

УДК 531.01

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. Бегматов

Национальный университет Узбекистана, 100174 Ташкент, Узбекистан

E-mail: begmatov_ab@rambler.ru

Изучаются продольные волны в насыщенной пористой среде, моделируемой двухфазной средой. Получены точные выражения для скорости распространения волны и коэффициента затухания. Исследована асимптотика высокочастотных и низкочастотных волн, а также частные случаи мягких и сухих грунтов.

Ключевые слова: волна, пористость, затухание, скорость, частота, дисперсия, асимптотика.

DOI: 10.15372/PMTF20190107

Волновые процессы исследованы в различных неоднородных средах [1–5], в частности в насыщенных пористых средах. Изотермическое движение насыщенной пористой среды, моделируемой двухфазной средой, состоящей из твердой и жидкой фаз, в случае малых возмущений описывается системой четырех уравнений: двух уравнений движения и двух уравнений неразрывности [3, 4].

Представление векторов скоростей перемещения твердой и жидкой фаз соответственно в виде

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \boldsymbol{\psi}_1), \quad \mathbf{w} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \boldsymbol{\psi}_2)$$

($\varphi_1, \varphi_2, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2$ — скалярные и векторные потенциалы) позволяет расщепить эту систему на системы уравнений для продольных и поперечных волн.

Таким образом, для продольных волн получаем систему трех уравнений относительно скалярных потенциалов φ_1, φ_2 и давления p . Если при этом рассматривать плоские гармонические продольные волны, т. е. решение вида

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 e^{i(\omega t - \eta x)}, \quad \varphi_2 = \varphi_2^0 e^{i(\omega t - \eta x)}, \quad p = p_0 e^{i(\omega t - \eta x)}$$

($\varphi_1^0, \varphi_2^0, p_0$ — постоянные), то условие существования таких решений выполняется в случае, когда ω и η удовлетворяют дисперсионному уравнению [3, 4]

$$\xi^4 + \xi^2 \left(M_1 + \frac{i}{\omega \tau} M_2 \right) + M_3 \left(1 - \frac{i}{\omega \tau} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\xi = \frac{\eta}{\omega} \frac{1}{\sqrt{B\rho}}, \quad M_1 = -1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \left(\beta_1 K (1 - m_0) (2 - \beta_1 K) - \frac{\beta}{B} \right),$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \left((1 - (1 - m_0)\beta_1 K)^2 + (1 - m_0) \frac{\beta}{B} \right), & M_3 &= \frac{m_0 \rho_\infty^2}{\rho_1 \rho_2} \frac{\beta}{B}, & \rho &= \frac{\rho_1 \rho_2}{m_0 \rho_\infty}, \\
\tau &= \frac{\rho_1 \rho_2 a_0}{\mu m_0 \rho_\infty}, & \rho_0 &= (1 - m_0)\rho_1 + m_0 \rho_2, & \frac{1}{\rho_\infty} &= \frac{1 - m_0}{\rho_1} + \frac{m_0}{\rho_2}, \\
\beta &= (1 - m_0)\beta_1(1 - \beta_1 K) + m_0 \beta_2, & B &= (\lambda_1 + 2\lambda_2)^{-1},
\end{aligned}$$

$\rho_1, \rho_2, \beta_1, \beta_2$ — плотности и коэффициенты сжимаемости твердой и жидкой фаз; m_0 — пористость; μ — динамическая вязкость; a_0 — параметр, характеризующий фильтрационное сопротивление; λ_1, λ_2 — параметры Ламе; K^{-1} — эффективная сжимаемость скелета среды в целом.

Дисперсионное уравнение (1) анализировалось Я. И. Френкелем, М. А. Био и другими авторами, сравнение работ которых проведено в [4]. При этом за основу бралось приближенное решение Я. И. Френкеля, найденное с учетом только двух членов разложения (порядка $i\omega\tau$) ξ^2 по степеням малого параметра $i\omega\tau$.

