

УДК 539.375

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЩЕЛЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ С ЧАСТИЧНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ ПРИ НАЛИЧИИ КОНЦЕВЫХ ЗОН ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1073 Баку, Азербайджан  
Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан  
E-mail: mir-vagif@mail.ru

Рассматривается задача о сжатии изотропной среды с периодической системой щелей переменной ширины, сравнимой с упругими перемещениями. Берега щелей находятся под действием внутреннего давления. Считается, что на концах щелей имеются зоны пластической деформации. Исследован случай наличия нескольких участков контакта берегов каждой щели в предположении, что на одной части площадки контакта имеет место сцепление берегов, на остальной части возможно проскальзывание. Задача о равновесии периодической системы щелей с частично контактирующими берегами под действием сжимающей нагрузки сводится к задаче линейного сопряжения аналитических функций. Определены контактные напряжения, размеры участков контакта, зон сцепления и концевых зон пластических деформаций.

**Ключевые слова:** изотропная среда, периодическая система щелей переменной ширины, концевые зоны пластических деформаций, контактные напряжения, зоны сцепления, зоны проскальзывания.

DOI: 10.15372/PMTF20190113

**Введение.** Рассматривается однородная изотропная среда, ослабленная периодической системой прямолинейных щелей переменной ширины  $h(x)$ . Считается, что на концах каждой щели имеются зоны пластической деформации. При наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается достаточно большая часть трещины. В этом случае область разрушения рассматривается как примыкающий к трещине слой (концевая зона), материал которого частично разрушен. Используется модель Леонова — Панасюка — Дагдейла, согласно которой область пластичности находится на продолжении трещины. Пусть в среде, располагающейся в плоскости  $xOy$ , имеется периодическая система щелей длиной  $2l = b - a$ . Считается, что среда находится под действием сжимающей нагрузки.

В процессе нагружения среды при некотором соотношении ее физических и геометрических параметров появляются зоны, в которых берега щелей могут войти в контакт, что приведет к возникновению контактных напряжений на данном участке берегов щели. Тела с трещинами, между берегами которых действуют когезионные силы, с учетом контакта берегов исследовались в работах [1–14].

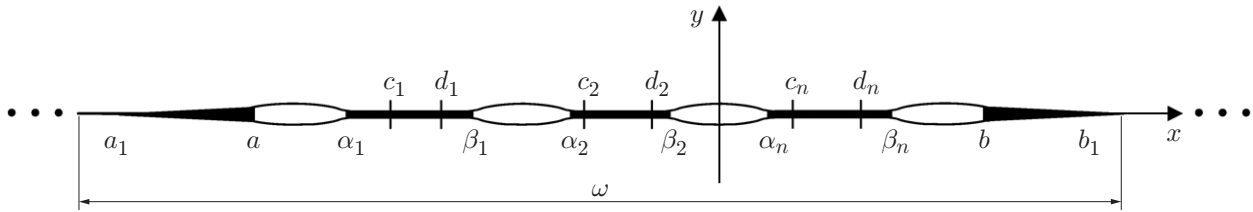


Рис. 1. Положение щели на одном периоде

**1. Постановка задачи.** Пусть бесконечная изотропная плоскость ослаблена периодической системой прямолинейных щелей переменной ширины  $h(x)$ , сравнимой с упругими перемещениями. Плоскость находится в поле сжимающих напряжений (главные напряжения на бесконечности равны  $N_1$  и  $N_2$ ). Рассматривается периодическая задача о плоскости с одинаковыми щелями, расположенными вдоль оси  $x$  с некоторым периодом  $\omega$ . На рис. 1 показано положение щели на одном периоде.

В процессе деформации берега щелей вступают в контакт на участках  $(\alpha_k + m\omega, \beta_k + m\omega)$  ( $k = 1, 2, \dots, n; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Будем полагать, что каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов  $(c_k + m\omega, d_k + m\omega)$  и двух участков  $(\alpha_k + m\omega, c_k + m\omega)$  и  $(d_k + m\omega, \beta_k + m\omega)$ , на которых возможно проскальзывание.

