

УДК 539.3 : 519.642.7

## РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ГЛАДКИМИ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. В. Тягний

Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия  
E-mail: av-tg@yandex.ru

С использованием подхода, основанного на представлении искомых комплексных потенциалов Лехницкого в виде интегралов типа интегралов Коши с неизвестными плотностями на границе области, занятой телом, построено граничное сингулярное интегральное уравнение плоской задачи. Контуры отверстий, разрезов и форма внешней границы точно или приближенно представлены в виде последовательности прямолинейных и криволинейных (в виде дуг эллипсов) граничных элементов. Неизвестные плотности на граничных элементах аппроксимируются линейной комбинацией некоторых регулярных либо имеющих известную особенность комплексных функций. При численном решении интегрального уравнения методом коллокаций или методом наименьших квадратов и последующих расчетах напряженно-деформированного состояния интегралы всех типов вдоль граничных элементов вычислены аналитически, что значительно увеличивает точность результатов.

**Ключевые слова:** упругость, анизотропия, плоская задача, комплексное сингулярное интегральное уравнение, граничный элемент, аналитическое интегрирование.

DOI: 10.15372/PMTF20150419

**Введение.** Переход в комплексную плоскость при решении двумерных задач теории упругости позволяет использовать эффективные средства теории функций комплексной переменной, а именно аналитические функции и их свойства, конформные отображения, интегралы типа интегралов Коши и Адамара. Применение разработанных на основе этих интегралов методов комплексных сингулярных и гиперсингулярных граничных интегральных уравнений (ГИУ) позволяет решать краевые задачи для изотропных и анизотропных тел конечных и бесконечных размеров с разрезами (трещинами) и отверстиями произвольной формы [1–6]. Однако при использовании для получения численного решения сингулярных ГИУ метода механических квадратур [1–4] или комплексного метода граничных элементов (КМГЭ) с применением численного интегрирования [5] погрешность вычисления интегралов типа интегралов Коши в точках вблизи контура интегрирования (границы) является значительной. Это приводит к уменьшению точности решения ГИУ при малых расстояниях между отверстиями, трещинами и внешней границей и точности вычисления напряжений вблизи концентраторов. Для повышения точности расчетов необходимо использовать специальные схемы численного интегрирования и модифициро-

вать их при изменении положения каждой расчетной точки вблизи границы. В других вариантах КМГЭ, разработанных для изотропных материалов [5, 7], выбор типовых граничных элементов (ГЭ) и аппроксимирующих функций позволяет проводить поэлементное интегрирование в замкнутой форме и тем самым обеспечивает максимальные точность и простоту вычислительных процедур при любом положении расчетных точек относительно границы.

В настоящей работе предложен основанный на аналитическом интегрировании КМГЭ для решения комплексных сингулярных ГИУ и определения напряженно-деформированного состояния в плоской задаче теории упругости анизотропного тела. Метод апробирован для случая бесконечной или конечной пластины, ослабленной гладкими ненагруженными отверстиями и разрезами. Этот подход может быть также использован при решении уравнений данного типа в задачах об изгибе анизотропных пластин [6].

**1. Постановка задачи и система уравнений.** Пусть конечная либо бесконечная пластина, изготовленная из прямолинейно-анизотропного материала, занимает на плоскости  $z_0 = x_0 + iy_0$  открытую область  $D_0$ . Линия  $L_0$ , ограничивающая область  $D_0$ , состоит из  $M$  отдельных контуров  $L_0^{(m)}$  ( $m = 1, \dots, M$ ), причем первые  $N \geq 0$  контуров замкнутые (границы отверстий), остальные  $M - N \geq 0$  — криволинейные разомкнутые (разрезы-трещины). В случае конечной пластины линия  $L_0$  содержит также замкнутую внешнюю границу  $L_0^{(0)}$ . Все отдельные контуры являются гладкими и не имеют точек самопересечения. Открытые области, внутренние по отношению к  $L_0^{(m)}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), и открытую область, внешнюю по отношению к  $L_0^{(0)}$ , обозначим  $D_0^{(m)}$  ( $m = m_0, \dots, N$ ; для конечной пластины  $m_0 = 0$ , для бесконечной —  $m_0 = 1$ ). Пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии [8]. Берега трещин, края отверстий и внешняя граница конечной пластины свободны от нагрузок; внутренние точки и части области  $D_0$  находятся под действием равномерно распределенных по толщине (в случае конечной пластины — уравновешенных) усилий. Бесконечная пластина дополнительно подвергается действию распределенных усилий на бесконечности. Рассматривается случай, когда берега трещин не взаимодействуют между собой, при этом формально возможно их свободное наложение (взаимопроникновение). Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины.