В настоящей работе получено точное выражение для корней дисперсионного уравнения и приведено некоторое уточненное выражение для асимптотики скорости распространения, а также коэффициенты затухания продольных волн первого и второго рода (в терминах Я. И. Френкеля).

Разрешая (1) относительно ξ^2 , находим

$$\xi^2 = -B_0 \pm \sqrt{D}, \quad \xi_k = [-B_0 + (-1)^k \sqrt{D}]^{1/2}, \quad k = 1, 2,$$

где

$$D = B_0^2 - M_3(1 - i/(\omega\tau)), \quad B_0 = B_1 + iB_2, \quad B_1 = M_1/2, \quad B_2 = M_2/(2\omega\tau).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
S^{(k)} &= \operatorname{Re} \xi_k, & \sigma^{(k)} &= \operatorname{Im} \xi_k, & D_1 &= \operatorname{Re} \sqrt{D}, & D_2 &= \operatorname{Im} \sqrt{D}, \\
a^{(k)} &= -B_1 + (-1)^k D_1, & b^{(k)} &= -B_2 - (-1)^k D_2, & k &= 1, 2, \\
a_0 &= B_1^2 - B_2^2 - M_3, & b_0 &= 2B_1 B_2 + M_3/(\omega\tau),
\end{aligned} \tag{2}$$

где верхний индекс $k = 1, 2$ соответствует параметрам, относящимся к волнам первого и второго рода.

Вещественная и мнимая части $\sqrt{D}$ и ξ_k имеют вид

$$\begin{aligned}
D_k &= [(-1)^{k-1} a_0 + \sqrt{a_0^2 + b_0^2}]^{1/2} / \sqrt{2}, & S^{(k)} &= [a^{(k)} + \sqrt{(a^{(k)})^2 + (b^{(k)})^2}]^{1/2} / \sqrt{2}, \\
\sigma^{(k)} &= [-a^{(k)} + \sqrt{(a^{(k)})^2 + (b^{(k)})^2}]^{1/2} / \sqrt{2}, & k &= 1, 2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим

$$\frac{\eta}{\omega} = \frac{1}{v} + i \frac{\delta}{\omega},$$

тогда скорость и коэффициенты затухания соответственно определяются по формулам

$$v = \frac{1}{\operatorname{Re} \xi} (B\rho)^{-1/2}, \quad \delta = \omega \operatorname{Im} \xi (B\rho)^{1/2}.$$

Отсюда для волн первого и второго рода получаем

$$v^{(k)} = \frac{1}{S^{(k)} \sqrt{B\rho}}, \quad \delta^{(k)} = \omega \sigma^{(k)} \sqrt{B\rho}, \tag{4}$$

где $S^{(k)}, \delta^{(k)}$ определяются из формул (3).

Формулы (3), (4) справедливы во всем диапазоне значений параметров задачи, в частности параметра $\varepsilon = \omega\tau$. Исследуем асимптотику скорости и коэффициента затухания для случаев низкочастотных волн (или больших фильтрационных сопротивлений), т. е. малых значений $\varepsilon = \omega\tau$, и высокочастотных волн (или малых фильтрационных сопротивлений), т. е. больших значений $\varepsilon = \omega\tau$.

1. Рассмотрим случай низкочастотных волн (больших фильтрационных сопротивлений). Для волн первого рода, удерживая члены порядка ε^2 , вещественную и мнимую части $\sqrt{D}$ представим в виде

$$D_1 = \frac{|b_{01}|}{M_2} \left[1 + \left(\frac{a_{01}}{b_{01}} \right)^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right], \quad D_2 = \frac{M_2}{2\varepsilon} \left[1 + 2 \frac{\varepsilon^2}{M_2^2} \left(\frac{b_{01}^2}{M_2^2} - a_{01} \right) \right], \quad (5)$$