Обозначим через  $L'_1$  совокупность участков сцепления,  $L'_2$  — совокупность участков проскальзывания,  $L'_3$  — совокупность участков, на которых действует давление  $p(x)$ ,  $L'_4$  — совокупность концевых участков пластических деформаций  $(a_1 + m\omega, a + m\omega) \cup (b + m\omega, b_1 + m\omega)$ .

В процессе нагружения изотропной среды в зонах, где берега щелей входят в контакт, возникают нормальные  $p_y(x)$  и касательные  $p_{xy}(x)$  напряжения, значения которых заранее неизвестны и подлежат определению. В рассматриваемом случае каждая щель состоит из областей трех типов. В областях первого типа противоположные берега щели находятся под действием давления газа, в областях второго типа  $(\alpha_k + m\omega, \beta_k + m\omega)$  берега щели входят в контакт, области третьего типа представляют собой концевые зоны  $(a_1 + m\omega, a + m\omega)$  и  $(b + m\omega, b_1 + m\omega)$ , в которых имеет место пластическое течение материала при постоянных напряжениях.

Для рассматриваемой задачи граничные условия на берегах периодической системы щелей с концевыми зонами имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} = p_y - ip_{xy} \quad \text{на } L'_1, \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = (1 - if(x))p_y \quad \text{на } L'_2, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} = -p(x) \quad \text{на } L'_3, \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_s - i\tau_s \quad \text{на } L'_4; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) = -h'(x) \quad \text{на } L'_1 + L'_2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) = 0 \quad \text{на } L'_1, \quad (2)$$

где  $f(x)$  — коэффициент трения;  $\sigma_s, \tau_s$  — пределы текучести материала на растяжение и сдвиг соответственно;  $u^+ - u^-, v^+ - v^-$  — касательная и нормальная составляющие величины раскрытия берегов щели. Полагается, что на участках проскальзывания действуют силы сухого трения (закон трения принимается в форме Амонтона — Кулона).

Модель контакта с трением и сцеплением впервые рассмотрена в работах [15, 16].

Размеры контактных зон заранее неизвестны и подлежат определению.

**2. Метод решения.** Напряженное состояние в плоскости с периодической системой прямолинейных щелей представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \quad (3)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  — решение уравнений плоской теории упругости для плоскости без щелей при сжатии главными напряжениями  $N_1$  и  $N_2$  на бесконечности:

$$\sigma_x^0 = [N_1 + N_2 + (N_1 - N_2) \cos 2\alpha]/2, \quad \sigma_y^0 = [N_1 + N_2 - (N_1 - N_2) \cos 2\alpha]/2, \\ \tau_{xy}^0 = -(N_1 - N_2) \sin 2\alpha/2,$$

$\alpha$  — угол между осью  $x$  и направлением главного напряжения  $N_1$ ;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  — решение уравнений плоской теории упругости для плоскости с периодической системой прямолинейных щелей с концевыми зонами, в которых напряжения на бесконечности обращаются в нуль.

С учетом формул (3) граничные условия (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_1, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= (1 - if)p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_2, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_3, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  и компоненты вектора перемещений  $u_1, v_1$  выразим через две кусочно-аналитические функции комплексной переменной  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + iv_1) &= \varkappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \Phi'(z) \end{aligned} \quad (5)$$

( $\mu$  — модуль сдвига материала пластины;  $\varkappa = 3 - 4\nu$  в случае плоской деформации,  $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  в случае плоского напряженного состояния;  $\nu$  — коэффициент Пуассона).

Следуя работе [17], на основе граничных условий (4) получаем задачу линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2f_1(t), \quad [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t) &= p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_1, & f_1(t) &= (1 - if)p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_2, \\ f_1(t) &= -p(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_3, & f_1(t) &= \sigma_s - i\tau_s - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L'_4. \end{aligned}$$

С помощью конформного преобразования  $w = \sin(\pi z/\omega)$  перейдем от физической плоскости  $z = x + iy$  к параметрической плоскости комплексной переменной  $w = \eta + i\xi$ . Тогда внешность периодической системы щелей физической плоскости  $z$  переходит на бесконечнолистную риманову поверхность  $w$ , разрезанную вдоль отрезка  $(\eta_1, \eta_2)$  действительной оси  $\eta$  на всех листах ( $\eta_1 = \sin(\pi a_1/\omega)$ ,  $\eta_2 = \sin(\pi b_1/\omega)$ ).

