow 0, a \rightarrow 1 - h_1$ и определяют границу области, в которой могут существовать решения типа стоячей волны повышения уровня. В этой области справедливость неравенства (3.6) проверялась численно. Оказалось, что всюду в области это неравенство выполняется для слоя «на потолке» и не выполняется для слоя на подложке. Таким образом, решения типа стоячей волны повышения уровня существуют только для слоя, расположенного «на потолке» и подогреваемого со стороны свободной поверхности.

Как видно из рис. 1, амплитуда стоячей волны достигает максимального значения либо при $h_1 \rightarrow 0$ ($\lambda_* < \lambda_*^0 \approx 0,22$), либо при $h_2 \rightarrow 1$ ($\lambda_* > \lambda_*^0$). При $\lambda_* > \lambda_*^0$ с ростом λ_* максимальная амплитуда уменьшается и стремится к нулю, когда $\lambda_* \rightarrow 2/3$. При $a = 0$ имеем $h_2 = h_1 = h_0$. Поэтому при заданном значении λ_* кривая $a(h_1)$ определяет амплитуды стационарных решений, отвечающих от равновесного состояния с $h = h_0$. Скорость, давление и температура для этих решений находятся через $h(\xi)$ по формулам (1.9), (1.10).

Значению $\lambda_* = 0,087$ соответствует система глицерин — воздух при температуре 15 °С, а $\lambda_* = 0,583$ при комнатной температуре — система глицерин—оливковое масло, в которой оливковое масло играет роль «газовой

фазы». Отношение коэффициентов динамической вязкости $\mu_* = \mu_1/\mu$ оливкового масла μ_1 и глицерина μ равно 0,043. Поэтому динамическим воздействием слоя оливкового масла на слой глицерина можно пренебречь.

Значение толщины h_0 , при которой происходит ветвление равновесного состояния, зависит от параметра λ_* . Аналитическая зависимость h_0 от λ_* получается представлением уравнения (3.9) в виде ряда по малой амплитуде в окрестности состояния равновесия с $h_1 = h_2 = h_0$ и приравниванием к нулю первого ненулевого члена разложения (он имеет порядок $O(a^3)$). Эта зависимость определяется формулой

$$(3.11) \quad h_0 = 1/(3(1 - \lambda_*)),$$

полученной в [3], где было дано аналитическое представление малоамплитудного решения. Таким образом, в слое жидкости «на потолке» стационарный режим конвекции с монотонно изменяющимся уровнем свободной поверхности может существовать лишь в особом случае, когда толщина h_0 слоя в равновесном состоянии связана с отношением коэффициентов теплопроводности газа и жидкости формулой (3.11).

На рис. 2 приведена зависимость амплитуды волны a от параметра G , построенная при помощи формул (3.9), (3.10). Критические значения G_* , при которых появляются ответвляющиеся стационарные решения для $\lambda_* = 0,087; 0,3; 0,4; 0,583$, равны соответственно 6,16; 4,73; 4,05; 2,81. Все ответвляющиеся решения существуют в закритической области $G > G_*$. Естественно ожидать, что они являются устойчивыми. Видно, что интервал значений параметра G , в котором существуют ответвляющиеся решения, уменьшается, когда λ_* растет.

При $\lambda_* = 0,583$ параметр G изменяется от $G_* = 2,81$ до значения $G = 2,86$, при котором амплитуда волны равна 0,4. Для системы глицерин — оливковое масло параметр $\sigma_T \approx 0,2$ дин/(см · град), разность плотностей $\rho = 0,342$ г/см³. Если ускорение силы тяжести равно $10^{-2} g_0$, то из (1.13) находим, что $G_* = 2,81$ достигается при критическом перепаде температур $(T_{10} - T_0) = 6,82$ °С, а $G = 2,86$ при перепаде $T_{10} - T_0 = 6,69$ °С. Таким образом, при уменьшении перепада температур на пластинах на 0,13 °С амплитуда стоячей волны растет от нуля до значения 0,4, при котором $h_2 = 1$ (расположенный «на потолке» слой глицерина на бесконечности касается противоположной пластины).

При ускорении силы тяжести $g = 10^{-2} g_0$ при $d = 1$ см оценки, проведенные при помощи (1.13) для слоя глицерина «на потолке», показывают, что ответвляющиеся стационарные решения возникают при перепаде $(T_{10} - T_0)_* \approx 37,5$ °С и существуют вплоть до $T_{10} - T_0 = 18,2$ °С.