где

$$a_{01} = (M_1^2 - 4M_3)/4, \quad b_{01} = -(M_3 + M_1 M_2/2).$$

С учетом (2), (5) из (3) с принятой точностью получаем соотношения

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= \xi_0 - \frac{1}{2} \frac{a_{01}^2}{|b_{01}| M_2} \varepsilon^2, & b^{(1)} &= (b_{01}^2 - a_{01} M_2^2) \frac{\varepsilon}{M_2^3} = \frac{\varepsilon}{M_3} (M_3 + M_1 \xi_0 + \xi_0^2), \\ a^{(2)} &= -(M_1 + \xi_0), & b^{(2)} &= -(\xi_1 + M_2/\varepsilon), \\ \theta^{(1)} &= \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{\xi_1^2}{\xi_0} - 2 \frac{a_{01}^2}{M_2 |b_{01}|} \right) \right]^{-1} \sqrt{\frac{1}{\xi_0 B \rho}}, & \frac{\delta^{(1)}}{\omega} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_0}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\xi_0 = M_3/M_2$; $\xi_1 = b^{(1)}/\varepsilon$.

В формулах (6) асимптотики $v^{(1)}$, $\delta^{(1)}$ получены с погрешностью $O(\varepsilon^4)$, $O(\varepsilon^3)$ соответственно. Ограничиваясь в (6) членами порядка ε , имеем

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\xi_0 B \rho}}, \quad \delta^{(1)} = \frac{\omega \varepsilon \xi_1}{2 \sqrt{\xi_0}}. \quad (7)$$

Выражения (7) совпадают с выражениями для скорости волны и коэффициента затухания, приведенными в [4]. В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ волна первого рода становится незатухающей ($\delta^{(1)} = 0$).

Для волн второго рода выражения для скорости волны и коэффициента затухания принимают вид

$$v^{(2)} = \left(1 - \frac{M_1 + \xi_0 + \xi_1}{2M_2} \varepsilon \right)^{-1} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M_2 B \rho}}, \quad \delta^{(2)} = \left(1 + \frac{M_1 + \xi_0 + \xi_1}{2M_2} \varepsilon \right) \sqrt{\frac{M_2}{2\varepsilon} B \rho}. \quad (8)$$

Согласно (8) в случае волн очень низкой частоты или очень больших фильтрационных сопротивлений имеет место быстро затухающая волна второго рода, распространяющаяся с малой скоростью.

В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ скорость волны стремится к нулю ($v^{(2)} \rightarrow 0$) и происходит мгновенное затухание ($\delta^{(2)} \rightarrow \infty$), что согласуется с результатами, полученными в [4].

Следует отметить, что при достаточно больших $\delta^{(k)}$ амплитуда волны значительно уменьшается при удалении от сечения $x = 0$ даже на малое расстояние, которое волна проходит за очень малый промежуток времени. С учетом этого в случае достаточно больших $\delta^{(k)}$ волну будем называть быстро затухающей, а в предельном случае ($\delta^{(k)} \rightarrow \infty$) — мгновенно затухающей.

2. В случае высокочастотных волн (очень малых фильтрационных сопротивлений), разлагая D_1 и D_2 по степеням $\varepsilon_1 = 1/\varepsilon$ ($\varepsilon = \omega\tau$) и ограничиваясь величинами порядка $O(1/\varepsilon^3)$, имеем

$$a^{(k)} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \left(D_1 - (-1)^k \frac{M_1}{2} \right), \quad b^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-M_2 \frac{\varepsilon_1}{2} - (-1)^k D_2 \right), \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Здесь

$$D_1 = \sqrt{a_{01}} \left(1 + \frac{b_{01}^2 - a_{01} M_2^2}{4a_{01}^2} \varepsilon_1^2 \right)^{1/2}, \quad D_2 = \frac{|b_{01}| \varepsilon_1}{2\sqrt{a_{01}}} \left(1 + \frac{b_{01}^2 - a_{01} M_2^2}{4a_{01}^2} \varepsilon_1^2 \right)^{-1/2},$$

$$a_{01} = (M_1^2 - 4M_3)/4, \quad a_{02} = M_1^2/4, \quad b_{01} = M_3 + M_1 M_2/2.$$

