

9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
10. Петухов И.В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. — М.: Наука, 1964. — Т. 4. — С. 304—325.
11. Ковалев В.Л., Крупнов А.А. Многокомпонентный химически реагирующий турбулентный вязкий ударный слой у каталитической поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1989. — № 2. — С. 144—148.
12. Candler G. On the computation of shock shapes in nonequilibrium hypersonic flows. — N.Y., 1989. — (Paper/AIAA; N 312).
13. Zoby E.V. Analysis of STS-2 experimental heating rates and transition data. — N.Y., 1982. — (Paper/AIAA; N 822).
14. Совершенный В.Д., Алексин В.А. О расчете пограничного слоя на профилях при наличии зон ламинарного и турбулентного режимов течения // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1983. — № 2. — С. 68—72.
15. Hudson M. Evaluation of PNS-computed heating and hypersonic shock tunnel data on sharp and inclined blunt cones. — N.Y., 1989. — (Paper/AIAA; N 310).
16. Candler G., McCormack R.W. The computation of hypersonic ionized flow in chemical and thermal nonequilibrium. — N.Y., 1988. — (Paper/AIAA; N 511).

г. Москва

Поступила 10/XII 1993 г.

УДК 532.582.31

И.В. Стурова

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ КАЧКЕ ПОГРУЖЕННОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ХОДА В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуется качка на регулярном волнении горизонтального цилиндрического тела, расположенного в нижнем слое двухслойной жидкости. Тело движется равномерно на постоянной глубине в направлении, перпендикулярном своей оси, и совершает гармонические колебания под действием попутных или встречных волн. Решение данной задачи производится методами линейной теории. Набегающие на тело свободные волны, а также вынужденные качания погруженного тела и образующиеся волны предполагаются малыми. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а течение в каждом слое — потенциальным.

Имеющиеся в настоящее время теоретические исследования гидродинамической качки погруженного тела при наличии хода [1—8] выполнены только для однородной жидкости, когда единственный источник внешнего волнения — поверхностные волны. Более сложной задачей является изучение влияния внешнего волнения на тело, движущееся в стратифицированной жидкости. При этом волнение может быть вызвано как поверхностными, так и свободными внутренними волнами. Движение тела под свободной поверхностью однородной жидкости — частный случай этой задачи.

1. Постановка задачи. В невозмущенном состоянии верхний слой жидкости плотности ρ_1 имеет толщину H и занимает область $-\infty < \bar{x} < \infty$, $0 < y < H$, а нижний бесконечно глубокий слой плотности $\rho_2 = (1 + \epsilon)\rho_1$ ($\epsilon > 0$) — область $-\infty < \bar{x} < \infty$, $y < 0$, где \bar{x} — горизонтальная, а y — вертикальная координаты. Наряду с неподвижной системой координат (\bar{x}, y) вводится подвижная система $(x = \bar{x} - Ut, y)$, которая движется вместе с телом с постоянной скоростью U . Для простоты предполагается, что верхний слой жидкости ограничен твердой крышкой. В этом случае возможно существование только свободных внутренних волн, обусловленных наличием

© И.В. Стурова, 1994

границы раздела между слоями. В неподвижной системе координат потенциал скоростей для набегающей внутренней волны

$$(1.1) \quad \Psi_0^{(s)} = \frac{i\omega_0}{k_0} \varphi_0^{(s)} \exp[i(\omega_0 t \mp k_0 x)], \quad \varphi_0^{(1)} = -\frac{\operatorname{ch} k_0(y-H)}{\operatorname{sh} k_0 H}, \quad \varphi_0^{(2)} = e^{k_0 y},$$

где физический смысл имеет лишь вещественная часть; ω_0 — частота волны в неподвижной системе координат; знаки минус и плюс соответствуют попутной и встречной волнам; волновое число падающей волны k_0 определяется из дисперсионного соотношения

$$(1.2) \quad \omega_0^2 = \Omega^2(k_0) \equiv \varepsilon g k_0 / (1 + \varepsilon + \operatorname{cth} k_0 H);$$

индексы $s = 1, 2$ введены для верхнего и нижнего слоев; g — ускорение силы тяжести.

В подвижной системе координат выражение (1.1) примет вид

$$\Psi_0^{(s)} = \frac{i\omega}{k_0} \varphi_0^{(s)} \exp[i(\omega t \mp k_0 x)].$$

Здесь ω — кажущаяся частота колебаний частиц волны, которая вследствие доплеровского сдвига равна $\omega = \omega_0 \mp k_0 U$.

Считая возмущенное колебательное движение жидкости установившимся, полный потенциал скоростей всего волнового движения запишем в виде

$$(1.3) \quad \Phi^{(s)}(x, y, t) = -Ux + U\bar{\Phi}^{(s)}(x, y) + \operatorname{Re} \sum_{j=0}^4 \eta_j \Phi_j^{(s)}(x, y) e^{i\omega t},$$

где $\bar{\Phi}^{(s)}$ — потенциалы скоростей, отвечающие равномерному движению тела с единичной скоростью; $\Phi_j^{(s)}$ ($j = \bar{1}, 3$) характеризуют радиационные потенциалы, обусловленные чисто вынужденной качкой тела по трем степеням свободы в равномерном потоке жидкости при отсутствии набегающих волн; η_j — амплитуды движения тела, соответствующие горизонтальным, вертикальным и вращательным колебаниям тела; $\Phi_0^{(s)} = \varphi_0^{(s)} \exp(+ik_0 x)$ — потенциалы скоростей набегающей волны; $\Phi_4^{(s)}$ — дифракционные потенциалы, определяющие волновые движения, возникающие в результате набегающей системы регулярных волн на тело как на неподвижное препятствие; $\eta_0 = \eta_4$ — амплитуда набегающей волны.