Так как напряжения в плоскости ограничены, то решение краевой задачи (6) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Искомое решение задачи (6) с учетом преобразования  $w = \sin(\pi z/\omega)$  запишем в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{X(z)}{2i\omega} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{f_1(\sin(\pi t/\omega) \cos(\pi t/\omega))}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi z/\omega))} dt. \quad (7)$$

При  $z \rightarrow \infty$

$$X(z) = \sqrt{(\sin(\pi z/\omega) - \sin(\pi a_1/\omega))(\sin(\pi z/\omega) - \sin(\pi b_1/\omega))} = \sin(\pi z/\omega) + O(1/z^2).$$

Корень под знаком интеграла в (7) представляет собой ветвь соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели.

Для определения  $a_1$  и  $b_1$  имеем два соотношения

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{f_1(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)} dt = 0, \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sin(\pi t/\omega) f_1(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)} dt = 0, \quad (8)$$

где

$$X^+(t) = \sqrt{(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi a_1/\omega))(\sin(\pi b_1/\omega) - \sin(\pi t/\omega))}.$$

В соотношения (7), (8) входят неизвестные контактные напряжения  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$ .

Построим интегральные уравнения для нахождения неизвестных функций  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$ . Эти функции определяются из граничных условий (2).

Используя второе соотношение в (5) и граничные значения функций  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$ , на отрезке  $y = 0$ ,  $a_1 \leq x \leq b_1$  получаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_1^+ - u_1^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_1^+ - v_1^-) \right]. \quad (9)$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [17], с учетом (7) находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{iX^+(x)}{\omega} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{f_1(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt. \quad (10)$$

Учитывая соотношения (2), (9), (10), после ряда преобразований получаем систему сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{X^+(x)}{\omega} \left( \int_{L_1+L_2} \frac{p_y(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt - \right. \\ & - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sigma_y^0 \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt - \int_{L_3} \frac{p(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt + \\ & \left. + \int_{L_4} \frac{\sigma_s \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt \right) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa} h'(x); \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_1} \frac{p_{xy}(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt + \int_{L_2} \frac{f p_y(\sin(\pi t/\omega)) \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt - \\ & - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\tau_{xy}^0 \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt + \int_{L_4} \frac{\tau_s \cos(\pi t/\omega)}{X^+(t)(\sin(\pi t/\omega) - \sin(\pi x/\omega))} dt = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь  $L_1$  — совокупность участков сцепления берегов для одной щели ( $c_k^*$ ,  $d_k^*$ );  $L_2$  — совокупность участков проскальзывания берегов для одной щели ( $\alpha_k^*$ ,  $c_k^*$ ) и ( $d_k^*$ ,  $\beta_k^*$ );  $c_k^* = \sin(\pi c_k/\omega)$ ;  $d_k^* = \sin(\pi d_k/\omega)$ ;  $\alpha_k^* = \sin(\pi \alpha_k/\omega)$ ;  $\beta_k^* = \sin(\pi \beta_k/\omega)$ ;  $L_3$  — совокупность участков щели, нагруженной давлением газа;  $L_4$  — совокупность концевых зон пластических деформаций одной щели ( $a_1^*$ ,  $a^*$ )  $\cup$  ( $b^*$ ,  $b_1^*$ );  $a^* = \sin(\pi a/\omega)$ ;  $b^* = \sin(\pi b/\omega)$ ;  $a_1^* = \eta_1$ ;  $b_1^* = \eta_2$ .

Решение сингулярного интегрального уравнения (11) можно получить, решив соответствующую задачу Римана [17]. Интегральное уравнение (11) представим в виде

$$\int_{L_1+L_2} \frac{p^*(\eta)}{\eta - t_*} d\eta = f_*(t_*),$$

где

$$p_y^*(\eta) = \frac{p_y(\sin(\pi\tau/\omega))}{X^+(\eta)},$$

$$f_*(t_*) = \frac{2\mu h'(\sin(\pi t/\omega))}{(1+\varkappa)X^+(t)} + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sigma_y^0}{X^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta + \int_{L_3} \frac{p(\eta)}{X^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta - \int_{L_4} \frac{\sigma_s}{X^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta,$$

$$\eta = \sin(\pi\tau/\omega), \quad t_* = \sin(\pi t/\omega).$$

Введем кусочно-аналитическую функцию  $F_*(z)$ , заданную интегралом Коши, плотностью которого является искомое решение интегрального уравнения