Скорость волны $v^{(k)}$ и коэффициент затухания $\delta^{(k)}$ находим путем подстановки (9) в (3) и далее $S^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ в (4). При этом выражение для скорости распространения волны первого рода принимает вид

$$\theta^{(1)} = \left[a_0^{(1)} \left(1 + \frac{(b_1^{(1)})^2 - 4a_0^{(1)} a_1^{(1)}}{4(a_0^{(1)})^2} \varepsilon_1^2 \right) B\rho \right]^{-1/2}. \quad (10)$$

При вычислении коэффициента затухания, удерживая в (9) члены разложения порядка $O(\varepsilon_1^2)$, получаем

$$\delta^{(1)} = \frac{\omega \varepsilon_1 |b_1^{(1)}|}{2\sqrt{a_0^{(1)}}} \sqrt{B\rho} (1 + O(\varepsilon_1^2)), \quad (11)$$

где

$$a_0^{(1)} = a^{(1)}|_{\varepsilon \rightarrow 0} = -\left(\frac{M_1}{2} + \sqrt{a_{01}} \right) = \frac{2M_3}{|M_1| + \sqrt{M_1^2 - 4M_3}},$$

$$a_1^{(1)} = \frac{b_{01}^2 - a_{01} M_2^2}{4a_{01}^{3/2}} \frac{\varepsilon_1^2}{2}, \quad b_1^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-M_2 + \frac{|b_{01}|}{\sqrt{a_{01}}} \right).$$

В предельном случае $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ($\varepsilon = \omega\tau \rightarrow \infty$) с учетом (10) имеем

$$\theta^{(1)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(1)} B\rho}} = \sqrt{\frac{|M_1| + \sqrt{M_1^2 - 4M_3}}{2M_3 B\rho}} = \sqrt{\frac{|M_1| + \sqrt{M_1^2 - 4M_3}}{2\beta\rho_\infty}}, \quad (12)$$

$$\delta^{(1)} = \frac{|b_1^{(1)}|}{2\tau} \sqrt{\frac{B\rho}{a_0^{(1)}}} = \frac{|b_1^{(1)}|}{2c\tau(a_0^{(1)})^{1/2}},$$

где $c = 1/\sqrt{B\rho}$ — скорость фронта волны переупаковки; $\delta^{(1)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = 0$ при фиксированном значении ω .

Представляет интерес случай мягких грунтов, когда можно положить $\beta/B = 0$. При этом имеют место следующие предельные равенства:

$$M_1 \rightarrow -1, \quad M_2 \rightarrow \rho_\infty/\rho_0, \quad M_3 \rightarrow 0, \quad b_1^{(1)}/\sqrt{a_0^{(1)}} \rightarrow 0.$$

Тогда соотношения (12) принимают вид

$$\theta^{(1)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho_\infty}} = v_\infty, \quad \delta^{(1)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = 0. \quad (13)$$

В этом случае незатухающая волна первого рода распространяется с так называемой замороженной скоростью v_∞ .

Аналогично для волн второго рода получаем

$$\theta^{(2)} = \left[1 + \left(\left(\frac{b_1^{(2)}}{2a_0^{(2)}} \right)^2 + \frac{a_1^{(2)}}{a_0^{(2)}} \varepsilon_1^2 \right) \right]^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{a_0^{(2)} B \rho}}, \quad \delta^{(2)} = \frac{b_1^{(2)} \omega \varepsilon_1}{2 \sqrt{a_0^{(2)}}} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{a_1^{(2)}}{b_1^{(2)}} \varepsilon_1 \right)^2 \right] B \rho}, \quad (14)$$

где

$$a_0^{(2)} = a^{(2)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \left(-M_1 + \sqrt{M_1^2 - 4M_3} \right), \quad a_1^{(2)} = \frac{b_{01}^2 - M_2^2 a_{01}}{8a_{01}^{3/2}}, \quad b_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left(M_2 + \frac{|b_{01}|}{\sqrt{a_{01}}} \right).$$

