

6. Сьюл, Мюллер. Поле течения и донное давление в соплах с центральным телом.— «Вопросы ракетной техники», 1974, № 2.
7. Антонов А. Н. Расчет взаимодействия турбулентного пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком за уступом.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 3.
8. Антонов А. Н. Расчет взаимодействия турбулентного пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком на вогнутом угле и на сферической кормовой части тела.— ПМТФ, 1976, № 1.
9. Charvat A. F., Burghart G. H., Nurick W. H. Base wakes in accelerated supersonic free streams.— «Heat Transfer and Fluid Mech. Inst.», 1967, N 2.
10. Пирумов У. Г., Рубцова В. А. Расчет осесимметричных сверхзвуковых кольцевых сопел.— «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1961, № 6.
11. Migdal, Horgan, Chamay. An experimental evaluation of plug cluster nozzles.— «AIAA J.», 1964, N 7.
12. Виленский Ф. А., Волконская Т. Г., Грязнов В. П., Пирумов У. Г. Исследования нерасчетных режимов осесимметричного кольцевого сопла с центральным телом.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 4.
13. Авдусевский В. С., Антонов Б. М., Анфимов Н. А. Основы теории полета космических аппаратов.— М., «Машиностроение», 1972.
14. Юделович М. Я. Приближенная методика расчета донного давления для тел сферической формы.— «Изв. АН СССР. Механика», 1965, № 3.

УДК 532.516

ОБРАЗОВАНИЕ НЕПРОТОЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ПРИОСЕВОЙ ЗОНЕ ВИХРЕВОЙ ЯЧЕЙКИ

М. В. Башкатов

(Новосибирск)

Как известно [1], закрученные течения во многих случаях сопровождаются появлением вторичных течений (возвратные течения для случая закрученных струй или центральные зоны в циклонных аппаратах). Возможность появления приосевого обратного тока на начальном участке трубы для однородного закрученного по закону твердого тела потока на входе показана аналитически в [2]. Интересные результаты по численному расчету течения в состыкованных трубах, одна из которых вращается, а другая покоится, представлены в [3]. Оказывается, что если покоится первая (по ходу течения) труба, то в пристеночной области образуется застойная зона, а если вторая — зона располагается у оси. Здесь и далее под застойными зонами понимаются области замкнутого циркуляционного течения, куда поток не проникает.

Возникновение вторичных течений при наличии крутки объясняется нарушением равновесия между силами давления и центробежными силами. Например, при вращении диска в покоящейся среде [1] частицы жидкости у поверхности диска за счет вязкого трения получают приращение азимутальной скорости, а так как проникающее из объема давление не компенсирует центробежной силы, то частицы отбрасываются в радиальном направлении. Известны различные механизмы образования центральных полостей в закрученных течениях [4].

В данной работе рассматриваются некоторые особенности течения жидкости в вихревой камере (фиг. 1). Показывается, что если жидкость вязкая, несжимаемая, некапельная, то образование застойных зон в приосевой области вихревой камеры происходит вследствие диффузии вихря с оси симметрии. Вихревую камеру можно разбить на ячейки (на фиг. 1 вихревая ячейка выделена штрихом) и течение рассматривать только в вихревой ячейке, так как картина течения симметрична относительно плоскостей $z = \pm l(n + 1/2)$.

Исследование проведено на основе численного решения полных уравнений Навье — Стокса, записанных в осесимметричном случае относительно новых неизвестных ξ , ψ , Γ . Уравнение для азимутальной компоненты ротора скорости ξ — уравнение переноса азимутальной компоненты вихря, получающееся действием оператора rot_φ на уравнение переноса импульса. Уравнение для циркуляции Γ получается непосредственно из уравнения для азимутальной компоненты скорости простым переходом от неизвестной v_φ к rv_φ . Функция тока ψ вводится так, чтобы автоматически удовлетворялось уравнение неразрывности. Уравнение для ψ вытекает из определения ξ при подстановке в него радиальной и осевой компонент скорости, выраженных через ψ . В безразмерном виде исходная система уравнений имеет вид

$$(1) \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \Gamma = rv_\varphi;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \xi}{\partial r} + v_z \frac{\partial \xi}{\partial z} - v_r \frac{\xi}{r} - \frac{2}{k^2} \frac{\Gamma}{r^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right);$$

$$(3) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right);$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r \xi.$$