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{p_y^*(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

Аналитическая функция  $F_*(z)$  представляет собой решение задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F_*^+(\eta) + F_*^-(\eta) = \frac{f_*(\eta)}{\pi i}. \quad (13)$$

Решение краевой задачи (13) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$F_*(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\eta)}{X_1^+(\eta)(\eta - z)} d\eta,$$

где

$$X_1^+(\eta) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(\eta - \alpha_k^*)(\eta - \beta_k^*)}, \quad X_1(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z - \alpha_k^*)(z - \beta_k^*)}, \quad f_*^1(\eta) = \frac{f_*(\eta)}{\pi i}.$$

С использованием формул Сохоцкого — Племеля находим решение интегрального уравнения (11)

$$p_y^*(t_*) = F_*^+(t_*) + F_*^-(t_*),$$

$$F_*^+(t_*) = X_1^+(t_*) \left( \frac{1}{2} \frac{f_*^1(t_*)}{X_1^+(t_*)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\eta)}{X_1^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta \right),$$

$$F_*^-(t_*) = X_1^-(t_*) \left( -\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t_*)}{X_1^+(t_*)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\eta)}{X_1^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta \right).$$

Учитывая, что  $X_1^-(t_*)/X_1^+(t_*) = -1$ , получаем равенство

$$p_y^*(t_*) = \frac{X_1^+(t_*)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\eta)}{X_1^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta,$$

из которого следует

$$p_y(t_*) = X^+(t_*) \frac{X_1^+(t_*)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\eta)}{X_1^+(\eta)(\eta - t_*)} d\eta.$$

Для определения параметров  $\alpha_k^*$  и  $\beta_k^*$  имеем уравнения

$$\int_{L_1+L_2} \frac{\eta^{k-1} f_*(\eta)}{X_1^+(\eta)} d\eta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Остальные  $n$  уравнений, необходимых для определения координат концов участков контакта берегов щели, получаем из условий

$$v^+(\alpha_k^*) - v^-(\alpha_k^*) = -h(\alpha_k^*), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

т. е.

$$v^+(\alpha_k^*) - v^-(\alpha_k^*) = \frac{1}{4\pi i \gamma} \int_{\alpha_1^*}^{\eta} G(t) dt,$$

где  $\gamma = \mu/(\pi(1 + \varkappa))$ ;  $G(t) = [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^-$ .

Из приведенных выше формул следуют искомые уравнения

$$\int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^*} G(t) dt = -4\pi i \gamma h(\alpha_1^*),$$

$$\int_{\beta_1^*}^{\alpha_{k+1}^*} G(t) dt = -4\pi i \gamma [h(\alpha_{k+1}^*) - h(\beta_{k+1}^*)], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогично, решая сингулярное интегральное уравнение (12), получаем

$$p_{xy}(\eta) = \frac{X^+(\eta)X_2^+(\eta)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(t_*)}{X_2^+(\eta)(t_* - \eta)} dt_*,$$

где

$$X_2^+(\eta) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(\eta - c_k^*)(\eta - d_k^*)},$$

$$f_{xy}(\eta) = - \int_{L_2} \frac{f p_y(t_*)}{X_1^+(t_*)(t_* - \eta)} dt_* + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\tau_{xy}^0(t_*)}{X_1^+(t_*)(t_* - \eta)} dt_* - \int_{L_4} \frac{\tau_s}{X_1^+(t_*)(t_* - \eta)} dt_*.$$

Неизвестные  $c_k^*$  и  $d_k^*$  определяются из уравнений

$$\int_{L_1} \frac{\eta^{k-1} f_{xy}(\eta)}{X_2^+(\eta)} d\eta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (16)$$

Остальные  $m$  уравнений, необходимых для определения коэффициентов координат концов участков контакта, получаем из условий

$$u^+(c_k^*) - u^-(c_k^*) = \int_{\eta_1}^{c_k^*} \frac{\partial}{\partial t} (u^+ - u^-) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

т. е.

$$\int_{\eta_1}^{c_k^*} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma h(c_1^*), \tag{17}$$

$$\int_{d_1^*}^{c_{k+1}^*} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -2\pi i \gamma [h(c_{k+1}^*) - h(d_k^*)], \quad k = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Для определения участков сцепления имеем полную систему уравнений. Для вычисления интегралов, содержащих функции  $X^+(t)$ ,  $X_1^+(t)$  и  $X_2^+(t)$ , использовался прием, предложенный Н. И. Мухелишвили [17, § 110].