Перемещения и напряжения в точке с координатой  $z_0$  выражаются через аналитические функции (комплексные потенциалы Лехницкого)  $\varphi_\nu(z_\nu)$  [8, 9]:

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{\nu=1}^2 (p_\nu, q_\nu) \varphi_\nu(z_\nu) \right) + (u_0 - \omega y, v_0 + \omega x); \quad (1)$$

$$(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{\nu=1}^2 (\mu_\nu^2, -\mu_\nu, 1) \Phi_\nu(z_\nu) \right), \quad \Phi_\nu(z_\nu) = \varphi'_\nu(z_\nu); \quad (2)$$

$$z_\nu = x_0 + \mu_\nu y_0, \quad \nu = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь  $p_\nu, q_\nu$  — константы материала пластины;  $u_0, v_0, \omega$  — произвольные постоянные;  $\mu_1, \mu_2$  — комплексные либо мнимые корни характеристического уравнения с положительными мнимыми частями (рассматривается случай  $\mu_1 \neq \mu_2$ ). При преобразовании (3) линии  $L_0$  и контурам  $L_0^{(m)}$  на плоскости  $z_0$  соответствуют линия  $L_\nu$  и контуры  $L_\nu^{(m)}$  на плоскости  $z_\nu$  ( $\nu = 1, 2, m = m_0, \dots, M$ ).

При  $N + 1 - m_0 > 0$  будем считать, что в областях  $D_0^{(m)}$  ( $m = m_0, \dots, N$ ) находятся пластины (фиктивные) с такими же свойствами, как и в области  $D_0$ . Пусть потенциа-

лы  $\varphi_\nu(z_\nu)$ , описывающие напряженно-деформированное состояние в этих пластинах, соответствуют однородным силовым условиям на их границах и нулевым напряжениям в их внутренних точках. Для построенной таким образом кусочно-аналитической функции  $\varphi_\nu(z_\nu)$  граничные условия в точках  $t_0 \in L_0^{(m)}$  ( $m = m_0, \dots, M$ ) имеют вид [8–10]

$$\sum_{\nu=1}^2 [(1 + i\mu_\nu)\varphi_\nu^\pm(t_\nu) + (1 + i\bar{\mu}_\nu)\overline{\varphi_\nu^\pm(t_\nu)}] = C^{(m)\pm}, \quad t_\nu = \operatorname{Re} t_0 + \mu_\nu \operatorname{Im} t_0, \quad (4)$$

где  $\varphi_\nu^\pm(t_\nu)$  — предельные значения  $\varphi_\nu(z_\nu)$  при подходе к точке  $t_\nu$  слева (знак “+”) и справа (знак “–”) при положительном направлении обхода  $L_\nu^{(m)}$  (для замкнутых контуров область  $D_0$  при обходе должна оставаться слева);  $C^{(m)\pm}$  — некоторые комплексные постоянные [8–10].

Из равенства (4) и сопряженного с ним равенства исключим  $\overline{\varphi_2(t_2)}$  [10]. Затем, дифференцируя по аналогии с [1] уравнение по переменной  $t_2$ , запишем краевые условия на берегах граничных контуров в форме

$$a_0 \frac{dt_1}{dt_2} \Phi_1^\pm(t_1) + b_0 \frac{d\bar{t}_1}{dt_2} \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = 0, \quad (5)$$

$$a_0 = (\mu_1 - \bar{\mu}_2)/(\mu_2 - \bar{\mu}_2), \quad b_0 = (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)/(\mu_2 - \bar{\mu}_2).$$