За масштабы величин приняты r_1 — радиус критической точки A , v_{r_1} — скорость, которая была бы в сечении $r = r_1$ при равномерном радиальном течении, Γ_0 — циркуляция на входе. Течение в камере определяется следующими параметрами:

$$L = l/r_1, \quad \text{Re} = v_{r_1} r_1 / \nu, \quad k = v_{r_1} r_1 / \Gamma_0,$$

где Re — число Рейнольдса; k — параметр крутки.

Симметрия картины течения относительно поверхностей $z = L/2$, $z = -L/2$, которые не являются твердыми поверхностями, позволяет поставить граничные условия отсутствия касательных напряжений и непротекания на них $\partial \Gamma / \partial z = 0$, $\xi = 0$, $\psi = 0$.

На промежуточной вставке требуется выполнение аналогичных граничных условия $\partial \Gamma / \partial z = 0$, $\xi = 0$, $\psi = -c$. Постановка таких искусственных граничных условий оправдана: во-первых, основной интерес в задаче представляет течение в приосевой области, во-вторых, считается, что при данной организации течения влияния вязкого взаимодействия потока с твердой стенкой и отрыва течения будут локальными и сосредоточенными вблизи промежуточной вставки, мало сказываясь на картине течения в приосевой области, в-третьих, пренебрежение вязким взаимодействием потока с твердой стенкой, т. е. замена граничных условий прилипания условиями отсутствия касательных напряжений, существенно облегчает численный расчет течения в камере. По тем же причинам в критической точке требуется, чтобы $\xi = 0$. На оси задаются условия симметрии и квазитвердого вращения: $\Gamma = 0$, $\xi = 0$, $\psi = 0$. На входе в вихревую ячейку ставятся условия равномерности профиля скоростей потока: $\psi = -c(L + 2z)/L$, $\xi = 0$, $\Gamma = 1$. В выходном сечении считается, что при достаточном его удалении от центральной области камеры профиль v_r и Γ выравнивается, а $v_z \rightarrow 0$, циркуляция на выходе взята такой же, как и на входе в камеру: $\psi = +c(2z - L)/L$, $\xi = 0$, $\Gamma = 1$.

Обратимся к исходной системе уравнений. Из уравнения (2) видно, что если циркуляция изменяется в осевом направлении, то в объеме появ-

ляются источники азимутальной компоненты вихря — член $\Gamma/r^3 \cdot \partial\Gamma/\partial z$. В этом случае и происходит нарушение равновесия между силами давления и центробежными силами. Изменение поля ξ в свою очередь приводит к изменению поля ψ или соответственно v_r и v_z . Влияние крутки характеризуется числом k . Величина $1/k^2$ — отношение характерных масштабов инерционных и центробежных сил. В случае идеальной жидкости осевой градиент циркуляции возникает при наличии радиальных перемещений, если во входном сечении профиль циркуляции неоднородный [5]. В случае вязкой жидкости большие значения $\partial\Gamma/\partial z$ могут появиться при взаимодействии потока с твердой стенкой. Поставленные граничные условия в рассматриваемой задаче исключают эти оба случая. В определенных условиях в возникновении $\partial\Gamma/\partial z$ может сыграть роль диффузия осевой компоненты вихря с оси симметрии.