При определении предельного состояния среды под действием внешней нагрузки в качестве критерия разрушения использовался критерий критического раскрытия щели [18]

$$|(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)| = \delta_c,$$

где  $\delta_c$  — трещиностойкость материала.

На основе полученного решения при  $x = a$  находим

$$\frac{1 + \varkappa}{2\mu} \left| \int_{a_1^*}^{a^*} [\Phi^+ - \Phi^-] d\eta \right| = \delta_c, \tag{18}$$

при  $x = b$  —

$$\frac{1 + \varkappa}{2\mu} \left| \int_{b^*}^{b_1^*} [\Phi^+ - \Phi^-] d\eta \right| = \delta_c.$$

При вычислении интеграла в левой части (18), выполнив замену переменных, переходим к отрезку интегрирования  $[-1, 1]$ , далее интеграл вычисляется с использованием квадратурной формулы Гаусса — Чебышева. Применение полученных выше уравнений позволяет при заданных характеристиках материала найти критическое напряженное состояние, при котором происходит увеличение щели.

**3. Анализ результатов.** Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$  от размеров щели. При вычислении контактных напряжений и размеров концевых и контактных зон полагалось, что на берега щели действует постоянное давление. Результаты расчета абсолютных величин контактных напряжений  $p_y/N_1$  в зоне контакта при  $\alpha = \pi/4$ ,  $p(x)/N_1 = 0,25$  и различных значениях относительного размера щели приведены на рис. 2.

При расчетах использована безразмерная координата  $x'$ , связанная с  $x$  соотношением

$$x = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} x'.$$

Ширина щели изменяется по параболическому закону.

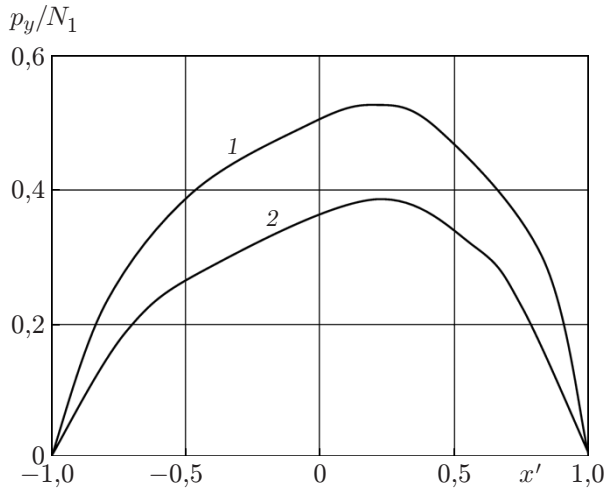


Рис. 2

Рис. 2. Распределение контактных напряжений вдоль зоны контакта при различных значениях относительного размера щели:

1 —  $l_* = 0,02$ , 2 —  $l_* = 0,05$

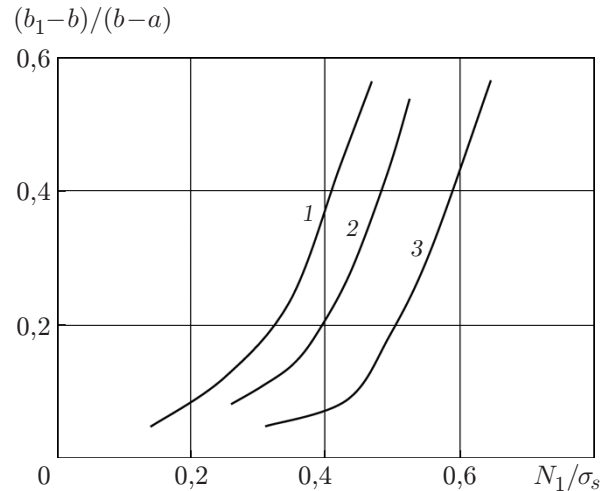


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость размеров зоны пластических деформаций от безразмерной внешней силы при различной длине щели:

1 —  $l_* = 0,02$ , 2 —  $l_* = 0,05$ , 3 —  $l_* = 0,10$

Наибольшие значения контактных напряжений достигаются в средней части контактной зоны, где берега щели смыкаются. С увеличением размера концевой зоны пластических деформаций контактные напряжения уменьшаются. Характер изменения касательных напряжений  $p_{xy}(x)$  вдоль контактной зоны подобен характеру изменения нормальных контактных напряжений  $p_y(x)$ , но абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше.