Для стационарного потенциала внутри жидкости

$$(1.4) \quad \Delta \bar{\Phi}^{(1)} = 0 \quad (0 < y < H), \quad \Delta \bar{\Phi}^{(2)} = 0 \quad (y < 0).$$

Исходя из линейной теории волн, запишем граничные условия: на верхней границе

$$\partial \bar{\Phi}^{(1)} / \partial y = 0 \quad (y = H),$$

на поверхности раздела

$$(1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon g}{U^2} \frac{\partial \bar{\Phi}^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial y} \quad (y = 0),$$

в дальнем поле

$$\frac{\partial \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial y} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty), \quad \frac{\partial \bar{\Phi}^{(s)}}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad \left| \frac{\partial \bar{\Phi}^{(s)}}{\partial x} \right| < \infty \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Предполагается, что тело полностью расположено в нижнем слое и в силу малости его колебаний условие непротекания ставится на поверхности тела в его среднем положении $L: \partial \bar{\Phi}^{(2)} / \partial n = n_x$ ($x, y \in L$), где $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — внутренняя нормаль к поверхности тела.

Компоненты радиационных и дифракционных потенциалов удовлетворяют аналогично (1.4) уравнениям

$$\Delta \bar{\Phi}_j^{(1)} = 0 \quad (0 < y < H), \quad \Delta \bar{\Phi}_j^{(2)} = 0 \quad (y < 0)$$

с граничными условиями:

$$(1.5) \quad \partial \bar{\Phi}_j^{(1)} / \partial y = 0 \quad (y = H);$$

$$(1.6) \quad (1 + \varepsilon) N \bar{\Phi}_j^{(2)} - N \bar{\Phi}_j^{(1)} + \varepsilon g \partial \bar{\Phi}_j^{(1)} / \partial y = 0, \quad \partial \bar{\Phi}_j^{(1)} / \partial y = \partial \bar{\Phi}_j^{(2)} / \partial y \quad (y = 0);$$

$$(1.7) \quad \partial \bar{\Phi}_j^{(2)} / \partial y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -\infty);$$

$$(1.8) \quad \partial \bar{\Phi}_j^{(2)} / \partial n = i \omega n_j - U m_j \quad (j = \bar{1}, 3), \quad \partial \bar{\Phi}_4^{(2)} / \partial n = -\partial \bar{\Phi}_0^{(2)} / \partial n \quad (x, y \in L).$$

Здесь

$$N \equiv (U \partial / \partial x - i \omega)^2; \quad (n_1, n_2) = (n_x, n_y); \quad n_3 = (y - y_0) n_x - (x - x_0) n_y;$$

$$(m_1, m_2, m_3) = \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial n \partial x}, \frac{\partial^2 \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial n \partial y}, \frac{\partial}{\partial n} \left[(y - y_0) \left(\frac{\partial \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial x} - 1 \right) - (x - x_0) \frac{\partial \bar{\Phi}^{(2)}}{\partial y} \right] \right\};$$

x_0, y_0 — координаты точки, относительно которой совершаются вращательные колебания тела. Условия излучения для $\bar{\Phi}_j^{(2)}$ предполагают, что распространяющаяся впереди тела волна может быть только в том случае, когда ее фазовая скорость положительна, а групповая больше скорости тела, в противном случае волновые движения существуют только за телом.

Отметим, что во многих работах (см., например, [9]) первое граничное условие в (1.8) дано без второго слагаемого. Появление этого члена связано с учетом взаимодействия между стационарными и осциллирующими полями течения, т.е. малого отклонения реального положения тела от его среднего положения. В [5] на примере кругового цилиндра подробно исследована важная роль этого слагаемого при определении гидродинамической нагрузки особенно для малых частот.

При движении на волнении на тело действуют гидродинамические силы и момент, обусловленные его поступательным движением, колебаниями и рассеянными волнами. Общие выражения для силы F и момента M определяются с помощью интегрирования давления жидкости $p = -\rho_2 (\partial \bar{\Phi}^{(2)} / \partial t + |\nabla \bar{\Phi}^{(2)}|^2 / 2)$ по поверхности тела L :

$$(1.9) \quad F = \int_L p n dl, \quad M = \int_L p n_3 dl.$$

Удобно ввести представление $F = (F_1, F_2)$, $M = F_3$ и заменить (1.9) суммой

$$(1.10) \quad F_j = F_{sj} + \text{Re}[(F_{nj} + F_{ej}) e^{i \omega t}],$$

где первое слагаемое обусловлено равномерным поступательным движением тела:

$$F_{sj} = \rho_2 U^2 \int_L (\partial \bar{\Phi}^{(2)} / \partial x - |\nabla \bar{\Phi}^{(2)}|^2 / 2) n_j dl;$$

второе слагаемое — вклад нестационарных потенциалов $\bar{\Phi}_j^{(2)}$ ($j = \bar{1}, 3$). Три составляющие указанной силы и момента можно записать в матричной форме

$$(1.11) \quad F_{nj} = \sum_{k=1}^3 \eta_k \tau_{jk}, \quad \tau_{jk} = -\rho_2 \int_L (i \omega \bar{\Phi}_k^{(2)} + \nabla \bar{\Phi}_k^{(2)}) n_j dl$$

($\nabla = U \nabla(\bar{\Phi}^{(2)} - x)$ — вектор скорости стационарного течения в нижнем слое относительно движущейся системы координат). Коэффициенты τ_{jk} представляют собой комплексную силу, действующую в направлении j и обусловленную синусоидальным колебанием тела с единичной амплитудой в направлении k . Эти коэффициенты можно представить в виде $\tau_{jk} = \omega^2 \mu_{jk} - i \omega \lambda_{jk}$,

где μ_{jk} известны как коэффициенты присоединенных масс, а λ_{jk} — демпфирования.

Возмущающие (дифракционные) силы и момент определяются следующим образом:

$$(1.12) \quad F_{ej} = -\rho_2 \eta_0 \int_L [i\omega(\Phi_0^{(2)} + \Phi_4^{(2)}) + \nabla \nabla(\Phi_0^{(2)} + \Phi_4^{(2)})] n_j dl.$$

В силу того что

$$\int_L \nabla \nabla \Phi_k^{(2)} n_j dl = -U \int_L m_j \Phi_k^{(2)} dl,$$

с использованием граничных условий на теле (1.8) соотношения (1.11), (1.12) можно представить также в виде

$$\tau_{jk} = \rho_2 \int_L \frac{\partial \Phi_l^{(2)*}}{\partial n} \Phi_k dl, \quad F_{ej} = \rho_2 \int_L \frac{\partial \Phi_l^{(2)*}}{\partial n} (\Phi_0^{(2)} + \Phi_4^{(2)}) dl$$

(звездочка означает комплексное сопряжение).