4. Стоячие волны с выпуклостью в сторону газовой фазы. Рассмотрим вопрос о существовании у уравнения (3.2) решений, представляющих собой

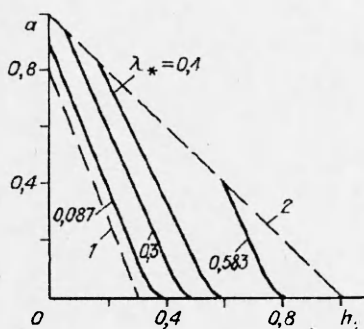


Рис. 1

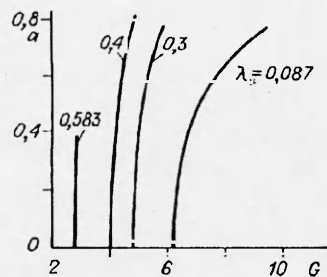


Рис. 2

стоячую уединенную волну, имеющую в окрестности значения $\xi = 0$ выпуклость в сторону газовой фазы. При $\xi = \pm\infty$ $h = h_1$, а при $\xi = 0$ $h = h_2$, причем $h_1 < h_2$. Решение должно удовлетворять условиям (3.1) и описываться на интервале $(-\infty, 0)$ формулой (3.5), в которой нижний предел интегрирования равен h_2 . Значение ξ в (3.5) должно стремиться к $-\infty$ при $h \rightarrow h_1$. Вместо двух равенств (3.7), (3.8) необходимо выполнение только одного (3.7). Из этого равенства с учетом (3.4) находим зависимость параметра G от уровней h_1, h_2 :

$$(4.1) \quad G = \frac{2}{(h_2 - h_1)^2} \left[h_2 \ln \frac{h_2(1 - h_1 + \lambda_* h_1)}{h_1(1 - h_2 + \lambda_* h_2)} - \frac{h_2 - h_1}{1 - h_1 + \lambda_* h_1} \right].$$

В общем случае форма свободной поверхности зависит от трех параметров: h_1, h_2, λ_* . Из (4.1) предельным переходом $h_2 \rightarrow h_1 = h_0$ получаем $G \rightarrow G_*$, где G_* определяется формулой (2.2). В расчетах исследовалось двухпараметрическое семейство решений, для которых средний уровень $(h_1 + h_2)/2$ постоянен и равен невозмущенному уровню h_0 . Значение λ_* варьировалось от 0 до 1,5. При $\lambda_* \in (0, 1, 5)$, $h_0 \in (0, 1)$ значение G , определенное формулой (4.1), оказалось положительным, поэтому, согласно (1.13), решение может существовать для слоя «на потолке» при $T_{10} > T_0$, а для слоя на подложке — при $T_{10} < T_0$. Знак F зависит от $\text{sgn}(T_{10} - T_0)$. Положительность $F(h)$ при $h \in (h_1, h_2)$ означает существование стоячей волны с выпуклостью в сторону газовой фазы для слоя «на потолке», отрицательность — для слоя на подложке. Если функция F не знакоопределена при $h \in [h_1, h_2]$, то рассматриваемого типа решения не существуют ни для слоя на подложке, ни для слоя «на потолке».

Изучение знака функции $F(h)$ показало следующее. Для подогреваемого со стороны газовой фазы слоя жидкости «на потолке» стационарное решение типа стоячей волны с выпуклостью в сторону газовой фазы существует при любом $\lambda_* \in (0, 1, 5]$, если толщина невозмущенного слоя $h_0 \leq 1/3$. При $h_0 > 1/3$ такое решение существует, если отношение коэффициентов теплопроводности λ_* принадлежит интервалу $[\lambda_*(h_0), 1, 5]$, где

$$(4.2) \quad \lambda_*(h_0) = (3h_0 - 1)/3h_0.$$

Если $h_0 > 1/3$ и $\lambda_* = \lambda_*(h_0)$, то при $h \rightarrow h_2$ функция $F(h) \rightarrow 0$, выполняется равенство (3.8). Интеграл в (3.5) при $h \rightarrow h_2$ расходится. Решение вырождается в решение типа стоячей волны повышения уровня. Если $h_0 > 1/3$, $0 < \lambda_* < \lambda_*(h_0)$, то решения типа стоячей волны с выпуклостью не существуют и для слоя на подложке, и для слоя «на потолке». При $h_0 < 1/3$ решение для слоя на подложке также не существует.