Тогда выражения для предельных значений скорости и коэффициента затухания (при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и фиксированном значении ω) имеют вид

$$\theta^{(2)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(2)} B \rho}}, \quad \delta^{(1)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = 0,$$

а в случае $\beta/B = 0$ принимают вид

$$\theta^{(2)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{B \rho}} = c, \quad \delta^{(1)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = 0.$$

Следовательно, в данном частном случае имеет место незатухающая волна переупаковки.

Рассмотрим частный случай продольных волн в мягких грунтах. В соответствии с классификацией [3, 4] среда называется мягкой, если величина, характеризующая степень уплотненности грунта, значительно меньше единицы: $\beta_1 K \ll 1$. При этом для мягкой среды в качестве малого параметра, характеризующего степень сжимаемости, пористость и упругие свойства твердой и жидкой фаз, можно положить $\varepsilon_0 = \beta/B$. Тогда дисперсионное уравнение (1) для плоских гармонических продольных волн можно представить в виде [4]

$$\xi^4 + \xi^2 \left(-1 + A_1 \varepsilon_0 + (1 + A_2 \varepsilon_0) \frac{i}{\omega \tau} \right) + A_3 \varepsilon_0 \left(1 - \frac{i}{\omega \tau} \right) = 0,$$

где

$$\xi = \frac{\eta}{\omega \sqrt{B \rho}}, \quad \beta = (1 - m_0) \beta_1 (1 - \beta_1 K) + m_0 \beta_2, \quad B = (\lambda_1 + 2\lambda_2)^{-1},$$

$$A_1 = \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \left(B K \frac{\beta_1}{\beta_2} (1 - m_0) (2 - \beta_1 K) - 1 \right),$$

$$A_2 = (1 - m_0) \left(1 - 2 \frac{\beta_1}{\beta} B K + \frac{1 - m_0}{\beta} \beta_1^2 K B \right), \quad A_3 = \frac{m_0 \rho_\infty^2}{\rho_1 \rho_2}.$$

При этом в формулах (2)–(4) будем полагать

$$a_0 = B_1^2 - B_2 - C_1, \quad b_0 = 2B_1 B_2 - C_2, \quad B_1 = -(1 + A_1 \varepsilon_0)/2, \quad B_2 = (1 + A_2 \varepsilon_0)/(2\zeta), \\ C_1 = A_3 \varepsilon_0, \quad C_2 = -A_3 \varepsilon_0/(\omega \tau), \quad \zeta = (\rho_0/\rho_\infty) \omega \tau.$$

Представляя a_0, b_0 в виде

$$a_0 = a_{01} - a_{02}/(4\zeta^2), \quad b_0 = -b_{00}/(2\zeta), \\ a_{01} = [(1 - A_1 \varepsilon_0)^2 - 4A_3 \varepsilon_0]/4, \quad a_{02} = (1 + A_2 \varepsilon_0)^2/4, \\ b_{00} = -((-1 + A_1 \varepsilon_0)(1 + A_2 \varepsilon_0) + 2A_3 \rho_0/\rho_\infty) \quad (15)$$

и учитывая (2), имеем

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}\zeta} \left((-a_{02} + a_{01}\zeta^2) + \sqrt{(-a_{02} + a_{01}\zeta^2)^2 + \frac{1}{4}b_{00}^2\zeta^2} \right)^{1/2}, \\ D_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\zeta} \left((a_{02} - a_{01}\zeta^2) + \sqrt{(a_{02} - a_{01}\zeta^2)^2 + \frac{1}{4}b_{00}^2\zeta^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) в (3), затем $S^{(k)}$ и $\delta^{(k)}$ в (4), получаем точные выражения для скорости распространения и коэффициента затухания волн первого ($k = 1$) и второго ($k = 2$) рода.