На рис. 3 приведены зависимости размеров зоны пластических деформаций  $(b_1 - b)/(b - a)$  от безразмерной внешней силы  $N_1/\sigma_s$  при  $\nu = 0,3$ , числе чебышевских узлов разбиения интервала интегрирования  $M = 30$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $p(x)/N_1 = 0,25$  и различной длине щели:  $l_* = (b - a)/\omega = 0,02; 0,05; 0,10$ .

Рассмотрим контактную задачу для периодической системы щелей переменной ширины, изменяющейся по линейному закону

$$h(x) = h_2 + (h_1 - h_2) \frac{b - x}{b - a}, \quad h'(x) = -\frac{h_1 - h_2}{b - a},$$

в случае  $\alpha = \pi/2$ ,  $f(x) = f_0$ ,  $p(x) = 0$ .

Координаты области контакта определяются из решения уравнений (14), (15).

При вступлении берегов щели в контакт  $\alpha_1 = \beta_1$ . Переходя в полученных выше решениях к пределу при  $\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \rightarrow a_0^*$ , находим точку контакта и соответствующую нагрузку:

$$a_0 = \frac{h_1 b^* + h_2 a^*}{h_1 + h_2}, \quad \frac{N_1^2}{\sqrt{(N_1)^2 + (N_2)^2}} = 4\gamma\pi \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{b^* - a^*}.$$

Для вычисления координат концов зоны сцепления используем уравнения (16), (17).



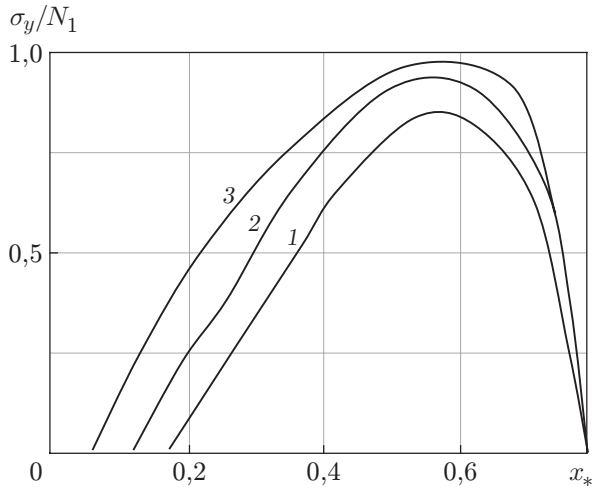


Рис. 4

Рис. 4. Распределение нормальных контактных напряжений вдоль зоны контакта при различных значениях  $N_1/E$ :

1 —  $N_1/E = 2 \cdot 10^{-4}$ , 2 —  $N_1/E = 3 \cdot 10^{-4}$ , 3 —  $N_1/E = 4 \cdot 10^{-4}$

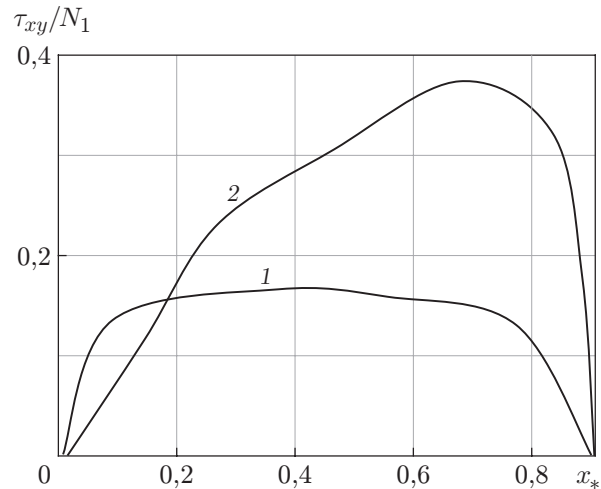


Рис. 5

Рис. 5. Распределение касательных контактных напряжений вдоль зоны контакта при различных значениях  $N_2/N_1$ :