Картина ветвления состояния равновесия расположенного «на потолке» плоского слоя глицерина показана на рис. 3 для случая, когда нижней средой является воздух ($\lambda_* = 0,082$), и на рис. 4, когда роль «газовой фазы» играет

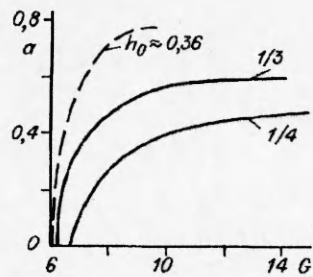


Рис. 3

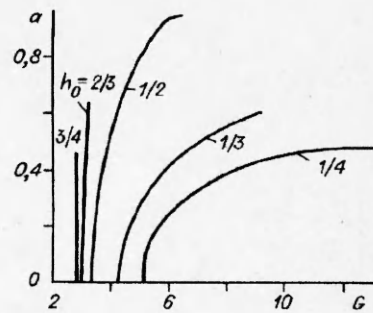
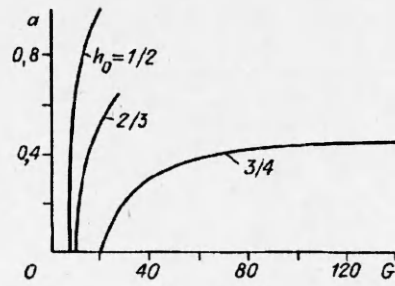


Рис. 4

оливковое масло ($\lambda_* = 0,503$). На рис. 3 зависимость амплитуды волны a от параметра G приведена для $h_0 = 1/4$ и $1/3$. Штриховая линия соответствует значению $h_0 = 1/(3(1 - \lambda_*)) \approx 0,36$, при котором решение вырождается в стоячую волну повышения уровня. Ветви на рис. 4 соответствуют $h_0 = 1/4, 1/3, 1/2, 2/3$ и $3/4$. Вырождение решения происходит при $h_0 = 1/(3(1 - \lambda_*)) \approx 0,84$.



Р и с. 5

Значение $a = 0$ для невозмущенного слоя, устойчивого, когда параметр G меньше значения, определенного формулой (2.2) $G_*(h_0, \lambda_*)$, при котором появляются ответвляющиеся решения. Все ответвляющиеся решения существуют в закритической области.

5. Стоячие термокапиллярные волны с вогнутостью в сторону газовой фазы. Формулы (3.3) — (3.5) описывают решение типа стоячей уединенной волны, имеющей в окрестности значения $\xi = 0$ вогнутость в сторону газовой фазы, если интегрирование в (3.5) ведется от значения $h = h_1$, а при $h = h_2$ ($h_2 > h_1$) подынтегральное выражение имеет неинтегрируемую особенность. Из формул (3.8), (3.4) находится зависимость параметра G от h_1, h_2 и λ_* :

$$(5.1) \quad G = \frac{2}{(h_2 - h_1)^2} \left[h_1 \ln \frac{h_1(1 - h_2 + \lambda_* h_2)}{h_2(1 - h_1 + \lambda_* h_1)} + \frac{h_2 - h_1}{1 - h_2 + \lambda_* h_2} \right].$$

В пределе при $h_2 \rightarrow h_1 = h_0$ из (5.1) находим, что параметр G стремится к значению G_* , определенному формулой (2.2). При $\lambda_* \in (0, 1,5)$ изучались решения, для которых $(h_1 + h_2)/2 = h_0$. Изучение зависимости амплитуды волны $a = h_2 - h_1$ от параметров G_*, λ_* и знака функции F на интервале (h_1, h_2) привело к следующему результату.

Для подогреваемого со стороны газовой фазы слоя жидкости «на потолке» стационарное решение типа стоячей волны с вогнутостью в сторону газовой фазы существует, если толщина невозмущенного слоя $h_0 \geq 1/3$, а параметр λ_* принадлежит интервалу $(0, \lambda_*(h_0))$, где $\lambda_*(h_0)$ определяется формулой (4.2). Ветвление происходит в закритическую область. При $h_0 < 1/3$ для слоя жидкости «на потолке» решения исследуемого типа не существуют. Для слоя на подложке решения с вогнутостью в сторону газовой фазы не существуют ни при одном значении $h_0 \in (0, 1)$.