Рассмотрим случай низкочастотных волн (больших фильтрационных сопротивлений), которым соответствуют малые значения параметра $\zeta = (\rho_0/\rho_\infty)\omega\tau$. Ограничиваясь членами порядка $O(\zeta^2)$, с учетом (15), (2) формулы (16), (3) представим в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{b_{00}}{2\sqrt{a_{02}}} \sqrt{1 + \frac{a_{01}}{b_{00}}\zeta^2}, \quad D_2 = \frac{\sqrt{a_{02}}}{\zeta} \sqrt{1 + \frac{b_{00}^2 - 4a_{01}a_{02}}{4a_{02}^2}\zeta^2}, \\ S^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_0^{(1)}\varepsilon_0 - a_1^{(1)}\zeta^2 + \sqrt{(a_0^{(1)}\varepsilon_0 + a_1^{(1)}\zeta^2)^2 + (b_1^{(1)})^2\zeta^2} \right)^{1/2}; \\ \sigma^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-a_0^{(1)}\varepsilon_0 + a_1^{(1)}\zeta^2 + \sqrt{(a_0^{(1)}\varepsilon_0 + a_1^{(1)}\zeta^2)^2 + (b_1^{(1)})^2\zeta^2} \right)^{1/2}; \\ b_1^{(1)} &= \frac{b_{00}^2 - 4a_{01}a_{02}}{4a_0^{3/2}}, \quad a_0^{(1)} = \frac{\rho_0}{\rho} (1 + A_2\varepsilon_0)^{-1}, \quad a_1^{(1)} = \frac{b_{00}}{4\sqrt{a_{02}}} \left(\frac{a_{01}}{b_{01}} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (4), получаем выражения для скорости и коэффициента затухания волн первого (нижний знак) и второго (верхний знак) рода. В предельном случае $\zeta \rightarrow 0$ имеем

$$v^{(1)}|_{\zeta \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 a_0^{(1)} B \rho}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + A_2\varepsilon_0)\beta\rho_0}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + A_2\varepsilon_0}}, \quad \delta^{(1)} = 0, \quad (18)$$

где $v_0 = 1/\sqrt{\beta\rho_0}$ — “равновесная” скорость.

Следовательно, в предельном случае $\zeta \rightarrow 0$ имеет место незатухающая волна первого рода, которая распространяется со скоростью, близкой к “равновесной” скорости v_0 , определяемой суммой сжимаемости материала и суммарной плотностью фаз.

Для волн второго рода, как и для волн первого рода, получаем

$$v^{(2)} = \sqrt{\frac{2\zeta(1 + A_2\varepsilon_0)}{1 + A_2\varepsilon_0 + a^{(2)}\zeta}} \frac{1 + O(\zeta^2)}{B\rho}, \quad \delta^{(2)} = \omega \sqrt{\frac{1 + A_2\varepsilon_0 - a^{(2)}\zeta}{2\zeta(1 + A_2\varepsilon_0)}} B\rho(1 + O(\zeta^2)), \quad (19)$$

где $a^{(2)} = 1 - \varepsilon_0(A_1 + A_2 + \rho_0/\rho)$. Отсюда в предельном случае мягких сред ($\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $O(\zeta^2) \ll 1$) следует

$$v^{(2)} = \sqrt{2\zeta} c, \quad \frac{\delta^{(2)}}{\omega} = \sqrt{\frac{B\rho}{2\zeta}}. \quad (20)$$

В (20) параметр ζ и скорость фронта волны переупаковки c являются малыми величинами. Так, согласно [4] при значениях параметров кварцевого песка $m_0 = 0,3$, $\rho_1 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\beta_1 = 2 \cdot 10^{-11}$ Па⁻¹, $\beta_2 = 4 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹, $B = 10^{-8}$ Па⁻¹ $c = 1/\sqrt{B\rho} = 0,14$ км/с.

Следовательно, быстро затухающие (при достаточно малом ζ) волны второго рода распространяются с малой скоростью, уменьшающейся при уменьшении частоты и полностью затухающей при $\zeta \rightarrow 0$.