Эффективным численным методом решения этих задач в однородной жидкости является метод гибридных конечных элементов (МГКЭ) [4, 8]. В данном методе потенциал скоростей для нижнего слоя представляется с помощью метода конечных элементов в узкой области, окружающей тело, и граничных интегральных уравнений во внешней области. МГКЭ совмещает в себе достоинства этих двух методов; поведение течения вдали от тела находит свое отражение в функции Грина, а выбор простой прямоугольной геометрии внешнего контура позволяет достаточно точно выполнить поверхностное интегрирование. Отметим, что в МГКЭ удается избежать вычисления вторых производных стационарного потенциала в граничных условиях (1.8). Указанный метод может быть использован для тел сложной формы, системы тел, а также распространен на случай стратифицированной жидкости, в которой изменение плотности имеет место только на горизонтах, расположенных выше или ниже погруженного тела.

Стационарная нагрузка для эллиптического контура в двухслойной безграничной жидкости определена с помощью МГКЭ в [10], а возмущающие силы при качке без хода ($U = 0$) в двухслойной жидкости, ограниченной сверху как твердой крышкой, так и свободной поверхностью, — в [11].

2. Функция Грина. Для использования МГКЭ необходимо определить функцию Грина $G^{(s)}(x, y, \eta, \xi)$, удовлетворяющую уравнениям

$$\Delta G^{(1)} = 0 \quad (0 < y < H), \quad \Delta G^{(2)} = 2\pi \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (y < 0)$$

с граничными условиями, аналогичными (1.5)–(1.7). Решение для $G^{(2)}$ имеет вид

$$(2.1) \quad G^{(2)} = \ln(rr_1) + 2(1 + \varepsilon) \text{pv} \int_0^\infty \frac{F(k)}{kD(k)} e^{k(y+\eta)} \times \\ \times \{ [(U^2 k^2 - \omega^2)^2 - (U^2 k^2 + \omega^2) \Omega^2(k)] \cos k(x - \xi) + \\ + 2i\omega k U \Omega^2(k) \sin k(x - \xi) \} dk + \\ + \pi \{ \alpha_1 \exp[k_1(y + \eta - i(x - \xi))] - \alpha_2 \exp[k_2(y + \eta - i(x - \xi))] - \\ - \alpha_3 \exp[k_3(y + \eta + i(x - \xi))] + \alpha_4 \exp[k_4(y + \eta + i(x - \xi))] \}.$$

Здесь символ pv означает интеграл в смысле главного значения;

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2; \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2;$$

$$F(k) = (1 + \varepsilon + \text{cth} kH)^{-1}; \quad D = D_1 D_2 D_3 D_4;$$

$$D_{1,2}(k) = Uk + \omega \mp \Omega(k); \quad D_{3,4}(k) = Uk - \omega \mp \Omega(k);$$

функция $\Omega(k)$ определена дисперсионным соотношением (1.2); $\alpha_s = \frac{i(1+\varepsilon)\Omega(k_s)F(k_s)}{2k_s[U - \gamma c_s(k_s)]}$ ($\gamma = 1$ для $s = \overline{1,3}$, $\gamma = -i$ для $s = 4$); $c_s(k_s) = d\Omega/dk|_{k=k_s}$ — групповая скорость волны k_s . Уравнение $D_1(k) = 0$ имеет два простых корня (k_1, k_2) при одновременном выполнении условий

$$(2.2) \quad U < U_c, \quad \omega < \omega_c,$$

где $U_c = \sqrt{g\varepsilon H}$ — критическая скорость для стационарной задачи в рассматриваемой двухслойной жидкости, а $\omega_c = \Omega(k_c) - Uk_c$ определяется после решения уравнения $c_s(k_c) = U$. При $\omega = \omega_c$ оба корня сливаются, при невыполнении условий (2.2) вещественных корней нет. Уравнение $D_2(k) = 0$ не имеет вещественных корней, а уравнения $D_3(k) = 0$ и $D_4(k) = 0$ всегда имеют по одному вещественному корню (соответственно k_3 и k_4). При наличии всех четырех корней они располагаются в следующем порядке: $0 < k_4 < k_2 < k_1 < k_3$. В подвижной системе координат волны k_1 и k_2 имеют положительные фазовые скорости и поэтому движутся вправо, но только волна k_2 имеет положительную групповую скорость и распространяется впереди тела. Волны k_3 и k_4 имеют отрицательные фазовые и групповые скорости и распространяются за телом влево. В неподвижной системе координат волны k_1, k_2, k_3 движутся вправо, а волна k_4 — влево. Если условия (2.2) не выполняются, слагаемые, включающие k_1 и k_2 в (2.1), должны быть удалены (подробнее см. [5,8,12]).

В предельном случае бесконечно большой глубины верхнего слоя ($H \rightarrow \infty$) функцию Грина (2.1) удобнее записать в виде

$$(2.3) \quad G^{(2)} = \ln r - \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon} \ln r_1 + 2 \frac{\bar{g}}{2 + \varepsilon} \text{pv} \int_0^{\infty} \frac{dk}{D(k)} e^{k(y+\eta)} \times \\ \times \{ [(U^2 k^2 + \omega^2 - \bar{g}k) \cos k(x - \xi) + 4i\omega U k \sin k(x - \xi)] + \\ + i\tau(1 + \varepsilon) \{ [e^{k_1(y+\eta-i(x-\xi))} + e^{k_2(y+\eta-i(x-\xi))}] / \sqrt{1 - 4\tau} + \\ + [e^{k_4(y+\eta+i(x-\xi))} - e^{k_3(y+\eta+i(x-\xi))}] / \sqrt{1 + 4\tau} \} / (2 + \varepsilon),$$

где $\tau = \omega U / \bar{g}$; $\bar{g} = \varepsilon g / (2 + \varepsilon)$;

$$k_{1,2} = \frac{\bar{g}}{2U^2} (i - 2\tau \pm \sqrt{1 - 4\tau}); \quad k_{3,4} = \frac{\bar{g}}{2U^2} (1 + 2\tau \pm \sqrt{1 + 4\tau}).$$

В этом случае $\omega_c = 0,25\bar{g}/U$. В пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ (2.3) дает функцию Грина для бесконечно глубокой однородной жидкости со свободной поверхностью, которая подробно изучена в [1,4—7]. В [6] приведены вычислительные программы для ее расчета. Для однородной жидкости конечной глубины функция Грина рассматриваемой задачи определена в [8].