Искомые функции  $\Phi_\nu(z_\nu)$  во всех областях представляются в виде [1, 2, 4]

$$\Phi_\nu(z_\nu) = \Phi_\nu^0(z_\nu) + \Phi_\nu^1(z_\nu); \quad (6)$$

$$\Phi_\nu^1(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\nu} \frac{\omega_\nu(s_\nu) ds_\nu}{s_\nu - z_\nu}, \quad s_\nu = \operatorname{Re} s_0 + \mu_\nu \operatorname{Im} s_0, \quad s_0 \in L_0, \quad \nu = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь функции  $\Phi_\nu^0(z_\nu)$ , описывающие напряженное состояние бесконечной сплошной пластины (без отверстий и разрезов), вызванное воздействием заданной нагрузки, считаются известными [8, 9] либо могут быть получены путем интегрирования решения задачи о действии сосредоточенных сил; функции  $\Phi_\nu^1(z_\nu)$  определяют возмущение напряженно-деформированного состояния, обусловленное наличием границы  $L_\nu$ ;  $\omega_\nu(t_\nu)$  — неизвестные комплексные функции плотности.

Подставим (6), (7) в краевые условия (5). Складывая и вычитая два предельных равенства и используя свойства предельных значений интегралов типа интегралов Коши, получаем сингулярное интегральное уравнение относительно плотностей  $\omega_1(t_1)$ ,  $\omega_2(t_2)$  и уравнение их взаимосвязи:

$$a_0 \frac{dt_1}{dt_2} \int_{L_1} \frac{\omega_1(s_1) ds_1}{s_1 - t_1} - b_0 \frac{d\bar{t}_1}{dt_2} \int_{L_1} \frac{\overline{\omega_1(s_1)} ds_1}{s_1 - t_1} + \int_{L_2} \frac{\omega_2(s_2) ds_2}{s_2 - t_2} =$$

$$= -2\pi i \left( a_0 \frac{dt_1}{dt_2} \Phi_1^0(t_1) + b_0 \frac{d\bar{t}_1}{dt_2} \overline{\Phi_1^0(t_1)} + \Phi_2^0(t_2) \right); \quad (8)$$

$$\omega_2(t_2) = -a_0 \frac{dt_1}{dt_2} \omega_1(t_1) - b_0 \frac{d\bar{t}_1}{dt_2} \overline{\omega_1(t_1)}, \quad t_\nu \in L_\nu, \quad \nu = 1, 2. \quad (9)$$

С помощью (9) уравнение (8) может быть преобразовано к уравнению с одной неизвестной функцией  $\omega_1(t_1)$  [2] и явно выделенным ядром Коши [1, 4], однако для численной реализации целесообразно использовать (8), (9).

Из условия однозначности смещений при обходе вокруг каждого контура  $L_0^{(m)}$  следуют дополнительные соотношения [1, 2, 4]

$$\int_{L_1^{(m)}} \omega_1(s_1) ds_1 = 0, \quad m = m_0, \dots, M. \tag{10}$$

В общем случае в каждой из областей  $D_0$  или  $D_0^{(m)}$  ( $m = m_0, \dots, N$ ) функции  $\Phi_1(z_1)$ ,  $\Phi_2(z_2)$ , удовлетворяющие условиям первой основной задачи, определены с точностью до произвольных слагаемых, которые можно фиксировать, задавая один (для каждой области) действительный параметр [9]. Представление функций  $\Phi_\nu(z_\nu)$  в форме (6), (7) обеспечивает их определенность в области  $D_0^{(0)}$  (конечная пластина) либо в области  $D_0$  (бесконечная пластина), так как  $\Phi_\nu^0(z_\nu)$  полагаются известными определенными функциями, а  $\Phi_\nu^1(\infty) = 0$  независимо от вида искомой функции плотности. Для однозначного определения  $\Phi_\nu(z_\nu)$  в остальных областях и, следовательно, для однозначного определения искомых функций  $\omega_\nu(t_\nu) = \Phi_\nu^+(t_\nu) - \Phi_\nu^-(t_\nu)$  необходимо поставить некоторые фиксирующие условия, например условия, подобные предложенным в [9]:  $\text{Im } \Phi_1(z_1^{(m)}) = C^{(m)}$  ( $C^{(m)}$  — произвольные действительные постоянные), которые в данном случае можно привести к виду

$$\text{Re} \int_{L_1} \frac{\omega_1(s_1) ds_1}{s_1 - z_1^{(m)}} = 0, \quad z_1^{(m)} = \text{Re } z_0^{(m)} + \mu_1 \text{Im } z_0^{(m)}, \quad m = m_0, \dots, N, \tag{11}$$

где  $z_0^{(m)} \in D_0^{(m)}$  ( $m = 1, \dots, N$ ); для конечной пластины  $z_0^{(0)} \in D_0$ .