1 —  $N_2/N_1 = 0,1$ , 2 —  $N_2/N_1 = 0,3$

Выполняя предельный переход  $c \rightarrow d \rightarrow c_*$ , определяем нагрузку и положение зоны сцепления:

$$c_* = \frac{h_1 b^* + h_2 a^*}{h_1 + h_2}, \quad \frac{N_1(N_1 f_0 - N_2)}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2}} = 4\gamma\pi \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{b^* - a^*}.$$

На рис. 4, 5 представлены распределения нормальных и касательных контактных напряжений в случае  $h_1 = 0,0007(b - a)$ ,  $h_2 = 0,15h_1$ ,  $x_* = x/(b - a)$  ( $E$  — модуль упругости материала). На рис. 4 для всех кривых  $N_2 = 0,15N_1$ , на рис. 5 —  $N_1 = 2 \cdot 10^{-4}E$ .

**Заключение.** Предложена схема расчета напряженно-деформированного состояния периодической системы щелей, на берегах которых действует внутреннее давление. Задача сводится к параметрическому исследованию системы сингулярных интегральных уравнений при различных физических параметрах среды и геометрических параметрах щелей. Из решения полученных уравнений определены контактные напряжения  $p_y(x)$ ,  $p_{xy}(x)$ , а также размеры контактных и концевых зон пластических деформаций.

Полученные соотношения позволяют найти решение обратной задачи, т. е. определить параметры внешних сил и напряженное состояние изотропной среды, при которых имеет место заданная область контакта берегов периодической системы щелей переменной ширины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Belhouari M., Amiri A., Mehidi A., et al.** Elastic-plastic analysis of interaction between an interface and crack in bimetals // Intern. J. Damage Mech. 2014. V. 23, iss. 3. P. 299–326.
2. **Fan H., Sun Y.M., Xiao Z. M.** Contact zone in an interfacial Zener — Stroh crack // Mech. Materials. 1998. V. 30, iss. 2. P. 151–159.

3. **Гасанов Ш. Г.** Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 2. С. 58–64.
4. **Kovtunen V. A.** Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. angew Math. Mech. 2005. Bd 85, Fasz. 4. S. 242–251.
5. **Мирсалимов В. М.** Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 78–92.
6. **Мирсалимов В. М., Мустафаев А. Б.** Точное решение контактной задачи о частичном взаимодействии берегов щели переменной ширины при действии температурного поля // Пробл. машиностроения. 2014. Т. 17, № 3. С. 33–37.
7. **Mirsalimov V. M., Mustafayev A. B.** A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field // Mechanika. 2015. V. 21, N 1. P. 19–22.
8. **Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э.** Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 6. С. 181–190.
9. **Мир-Салим-заде М. В.** Частичный контакт берегов щели переменной ширины в подкрепленной стрингерами пластине // Физ.-хим. механика материалов. 2016. Т. 52, № 3. С. 29–34.
10. **Мустафаев А. Б.** Взаимодействие берегов щели переменной ширины при изгибе полосы (балки) под воздействием температурного поля // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 3. С. 30–36.
11. **Мирсалимов В. М.** Контактная задача о взаимодействии берегов щели переменной ширины с концевыми зонами пластических деформаций // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 2. С. 24–34.
12. **Mir-Salim-zada M. V.** Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots // Struct. Engng Mech. 2017. V. 62, N 6. P. 719–724.
13. **Мустафаев А. Б.** Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 1. С. 168–176.
14. **Mirsalimov V. M.** Simulation of partial closure of a variable width slot with interfacial bonds in end zones in an isotropic medium // Intern. J. Damage Mech. 2016. V. 25, iss. 2. P. 266–279.
15. **Галин Л. А.** Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. 1945. Т. 9, вып. 5. С. 413–424.
16. **Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М.** Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 695–709.
17. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
18. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. К.: Наук. думка, 1991.

*Поступила в редакцию 13/VI 2018 г.,  
после доработки — 6/VII 2018 г.  
Принята к публикации 3/IX 2018 г.*