При вычислении характеристик дальнего поля достаточно ограничиться значениями функции Грина при $x - \xi \rightarrow \pm \infty$. Для функции Грина (2.1) при $x - \xi \rightarrow \infty$

$$G^{(2)} \approx -2\pi\alpha_2 \exp[k_2(y + \eta - i(x - \xi))],$$

при $x - \xi \rightarrow -\infty$

$$G^{(2)} \approx 2\pi \{ \alpha_1 \exp[k_1(y + \eta - i(x - \xi))] - \alpha_3 \exp[k_3(y + \eta + i(x - \xi))] + \\ + \alpha_4 \exp[k_4(y + \eta + i(x - \xi))] \}.$$

Следовательно, используя (1.1) и формулу Грина, получим при $x \rightarrow \infty$

$$(2.4) \quad \Phi_j^{(s)} = A_2 \varphi_0^{(s)}(k_2) e^{-ik_2 x} \quad (j = \overline{1,4});$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$(2.5) \quad \Phi_j^{(s)} = A_{1j} \varphi_0^{(s)}(k_1) e^{-ik_1 x} + A_{3j} \varphi_0^{(s)}(k_3) e^{ik_3 x} + A_{4j} \varphi_0^{(s)}(k_4) e^{ik_4 x},$$

где

$$A_{1j} = \alpha_1 e^{-k_1 h} K_j^+(k_1); \quad A_{2j} = -\alpha_2 e^{-k_2 h} K_j^+(k_2);$$

$$A_{3j} = -\alpha_3 e^{-k_3 h} K_j^-(k_3); \quad A_{4j} = \alpha_4 e^{-k_4 h} K_j^-(k_4);$$

$K_j^\pm(k_s)$ — аналог функции Кочина:

$$K_j^\pm(k) = \int_L e^{k(\eta \pm i\zeta)} \left[\frac{\partial \Phi_j^{(2)}}{\partial n} - k \Phi_j^{(2)}(n_1 \pm in_2) \right] dl.$$

Для дифракционной задачи в неподвижной системе координат встречной волной может быть только волна k_4 , а попутной — волны k_1, k_2, k_3 в зависимости от частоты набегающей волны. При малых значениях частоты ($\omega < \omega_0$) набегающей является волна с $k_0 = k_2$, так как она имеет самую большую длину, затем ею становится волна с $k_0 = k_1$. При $U > \omega_0/k_0$ кажущаяся частота ω становится отрицательной, но так как это противоречит физическому смыслу, то следует в (1.3) временной множитель заменить на $e^{-i\omega t}$, тогда $\omega = k_0 U - \omega_0$. При этом должен быть также изменен знак первого слагаемого в (1.8) и функции Грина в (2.1), (2.3) заменены на комплексно-сопряженные. Физически условие $U > \omega_0/k_0$ означает, что цилиндр обгоняет набегающую волну и в движущейся системе координат волна набегаёт справа, при этом $k_0 = k_3$.

Зная $\Phi_j^{(s)}$, можно определить вертикальное возвышение ζ границы раздела:

$$\zeta = \frac{1}{\varepsilon g} \frac{\partial}{\partial t} [\Phi^{(1)} - (1 + \varepsilon) \Phi^{(2)}]_{y=0}.$$

С учетом (2.4) и (2.5) амплитуды радиационных и дифрагированных волн в дальнем поле

$$(2.6) \quad \zeta_{sj} = k_s A_{sj} / \Omega(k_s).$$

3. Приближенное решение. В [5, 8] получены версии соотношений Хаскинда — Ньюмана для радиационной и дифракционной задач при наличии хода. В отличие от случая без хода отсутствует симметрия матрицы радиационной нагрузки, и удается только выразить диагональные коэффициенты демпфирования и возмущающие силы через характеристики дальнего поля.

В рассматриваемой двухслойной жидкости соотношение для диагональных коэффициентов демпфирования имеет вид

$$(3.1) \quad \lambda_{jj} = \frac{\rho_2}{\omega(1 + \varepsilon)} (M_1 |A_{1j}|^2 - M_2 |A_{2j}|^2 - M_3 |A_{3j}|^2 + M_4 |A_{4j}|^2),$$

где

$$M_s = \Omega(k_s) F^2(k_s) |U - \gamma c_g(k_s)| / \varepsilon g \quad (s = \overline{1,4}).$$

Согласно свойствам волн, $U - c_g(k_{1,3}) > 0$, $U - c_g(k_2) < 0$, $U + c_g(k_4) > 0$, и, следовательно, третье слагаемое в (3.1) является всегда отрицательным, а остальные слагаемые всегда положительные. Это означает, что при определенных условиях коэффициенты демпфирования могут принимать отрицательные значения, тогда как при отсутствии хода эти характеристики всегда положительные. Соотношение (3.1), соответствующее закону сохранения энергии, физически означает, что волна k_3 обеспечивает поток волновой энергии, направленный к телу, тогда как для других трех волн поток волновой энергии направлен от тела. Появление отрицательных значений λ_{jj} возможно тогда, когда волна k_3 становится доминирующей.

Возмущающие силы выражаются аналогично (3.1) через характеристики дальнего поля радиационной и дифракционной задач.

Соотношения (3.1) позволяют получить приближенное решение для λ_{jj} в предположении глубоко погруженного под границей раздела тела. Потенциал стационарного течения, а также радиационные и дифракционные потенциалы определяются для однородной безграничной жидкости без учета верхнего слоя. При этом удовлетворяются условия непротекания на поверхности тела и затухания вдали от него.