Возможность возникновения диффузии z -компоненты вихря с оси симметрии показывает простой пример. Пусть в цилиндрическом канале профили радиальной и осевой компоненты скорости имеют вид $v_r = -r$, $v_z = 2z$. Если поток закручен и на поверхности ($r = 1$) $\Gamma = 1$, то решением уравнения (3), удовлетворяющим условию кватерного вращения на оси, будет

$$\Gamma = \left[1 - \exp\left(-\frac{\text{Re} r^2}{2}\right) \right] / \left[1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}}{2}\right) \right],$$

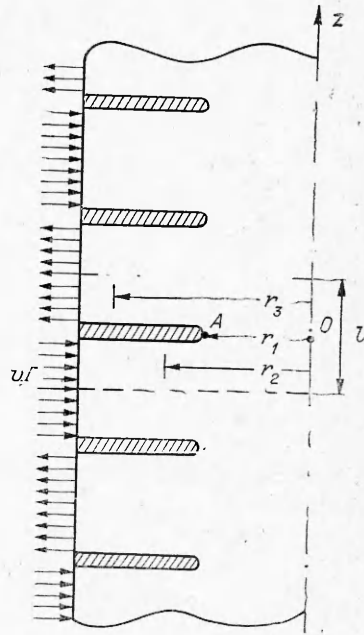
а осевая компонента вихря $\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial\Gamma}{\partial r}$ имеет вид

$$\omega_z = \text{Re} \exp\left(-\frac{\text{Re} r^2}{2}\right) / \left[1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}}{2}\right) \right].$$

Это решение показывает, что под действием вязких напряжений элемент жидкости при приближении к оси будет терять свой момент вращения, отдавая его внешним слоям. Эффект вязкого механизма радиальной передачи момента вращения (или диффузии вихря с оси симметрии) является определяющим в эффекте Ранка — вихревом эффекте температурного разделения газа [6]. Здесь одновременно с вязким механизмом передачи момента происходит передача энергии от внутренних слоев жидкости к внешним, так как внутренние слои раскручивают внешние.

В вихревой ячейке (см. фиг 1) наряду с вязким механизмом передачи момента вращения происходит и конвективный перенос. Одновременное действие вязкого и конвективного переноса момента приводит к нарушению однородности профиля циркуляции по z . Это можно проиллюстрировать для случая малых круток $k \gg 1$. В нулевом приближении $\xi = 0$ и в центральной области ($0 \leq r < 1$, $-L/2 \leq z \leq L/2$)

$$(5) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r I_1 \left[\frac{n\pi r}{L} \right] \cos \frac{n\pi z}{L},$$



Ф и г. 1

где I_1 — модифицированная функция Бесселя. В приосевой области можно ограничиться первым членом ряда (5) и, исходя из поведения функции I_1 при $r \rightarrow 0$, течение представить в виде

$$(6) \quad v_r = \frac{\pi c_1}{L} r \sin \frac{\pi z}{L}, \quad v_z = 2c_1 \cos \frac{\pi z}{L}.$$

В приближении пограничного слоя, когда вязким обменом в осевом направлении пренебрегается, решение уравнения (3) для данного профиля скоростей (6) имеет вид

$$(7) \quad \Gamma = 1 - \exp \left[-\frac{\text{Re}' r^2}{2} \frac{\sqrt{1-y^2}}{2(\pi - \arccos y)} \right],$$

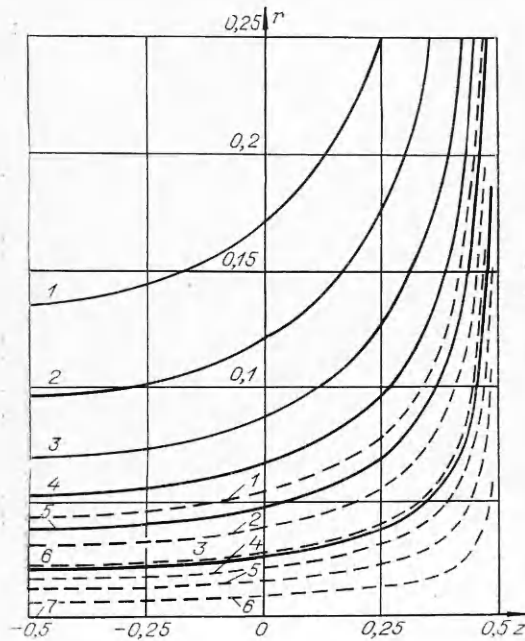
где $y = \sin(\pi z/L)$; $\text{Re}' = \text{Re} c_1 \pi / L$.