**2. Гранично-элементная аппроксимация. Типовые элементы.** При численном решении системы (8)–(11) граничную линию  $L_0$  точно или приближенно представим в виде последовательности  $J = J_M$  граничных элементов  $L_{0j}$  при сохранении гладкости контуров  $L_0^{(m)}$ :

$$L_0 = \bigcup_{m=m_0}^M L_0^{(m)} \approx \bigcup_{m=m_0}^M \left( \bigcup_{j=J_{m-1}+1}^{J_m} L_{0j} \right) = \bigcup_{j=1}^J L_{0j},$$

$$L_{0j} \cap L_{0n} = \emptyset, \quad j, n = 1, \dots, J, \quad j \neq n.$$

Здесь  $J_m$  — максимальный номер элемента на контуре  $L_0^{(m)}$  ( $J_{-1} = 0$  при  $m_0 = 0$  и  $J_0 = 0$  при  $m_0 = 1$ ). Граничный элемент  $L_{0j}$ , его начальная и конечная точки  $A_{0j}, B_{0j}$  на плоскости  $z_0$  преобразуются в  $\Gamma\Theta L_{\nu j}$  и точки  $A_{\nu j}, B_{\nu j}$  на плоскости  $z_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ).

Типовой  $\Gamma\Theta L_{0j}$  — элемент простой формы, для которого при некоторых специально подобранных конформных отображениях плоскостей  $z_1$  и  $z_2$  образы элементов  $L_{1j}$  и  $L_{2j}$  на соответствующих преобразованных плоскостях совпадают. Применение этих отображений к соотношениям (7)–(11), записанным для дискретизированной границы, обеспечивает в каждом  $\Gamma\Theta$  переход от двух переменных ( $t_1, t_2$  или  $s_1, s_2$ ) к одной переменной. На каждом типовом  $\Gamma\Theta$  плотности аппроксимируются функциями новой переменной такого вида, что во всех точках элемента выполняются условия связи (9) и поэлементно в замкнутом виде вычисляются все интегралы при численном решении системы (8), (10), (11), а также при определении напряжений (2) с использованием формулы (7).

Пусть  $\zeta_{\nu j} = \zeta_{\nu j}(z_\nu)$  и  $z_\nu = z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}) = Q_{\nu j} Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})$  — взаимно обратные однозначные конформные отображения всей плоскости  $z_\nu$  на всю вспомогательную плоскость  $\zeta_{\nu j}$  или ее часть и наоборот ( $Q_{\nu j}$  — размерный коэффициент,  $\nu = 1, 2, j$  — номер  $\Gamma\Theta$ ); в общем

случае  $\zeta_{1j}(z_1) \neq \zeta_{2j}(z_2)$ . Тогда точка произвольного  $n$ -го  $\Gamma\Theta$   $t_{\nu n} \in L_{\nu n}$  отображается в точку  $\tau_{\nu j n}$  соответствующего контура  $\Lambda_{\nu j n}$  на плоскости  $\zeta_{\nu j}$ :

$$\zeta_{\nu j}(t_{\nu n}) = \tau_{\nu j n} \in \Lambda_{\nu j n}, \quad z_{\nu j}(\tau_{\nu j n}) = t_{\nu n} \in L_{\nu n}, \quad j, n = 1, \dots, J,$$