Рассмотрим эллиптический контур $x^2/a^2 + (y+h)^2/b^2 = 1$, где a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипса, h — глубина погружения его центра под поверхность раздела. Используя решение [13] для стационарного потенциала и результаты [11], аналоги функции Кочина для радиационной задачи можно представить в виде

$$(3.2) \quad K_1^\pm(k) = \pm \frac{4\pi\omega b^2}{c} J_1(kc) + b \int_0^{2\pi} [(a \sin^2\theta - b \cos^2\theta) S_1^\pm + (a+b)(a^2 \sin^2\theta - b^2 \cos^2\theta) S_2^\pm] d\theta,$$

$$K_2^\pm(k) = -\frac{i4\pi\omega a^2}{c} J_1(kc) - b(a+b) \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta (S_1^\pm + 2ab S_2^\pm) d\theta,$$

$$K_3^\pm(k) = 2\pi a [\pm 2b\omega J_2(kc) - U(a+b) J_1(kc)/c] + b(a+b) \int_0^{2\pi} \sin\theta \{a S_1^\pm + b[a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2\theta] S_2^\pm\} d\theta.$$

Здесь

$$S_1^\pm(k, \theta) = \frac{Uk(a \sin\theta \pm ib \cos\theta)}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta} \exp[k(b \sin\theta \pm i a \cos\theta)];$$

$$S_2^\pm(k, \theta) = \frac{U \exp[k(b \sin\theta \pm i a \cos\theta)]}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2};$$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$; J_n — функции Бесселя порядка n .

В частном случае кругового цилиндра радиуса b эти выражения существенно упрощаются:

$$\{K_1^\pm(k), K_2^\pm(k), K_3^\pm(k)\} = 2\pi k b^2 \{kU \pm \omega, -i(\omega \pm Uk), U\}.$$

Дефектом этого приближения является то, что K_3^\pm не обращается в нуль, несмотря на то что вращательные колебания кругового цилиндра в идеальной жидкости не возбуждают волновых движений. Это является, по-видимому, следствием того, что и в стационарной задаче данное приближение дает нефизичный результат для момента гидродинамических сил [14].

Для дифракционной задачи при вычислении приближенных значений K_4^\pm возможно полное перенесение результатов [11]: при набегании волны с $k_0 = k_1, k_2$

$$(3.3) \quad K_4^+(k) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(k_0) a_n^*(k),$$

$$K_4^-(k) = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(k) b_n(k_0);$$

при набегании волны с $k_0 = k_3$

$$K_4^+(k) = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(k) b_n(k_0),$$

$$K_4^-(k) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(k_0) a_n^*(k);$$

при набегании волны с $k_0 = k_4$

$$K_4^+(k) = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^*(k) b_n^*(k_0),$$

$$K_4^-(k) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^*(k_0) a_n(k),$$

где

$$a_n(k) = (-i)^n \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{n/2} J_n(kc); \quad b_n(k) = (-i)^n \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{n/2} J_n(kc).$$

В частном случае кругового цилиндра $a_n(k) = (-i)^n (kb)^n / n!$, $b_n(k) = 0$ и при набегании волны с $k_0 = k_1, k_2$

$$K_4^+(k) = 4\pi b \sqrt{k_0 k} I_1(2b \sqrt{k_0 k}), \quad K_4^-(k) = 0,$$

при набегании волны с $k_0 = k_3, k_4$

$$K_4^+(k) = 0, \quad K_4^-(k) = 2\pi b \sqrt{k_0 k} I_1(2b \sqrt{k_0 k})$$

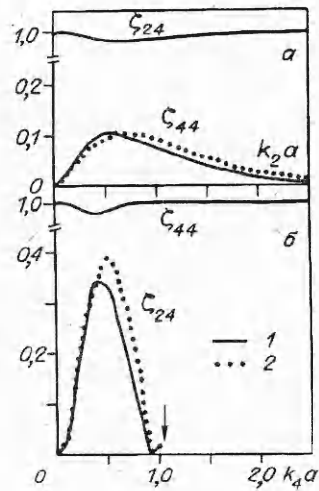
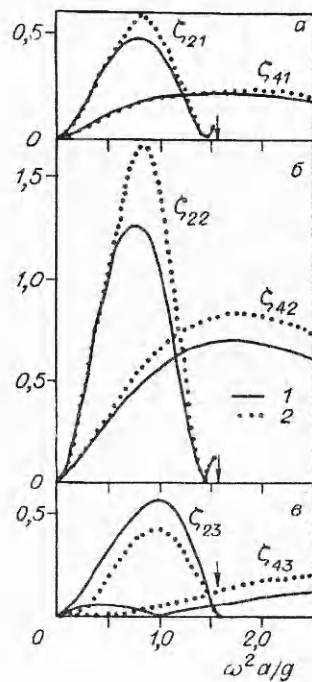
(I_1 — модифицированная функция Бесселя).

Следовательно, при рассеивании волн на движущемся круговом цилиндре при любых значениях скорости U возникает только одна новая волна. Для набегающей волны $k_1(k_2)$ возникает только отраженная волна $k_2(k_1)$. Набегающая волна k_3 (или k_4) рассеивается в волны k_3 и k_4 без появления отраженных волн. Это является следствием того факта, что при дифракции волн на круговом цилиндре при $U = 0$ отражение отсутствует. Подробное сопоставление этих приближенных решений с полными решениями радиационной и дифракционной задач для кругового цилиндра под свободной поверхностью однородной жидкости представлено в [1].

Сравнение приближенного решения (3.2) с численным решением исходной задачи для амплитуд радиационных волн, возникающих при движении эллиптического контура под свободной поверхностью однородной жидкости, приведено на рис. 1, a — соответственно для горизонтальных, вертикальных и вращательных относительно центра цилиндра колебаний при $U/\sqrt{ga} = 0,2$, $b/a = 0,3$, $h = a + b$. Линии 1 — численные результаты [3], 2 — значения (2.6) с использованием приближенных решений (3.2). Стрелками указаны критические значения частоты $\omega_c = 0,25g/U$. При данных параметрах движения амплитуды волн k_1 и k_3 пренебрежимо малы.

Амплитуды дифрагированных волн на свободной поверхности представлены на рис. 2, $a, б$ при тех же параметрах движения соответственно для встречной волны k_4 и попутной k_2 . Линии 1 — результаты [3], 2 — приближенное решение (2.6) с учетом (3.3) для отраженных волн. Относительная амплитуда проходящей волны в данном приближении всегда равна 1. При данных параметрах движения рассеяние в волны k_1 и k_3 пренебрежимо мало. Видно, что приближенные решения достаточно хорошо описывают качественное поведение возбуждаемых волн, но несколько искажают их количественные значения.