Для системы глицерин — воздух (слой глицерина «на потолке») на рис. 5 показана зависимость амплитуды ответвляющихся решений от параметра G для трех значений толщины h_0 .

При всех значениях h_0 решения перестают существовать, когда при $\xi = \pm \infty$ толщина $h_2 \rightarrow 1$. При этом минимальный уровень $h_1 \rightarrow 0$ при $h_0 = 1/2$. При $h_2 \rightarrow 1$ значение $h_1 \rightarrow 0,5$, если $h_0 = 3/4$, и $h_1 \rightarrow 1/3$, если $h_0 = 2/3$. Оценки показывают, что при ускорении силы тяжести $g = 10^{-3}g_0$ ответвляющиеся решения появляются, когда критический перепад температур равен 23,65; 47,31 и 70,01 °C для толщин $h_0 = 3/4, 2/3$ и $1/2$ соответственно. Вдоль каждой ветви перепад температур уменьшается. При $h_2 = 0,98$ для $h = 3/4, 2/3$ и $1/2$ он равен 3,49; 18,82 и 27,6 °C.

Функция $h(\xi)$ для стоячей волны, выпуклой или вогнутой в сторону газовой фазы, является четной. При $\xi = 0$ значения $h' = h''' = 0$ и, согласно (1.9), (1.10), продольная компонента скорости $u = 0$. Поэтому течение имеет двухвихревую структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith R.A. On convective instability induced by surface tension gradients // J. Fluid Mech. — 1966. — V. 24, N 2.
2. Колбосынов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.
3. Бадрагинова Л.Г. О длинноволновой термокапиллярной конвекции в слое жидкости под крышечкой // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1989. — Вып. 89.

г. Новосибирск

Поступила 15/IV 1993 г.

УДК 532.526

В.Я. Киселев, А.А. Маслов, А.Н. Шиплюк

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЛЬТА-КРЫЛА В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Последние годы в космических программах наметился интерес к созданию высотного космического самолета (ВКС), способного совершать челночные рейсы на земную орбиту для доставки туда различных грузов (в том числе блоков космических кораблей). Среди разработчиков на конференциях и в печати идет обсуждение различных форм и компоновок такого аппарата, проводятся наземные испытания моделей, просчитываются математические модели.

Исследования на наземных аэродинамических установках не позволяют выполнить полное моделирование реальных условий обтекания ВКС, поэтому основную роль в определении его аэродинамических характеристик (АДХ) играет математическое моделирование, а экспериментальные данные используются для верификации математических моделей. В исследовательской аэродинамической программе «Гермес» используются тестовые конфигурации и тестовые режимы, представленные в [1]. Вследствие сложности экспериментов для получения надежных данных важно проводить измерения в разных условиях (на различных установках, несколькими методами).

В данной работе приведены результаты весовых испытаний тестовой модели программы «Гермес» — дельта-крыла при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 20,6$, числа Рейнольдса, рассчитанных по длине модели, $Re_L = 0,26 \cdot 10^5$, $0,45 \cdot 10^5$ и $M_\infty = 8,0$, $Re_L = 7,1 \cdot 10^5$, $8,5 \cdot 10^5$ в сравнении с данными других авторов.

1. Оборудование и методика эксперимента. Исследования при $M_\infty = 20,6$ проводились в азотной аэродинамической трубе Т-327 ИТПМ СО РАН [2]. Установка имеет рабочую часть в виде камеры давления, поток создается с помощью конического сопла с диаметром выходного сечения 220 мм. Для проведения измерений использовались внешние трехкомпонентные тензосенсоры с оригинальной системой охлаждения. Диапазон измерения продольной силы $X = 0 \div 0,5$ Н, нормальной силы $Y = -0,5 \div 0,5$ Н, продольного момента $M_x = -0,05 \div 0,05$ Н · м. Точность измерений по результатам многократных статических тарировок составила по X 0,5 %, Y — 0,5 %, M_x — 0,25 % от диапазона измерений. Более подробно информация о весах и методике проведения весового эксперимента на Т-327 представлена в [3, 4], результаты испытаний контрольных моделей (шар, затупленный конус, модели AGARD HB-1 и HB-2) приведены в [5].

Эксперименты при $M_\infty = 8,0$ проводились в аэродинамической трубе Т-326 ИТПМ СО РАН. Диапазон моделируемых параметров: $M_\infty =$