В частном случае водонасыщенных грунтов параметр ζ является малой величиной. Действительно, в водонасыщенных грунтах в случае высокочастотных сейсмических волн ($\omega \sim 500 \text{ с}^{-1}$) время релаксации τ , как правило, является величиной порядка $\tau \sim 10^{-5} \div 10^{-9} \text{ с}$, т. е. $\zeta \sim 5 \cdot 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-7}$, и лишь в грунтах, состоящих из чистого песка, $\tau \sim 2 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, т. е. $\zeta \sim 1,000 \div 0,015$. Поэтому в соответствии с формулами (18), (20) в водонасыщенных грунтах в основном распространяются волны первого рода.

Следует отметить, что согласно работе [4] в случае нарушения режима течения Пуазейля при больших частотах коэффициент затухания увеличивается пропорционально $\sqrt{\omega}$. Согласно (19), (20) в случае низкочастотных волн второго рода коэффициент затухания пропорционален $\sqrt{\omega}$, однако при фиксированном τ уменьшается с уменьшением частоты.

Рассмотрим случай продольных волн в сухих грунтах. Представляя a_0 и b_0 в виде

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{01} - a_{02}/(4\zeta^2), & b_0 &= -b_{00}/(2\zeta), \\ a_{01} &= [(1 - A_1\varepsilon_0)^2 - 4A_3\varepsilon_0]/4, & a_{02} &= (1 + A_2\varepsilon_0)^2/4, \\ b_{00} &= -((-1 + A_1\varepsilon_0)(1 + A_2\varepsilon_0) + 2A_3\rho_0/\rho_\infty), \end{aligned}$$

из первой формулы (3) находим

$$\begin{aligned} D_1 &= \sqrt{a_{01}} \left[1 + \frac{1}{2\zeta^2} \left(\left(\frac{b_{00}}{4a_{01}} \right)^2 - \frac{a_{02}}{a_{01}} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{a_{02}}{a_{01}} \right)^2 \frac{1}{\zeta^4} \right], \\ D_2 &= \frac{b_{00}\varepsilon_1}{4\sqrt{a_{01}}} \left[1 + \left(2 \frac{a_{02}}{a_{01}} \right) \frac{1}{\zeta^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

При этом последние две формулы (3) принимают вид

$$S^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a^{(2)} + \sqrt{(a^{(2)})^2 + (b^{(2)})^2} \right]^{1/2}, \quad \delta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-a^{(2)} + \sqrt{(a^{(2)})^2 + (b^{(2)})^2} \right]^{1/2}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} a^{(2)} &= a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \frac{1}{\zeta^2} + a_2^{(2)} \frac{1}{\zeta^4}, & a_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \sqrt{a_{01}} \left[\left(\frac{b_{00}}{4a_{01}} \right)^2 - \frac{a_{02}}{a_{01}} \right], \\ b^{(2)} &= \frac{1}{\zeta} b_1^{(2)} + b_2^{(2)} \frac{1}{\zeta^3}, & a_0^{(2)} &= \frac{1}{2} (1 - A_1\varepsilon_0) + \sqrt{a_{01}}, & a_2^{(2)} &= \frac{1}{8} a_{02}^2 a_{01}^{-3/2}, \\ b_1^{(2)} &= -(b_{00}/\sqrt{a_{01}} + 2(1 + A_1\varepsilon_0))/4, & b_2^{(2)} &= -b_{00}a_{02}^2 a_{01}^{-3/2}. \end{aligned}$$

Подставляя (21) в (5), получаем точные выражения для скорости волн $v^{(k)}$ и коэффициента затухания $\delta^{(k)}$.