4. Численные решения. Наиболее полно расчеты радиационной задачи для кругового цилиндра, погруженного под свободной поверхностью однородной жидкости бесконечной глубины, даны в [4], где наряду с графиками приведены и табличные значения коэффициентов демпфирования для ряда значений исходных параметров, а также графики коэффициентов присоединенных масс и демпфирования для эллиптических цилиндров. Расчеты



Р и с. 2

Р и с. 1

выполнены с использованием МГКЭ. Решение аналогичной задачи методом граничных интегральных уравнений представлено в [1—3] для кругового и эллиптического цилиндров. Случай однородной жидкости конечной глубины рассмотрен в [8], где с помощью МГКЭ определены радиационная и дифракционная нагрузки для кругового цилиндра и дифракционная нагрузка для эллиптического цилиндра, расположенного под углом атаки. Во всех указанных выше работах использовалась полная постановка задачи, изложенная в п. 1. Численные результаты, полученные в несколько более простой постановке, когда для решения радиационной и дифракционной задач был взят стационарный потенциал, определенный для безграничной жидкости, приведены в [5].

При малых скоростях хода для тела, симметричного относительно вертикальной оси, выполняются соотношения Тиммана—Ньюмана [15]:

$$(4.1) \quad \tau_{12} = -\tau_{21}, \tau_{23} = -\tau_{32}, \tau_{13} = \tau_{31}.$$

При $U \rightarrow \infty$ независимо от формы тела $\tau_{jk} = \tau_{kj}^*$ [8, 15].

Численные расчеты коэффициентов присоединенных масс и демпфирования приведены соответственно на рис. 3, 4 для эллиптического цилиндра, расположенного под свободной поверхностью в однородной жидкости (а), под поверхностью раздела в двухслойной безграничной жидкости (б) и в двухслойной жидкости с ограниченным верхним слоем (в) при

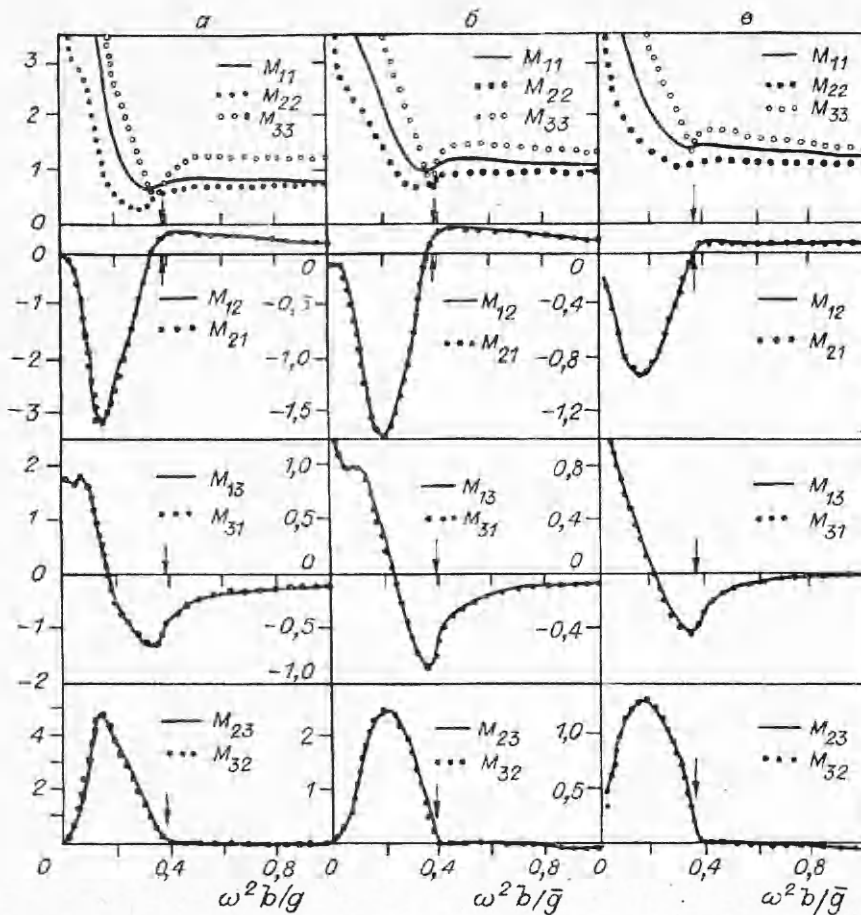
$$(4.2) \quad a = h = 2b, \varepsilon = 0,03, H = b, U/\sqrt{gb} = 0,4.$$

Число элементов в МГКЭ равно 18. На рис. 3 коэффициенты присоединенных масс представлены в безразмерном виде

$$M_{jj} = \mu_{jj} / m_{jj} \quad (j = 1, \bar{3}), \quad (M_{12}, M_{21}) = (\mu_{12}, -\mu_{21}) / m_{11}, \\ (M_{13}, M_{23}, M_{31}, M_{32}) = (\mu_{13}, \mu_{23}, \mu_{31}, -\mu_{32}) / bm_{11},$$

где m_{jj} — коэффициенты присоединенных масс эллиптического контура в безграничной однородной жидкости [13]:

$$m_{11} = \pi\rho_2 b^2, \quad m_{22} = \pi\rho_2 a^2, \quad m_{33} = \pi\rho_2 (a^2 - b^2)^2 / 8.$$



Р и с. 3

Безразмерные коэффициенты демпфирования даны на рис. 4 в виде

$$(4.3) \quad \Lambda_{jj} = \pi b \omega \lambda_{jj} / \sqrt{g m_{jj}} \quad (j = \overline{1,3}), \quad (\Lambda_{12}, \Lambda_{21}) = (\lambda_{12}, -\lambda_{21}) \omega / \rho_2 \bar{g} b,$$

$$(\Lambda_{13}, \Lambda_{31}, \Lambda_{23}, \Lambda_{32}) = (\lambda_{13}, \lambda_{31}, \lambda_{23}, -\lambda_{32}) \omega / \rho_2 \bar{g} b^2.$$

В верхней части рис. 4 приведены приближенные значения диагональных коэффициентов демпфирования Λ_{jj} , полученные с использованием (3.1), (3.2) и обезразмеренные аналогично (4.3). Видно, что данное приближение дает весьма грубое представление для коэффициентов демпфирования, особенно для Λ_{33} . Стрелками указаны значения $\omega^2 b / \bar{g} = 0,3906$ (рис. 3, а, б, 4, а, б) и $0,3642$ (рис. 3, в, 4, в). Соотношения (4.1) при данном значении скорости хода хорошо выполняются. Влияние скорости хода на радиационную нагрузку наиболее важно при низких частотах.