На фиг. 2 показано распределение циркуляции в приосевой области, даваемое выражением (7). Сплошными линиями обозначены линии постоянного значения циркуляции при $\text{Re}' = 1000$, штриховыми — при $\text{Re}' = 10000$ (кривые 1–7 соответствуют значениям $\Gamma = 0,99; 0,9; 0,7; 0,5; 0,3; 0,1; 0$). Характер распределения циркуляции в приосевой области практически не изменится, если учесть вязкий перенос момента в осевом направлении. В этом случае линии постоянного значения циркуляции не будут уходить на бесконечность ($r \rightarrow \infty$) при $z \rightarrow L/2$, а будут замыкаться на поверхность $z = L/2$.

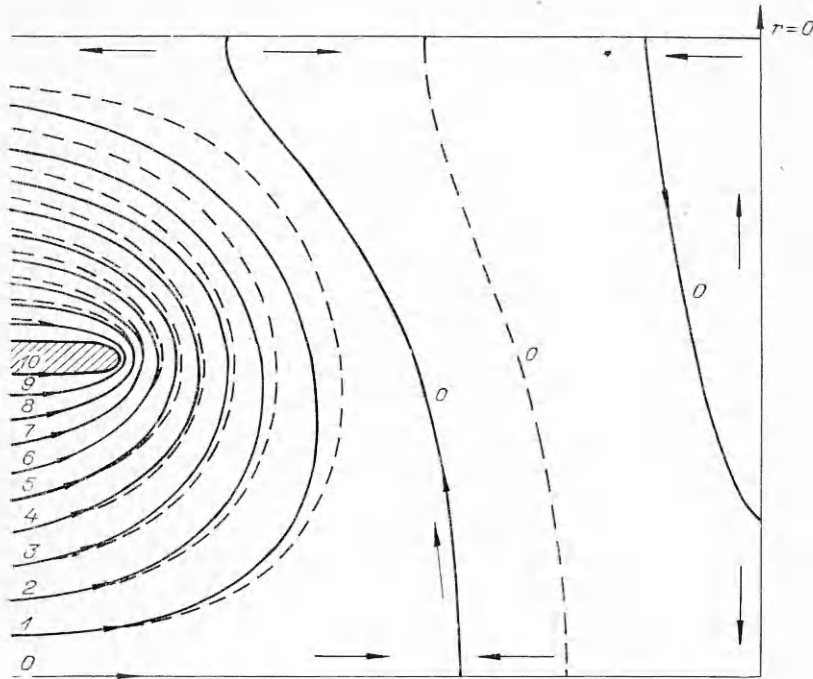
Если теперь обратиться к уравнению переноса ξ , то очевидно, что отрицательный градиент циркуляции в осевом направлении приведет к появлению вихря $\xi < 0$. За счет вязкого и конвективного переноса индуцируемый вихрь ξ распространяется по области течения и стекает на границы. Отрицательные значения азимутальной компоненты вихря соответствуют закручиванию течения по часовой стрелке в плоскости r, z

(см. фиг. 1) и оттеснению основного течения на периферию. Следовательно, при достаточно больших значениях Re и $1/k^2$ можно ожидать образования застойной зоны вблизи оси.

Проведенные численные расчеты закрученного течения в вихревой ячейке показывают наличие застойных зон вблизи оси и справедливость описанного механизма их образования. На фиг. 3 показаны распределения функции тока, полученные из численного решения. Штрихом обозначены линии постоянного значения функции тока при $\text{Re} = 25$, сплошными — при $\text{Re} = 100$ (кривые 0–10 соответствуют значениям ψ от 0 до $-0,5$ через $-0,05$). Расчеты проведены при следующих значениях параметров: $k = 1$, $L = 1$, $r_2/r_1 = 2$, $r_3/r_1 = 4$ (r_2, r_3 — радиусы поверхностей, на



Ф и г. 2



Ф и г. 3

которые снесены условия, поставленные на входе и выходе из камеры соответственно).