В пренебрежении величинами порядка $O(\zeta^{-2})$ с принятой точностью получаем

$$\theta^{(2)} = [a_0^{(2)} B \rho]^{-1/2}, \quad \frac{\delta^{(2)}}{\omega} = \frac{1}{2\zeta} \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \frac{|b_1^{(2)}|}{\sqrt{a_0^{(2)}}} \sqrt{B \rho}, \quad (22)$$

где $a_0^{(2)} \rightarrow 1$, $|b_1^{(2)}| \rightarrow 1$ при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место слабозатухающая волна перепакетовки, которая в предельном случае $\zeta \rightarrow \infty$ становится незатухающей. При фиксированном значении ω это очевидно, в противном случае

$$\delta^{(2)} = \frac{\rho_\infty}{2\rho_0\tau} \sqrt{B \rho}, \quad \tau = \frac{\rho_1\rho_2}{m_0\rho_0} \frac{a_0}{\mu}.$$

Поскольку рассматривается сухой грунт, будем полагать $\mu \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$. Имеем

$$\rho_\infty \approx \rho_2/m_0 \rightarrow 0, \quad \rho_\infty \approx \rho_1(1 - m_0), \quad \rho \approx \rho_1, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Тогда коэффициент затухания $\delta^{(2)} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и, следовательно, в случае сухого (мягкого) грунта соотношения (22) принимают вид

$$\theta^{(2)} = 1/\sqrt{B\rho_1}, \quad \delta^{(2)} = 0.$$

Таким образом, волна второго рода является незатухающей волной переупаковки твердой фазы. Действительно, в случае волны первого рода, пренебрегая величинами порядка $O(\zeta^{-2})$, при $\mu \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$ имеем

$$v^{(1)} = \left[\left(\frac{1}{2} (1 - A_1 \varepsilon_0) - \sqrt{a_{01}} \right) B\rho \right]^{-1/2} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_0 \rightarrow 0, \quad \delta^{(1)} = \omega \frac{b_1^{(1)}}{2\zeta \sqrt{a^{(1)}}} \sqrt{B\rho} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что в мягких сухих грунтах может распространяться только волна второго рода [4], поскольку незатухающая волна, распространяющаяся с бесконечно большой скоростью, практически не реализуется (скорость волны ищется в классе ограниченных функций). Такой же результат получаем при $\mu \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$ из формулы (13) для скорости распространения волны первого рода.

Таким образом, в мягком сухом грунте ($\beta_1 K \ll 1$) фактически имеет место только волна второго рода, скорость и коэффициент затухания которой зависят лишь от плотности и сжимаемости твердой фазы — скелета грунта.

В случае немягких сухих грунтов ($\beta_1 K \sim 1$) скорость распространения волны и коэффициент затухания для больших значений ζ определяются формулами (10)–(14). В этих формулах при $\mu \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$

$$a_{01} \rightarrow 1/4, \quad b_1^{(1)} = O(\rho_2), \quad a_0^{(2)} \rightarrow 1, \quad b_1^{(2)} = O(\rho_2), \quad M_1 \rightarrow -1;$$

величины M_2 и M_3 имеют порядок $O(\rho_2)$; $\tau \rightarrow \infty$. С учетом этого получаем:

— для волн первого рода

$$v^{(1)} \rightarrow \infty, \quad \delta^{(1)} \rightarrow 0;$$

— для волн второго рода

$$\theta^{(2)}|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{B\rho_1}} [1 + O(\varepsilon_1^2)], \quad \delta^{(2)} = O(\mu)[1 + O(\varepsilon_1^2)].$$

Отсюда следует, что в случае сухих грунтов независимо от значения параметра $\beta_1 K$, т. е. независимо от степени уплотнения (сцементированности) горной породы, распространяется волна второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1, 2.
2. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
3. **Николаевский В. Н.** Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
4. **Николаевский В. Н.** Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, Х. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Недра, 1970.
5. **Бегматов А.** Исследование затухающих поверхностных волн в неоднородной среде // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 6. С. 115–123.

Поступила в редакцию 23/VII 2018 г.,
после доработки — 23/VII 2018 г.
Принята к публикации 3/IX 2018 г.