Численные результаты для дифракционной нагрузки на эллиптический контур при тех же значениях исходных параметров (4.2) приведены на рис. 5 при набегании встречных (а) и попутных волн (б), линии 1—3 соответствуют однородной жидкости со свободной поверхностью, двухслойной жидкости с безграничным и ограниченным верхним слоем. Стрелками на рис. 5, б показаны значения волновых чисел $k_v b = 1,5626$ и $1,8277$, отвечающие критическим частотам ω_c для безграничного и ограниченного верхнего слоя. На этих частотах скорость хода совпадает с групповой скоростью набегающих попутных волн и происходит резкое уменьшение дифрак-

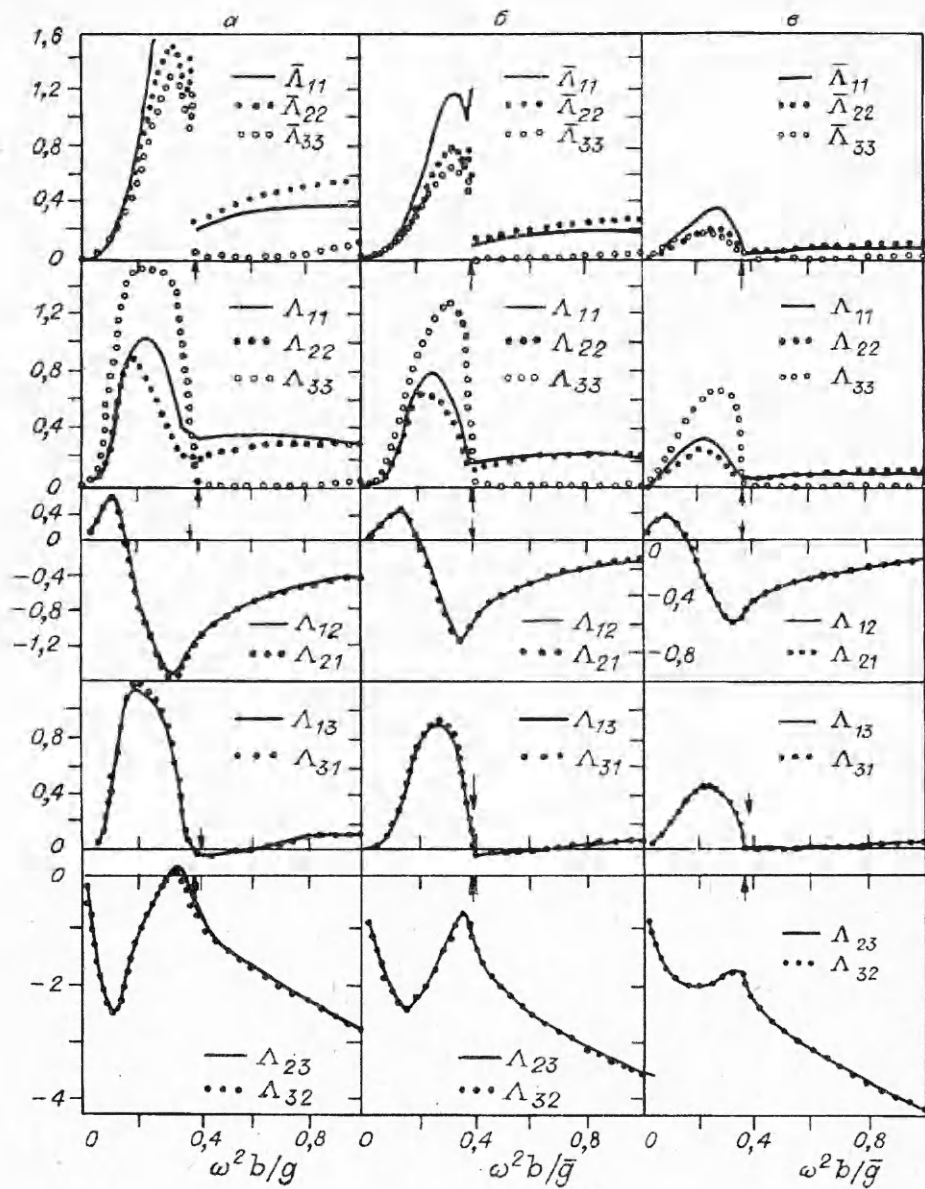


Рис. 4

ционных нагрузок. Попутные и встречные волны даже для симметричного тела дают различные возмущающие силы в отличие от случая без хода. Результаты приближенного решения, полученного в предположении глубоко погруженного тела, не приведены, так как они, как и для коэффициентов демпфирования, дают лишь грубую оценку. В [11] на рис. 4, а—в приведены значения возмущающих сил при тех же геометрических параметрах (4.2) и $U = 0$. Влияние хода наиболее сказывается на величине момента.

Представленные на рис. 4,5 расчеты относятся к малой скорости хода, при которой еще практически не возникает существенных поверхностных и внутренних волн (ср. характеристики волнового сопротивления на рис. 3, 4 в [10]). Однако даже малые стационарные волновые движения значительно влияют на радиационную и дифракционную нагрузки.