Как видно из фиг. 3, образовавшаяся зона растет с увеличением Re . С ростом застойной зоны растет и интенсивность индуцированного течения в ней. Очевидно, что с некоторого момента действие описанного выше механизма, ответственного за образование первой зоны, приведет к появлению второй застойной зоны. График распределения ψ при $Re = 100$ отражает этот случай. С дальнейшим повышением Re вторая зона будет расти и возможно образование третьей зоны. При очень высоких числах Re , вероятно, произойдет турбулизация течения в центральной области и сокращение описанных областей до одной.

Для нахождения стационарного течения в вихревой ячейке численно решалась система уравнений (1)–(4) с соответствующими граничными условиями методом установления, для чего в уравнение (4) добавляется член $r\partial\psi/\partial\tau$. Методом дробных шагов аналогично [7] строилась неявная разностная схема

$$\frac{f_i^{n+1/2} - f_i^n}{\tau} + L_i(A_r f_i^n, A_z f_i^{n+1/2}, A_r^2 f_i^n, A_z^2 f_i^{n+1/2}) = 0,$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n+1/2}}{\tau} + L_i(A_r f_i^{n+1/2}, A_z f_i^{n+1/2}, A_r^2 f_i^{n+1/2}, A_z^2 f_i^{n+1/2}) = 0,$$

где f_i — соответственно Γ, ξ, ψ ; $A_r f_i, A_z f_i, A_r^2 f_i, A_z^2 f_i$ — соответственно центральные разностные первые и вторые производные функции f_i по r и по z . Следует также отметить, что в разностных уравнениях для f_i все другие входящие неизвестные функции f_j , где $i \neq j$, берутся с предыдущего слоя. Это позволило расцепить систему уравнений и последователь-

но находить распределения Γ , ξ , ψ на $n + 1$ -м слое. При решении разностного уравнения для ψ проводились дополнительные итерации. Граничные условия первого рода аппроксимировали явно, граничные условия второго рода, согласно [7], исходя из выражения

$$\Gamma [i, 1] = \Gamma [i, 0] + \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \Big|_{i,0} h_z + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \Big|_{i,0} \frac{h_z^2}{2}.$$

Значение второй производной находится непосредственно из уравнения для Γ , распространенного на границу. При решении задачи в центральной области использовалась сетка 40×40 , равномерная по z и неравномерная по r . Закон изменения шага по r задавался следующим образом:

$$r [i] = h_r [0] \frac{(1 + \alpha)^i - 1}{\alpha} \quad \text{или} \quad h_r [i + 1] = (1 + \alpha) h_r [i].$$

Для представленных расчетов $\alpha = 0,024$.

Автор выражает благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе.

Поступила 26 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеиздат, 1975.
2. Гольдштик М. А. Приближенное решение задачи о ламинарном закрученном потоке в круглой трубе.—«Инж.-физ. журн.», 1959, т. 1, № 3.
3. Будунов Н. Ф. Исследование отрывных и закрученных течений несжимаемой жидкости в каналах переменного сечения. Автореф. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973.
4. Гольдштик М. А., Зыкин Г. П., Петухов Ю. И., Сорокин В. Н. Об определении радиуса воздушного вихря в центробежной форсунке.—ПМТФ, 1969, № 4.
5. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
6. Гольдштик М. А. К теории эффекта Ранка (закрученный поток газа в вихревой камере).—«Изв. АН СССР. Мех. и машиностроение», 1963, № 1.
7. Болдырева З. В., Кускова Т. В. К вопросу об обтекании сферы вязкой несжимаемой жидкостью.— В кн.: Численные методы в механике сплошных сред. Вып. 15. М., изд. ВЦ Моск. ун-та, 1970.

УДК 534.222.2

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВОЗЛЕ ЦИЛИНДРА В СЛОЖНОМ ЗВУКОВОМ ПОЛЕ

В. Б. Репин

(Казань)

Известно, что при наличии звукового поля возле твердой поверхности появляются стационарные течения, которые могут в значительной степени влиять на процессы тепло- и массообмена [1—3]. Как правило, все работы из этой области относятся к тому случаю, когда звуковое поле можно представить в виде одной волны. Однако на практике часто встречаются ситуации, когда зву-