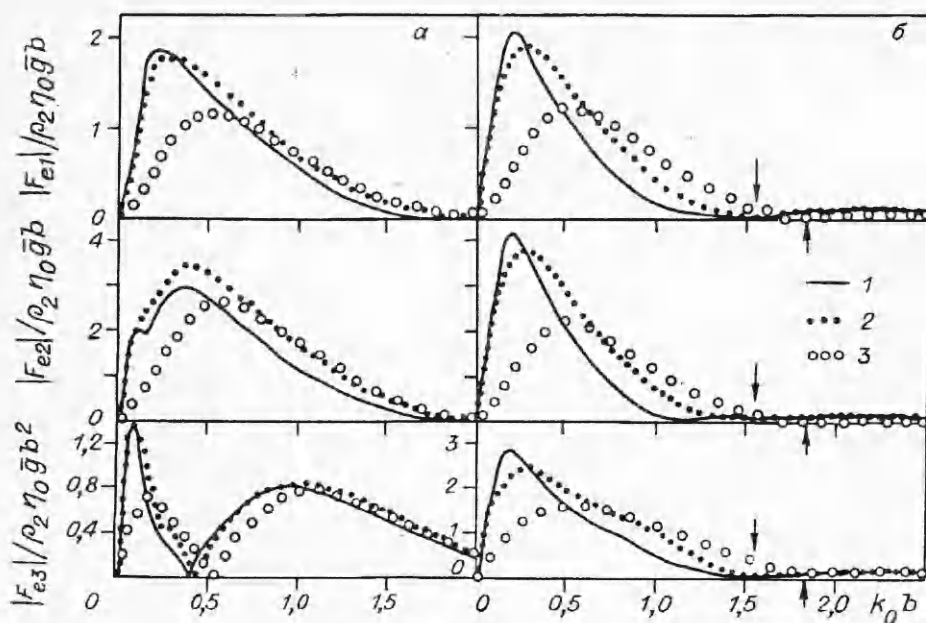


Рис. 5

Выполненные исследования позволяют оценить влияние стратификации на гидродинамические характеристики качки цилиндрического тела при наличии хода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grue J., Palm E. Wave radiation and diffraction from a submerged body in a uniform current // J. Fluid Mech. — 1985. — V. 151.
2. Grue J. Time-periodic wave loading on a submerged circular cylinder in a current // J. Ship Res. — 1986. — V. 30, N 3.
3. Mo A., Palm E. On radiated and scattered waves from a submerged elliptic cylinder in a uniform current // J. Ship Res. — 1987. — V. 31, N 1.
4. Wu G.X., Eatock Taylor R. Hydrodynamic forces on submerged oscillating cylinders at forward speed // Proc. Roy. Soc. London. — 1987. — V. A414, N 1846.
5. Kashiwagi M., Varyani K., Ohkusu M. Forward-speed effects on hydrodynamic forces acting on a submerged cylinder in waves // Repts Res. Inst. Appl. Mech. — 1987. — V. 34, N 102.
6. Jankowski J. Fundamental solution of linear hydrodynamic boundary-value problems // Public / Polski Rejestr Statków. — Gdańsk, 1990. — N 1.
7. Jankowski J., Janiszewska M. Radiation and diffraction forces acting on submerged cylinder at forward speed // HYDRONAV'91: Proc. sympos., Gdańsk, Sept. 1991.
8. Wu G.X. Hydrodynamic forces on a submerged cylinder advancing in water waves of finite depth // J. Fluid Mech. — 1991. — V. 224.
9. Алешков Ю.З. Теория взаимодействия волн с преградами. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
10. Стурова И.В. Влияние регулярного волнения на погруженное тело, движущееся в стратифицированной жидкости // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. технологий. — 1992. — Т. 1, № 3.
11. Стурова И.В. Рассеяние поверхностных и внутренних волн на погруженном теле // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т вычисл. технологий. — 1993. — Т. 2, № 4.
12. Стурова И.В. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. — Новосибирск: Наука, 1985.
13. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. — М.: ГИФМЛ, 1963. — Т. 1.

14. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves // Handbuch der Physik. — Berlin: Springer Verlag, 1960. — V. 9.
15. Wu G.X., Eatock Taylor R. Reciprocity relations for the hydrodynamic coefficients of bodies with forward speed // Int. Shipbuild. Progr. — 1988. — V. 35, N 402.

г. Новосибирск

Поступила 14/X 1993 г.

УДК 532.59

Е.А. Карабут

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Известно большое количество работ, в которых изучаются численно и аналитически уединенные волны на поверхности жидкости; все они посвящены изучению только одного решения, хотя недавно доказана теорема о неединственности [1]. Метод, позволяющий строить все решения, предложен в [2]. Суть этого метода состоит в поиске решения в виде ряда, члены которого находятся по рекуррентным формулам, но первый член остается неопределенным. Для его нахождения получено уравнение, которое может иметь несколько решений.

Численной реализации предложенного метода посвящена данная работа. Проведено численное суммирование, обнаружено ветвление решения, проведено сравнение с работами предыдущих авторов.

Уединенная волна на поверхности жидкости — предмет детального изучения, начиная с работ [3—6], от которых берет свое начало вся солитонная тематика. Существующие результаты в большинстве приближенные и относятся к изучению уединенных волн малой амплитуды. Точных результатов значительно меньше. Из последних отметим доказательства существования уединенной волны [7, 8], неединственности уединенных волн при фиксированном числе Фруда [1] и существования острого гребня с углом 120° при вершине для волны предельной амплитуды [9]. Результаты, касающиеся формы профиля уединенной волны, ее массы, энергии, импульса и т.д., получены в основном численно. Применялись две группы методов. Первая связана с конечно-разностным решением интегродифференциального уравнения, к которому сводится задача [10, 11]. Вторая основана на численном суммировании решения, представленного в виде ряда [12—14].

Рассмотрим плоское безвихревое установившееся течение тяжелой жидкости над горизонтальным дном. Ось X декартовой системы координат направим вдоль дна, а ось Y — вертикально вверх. Начало координат поместим на дне таким образом, чтобы ось Y проходила через наивысшую точку свободной поверхности (рис. 1). Обозначим через h_0 глубину невозмущенной жидкости на бесконечности, u_0 — скорость набегающего потока на бесконечности, g — ускорение свободного падения, φ — потенциал, ψ — функцию тока.

Задача нахождения уединенной волны, т.е. задача построения течения со свободной границей $Y = Y_1(X)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} Y_1(X) = h_0,$$

зависит от одного параметра, в качестве которого можно взять число Фруда

$$Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} > 1$$