причем в общем случае  $\tau_{1j n} \neq \tau_{2j n}$ . Потребуем при  $n = j$  выполнения условия

$$\begin{aligned} \tau_{1j j} = \zeta_{1j}(t_{1j}) = \tau_{2j j} = \zeta_{2j}(t_{2j}) = \tau_j \in \Lambda_j = \Lambda_{1j j} = \Lambda_{2j j}, \\ z_{1j}(\tau_j) = t_{1j}, \quad z_{2j}(\tau_j) = t_{2j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Точки  $s_{\nu j}$ ,  $A_{\nu j}$ ,  $B_{\nu j}$ , принадлежащие линии  $L_{\nu j}$ , отображаются в точки  $\sigma_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  на контуре  $\Lambda_j$ :

$$\zeta_{\nu j}(s_{\nu j}) = \sigma_j, \quad \zeta_{\nu j}(A_{\nu j}) = \alpha_j, \quad \zeta_{\nu j}(B_{\nu j}) = \beta_j, \quad \nu = 1, 2. \quad (13)$$

Искомую функцию  $\omega_{\nu}(t_{\nu})$  аппроксимируем на  $j$ -м  $\Gamma\Theta$  функцией  $\omega_{\nu j}(t_{\nu j})$ , которую представим в виде линейной комбинации некоторых независимых функций  $u_{jp}(\tau_j)/Z'_{\nu j}(\tau_j)$  с неизвестными коэффициентами  $c_{\nu j p}$ :

$$\omega_{\nu j}(t_{\nu j}) = \omega_{\nu j}[z_{\nu j}(\tau_j)] = \frac{1}{Z'_{\nu j}(\tau_j)} \sum_{p=1}^{q_j} c_{\nu j p} u_{jp}(\tau_j), \quad j = 1, \dots, J, \quad \nu = 1, 2. \quad (14)$$

2.1. *Прямолинейный  $\Gamma\Theta$ .* Для прямолинейного элемента с началом в точке  $A_{0j}$  и концом в точке  $B_{0j}$  в качестве отображений  $z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})$  ( $\nu = 1, 2$ ) используем линейные функции

$$\begin{aligned} z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}) = Q_{\nu j} Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}), \quad Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}) = \zeta_{\nu j} + (B_{\nu j} + A_{\nu j}) / (B_{\nu j} - A_{\nu j}), \\ Q_{\nu j} = (B_{\nu j} - A_{\nu j}) / 2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha_j = -1 \leq \operatorname{Re} \tau_j \leq 1 = \beta_j, \quad \operatorname{Im} \tau_j = 0, \quad Z'_{\nu j}(\zeta_{\nu j}) = Z'_{\nu j}(\tau_j) = 1.$$

Преобразования  $\zeta_{\nu j}(z_{\nu})$ , обратные (15), удовлетворяют условиям (12), (13).

С учетом (15), а также результатов работы [11], из которых следуют выражения в общем виде для плотностей  $\omega_{\nu}(t_{\nu})$  вблизи концов разрезов, представление (14) для прямолинейного  $\Gamma\Theta$  в зависимости от его положения на контуре (срединный  $\Gamma\Theta$  ( $\lambda = 0$ ), начальный ( $\lambda = 1$ ) или концевой ( $\lambda = 2$ ) элемент незамкнутого контура) запишем в форме

$$\begin{aligned} \omega_{\nu j}(t_{\nu j}) = \sum_{p=1}^{q_j} c_{\nu j p} u_{jp}(\tau_j) = \sum_{k=1}^{q_j^{1\lambda}} c_{\nu j k}^{1\lambda} u_{jk}^{1\lambda}(\tau_j), \quad q_j = q_j^{1\lambda}, \\ u_{jk}^{10}(\tau_j) = \tau_j^{k-1}, \quad u_{jk}^{11}(\tau_j) = (1 + \tau_j)^{k-3/2}, \quad u_{jk}^{12}(\tau_j) = u_{jk}^{11}(-\tau_j) = (1 - \tau_j)^{k-3/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При указанных функциях  $u_{jk}^{1\lambda}(\tau_j)$ , подставляя  $\omega_{\nu j}(t_{\nu j})$  из (16) в уравнение (9), получаем условия его точного выполнения во всех точках  $L_{0j}$ :

$$c_{2jk}^{1\lambda} = -a_0(Q_{1j}/Q_{2j})c_{1jk}^{1\lambda} - b_0(\bar{Q}_{1j}/Q_{2j})\bar{c}_{1jk}^{1\lambda}, \quad k = 1, \dots, q_j^{1\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2. \quad (17)$$

2.2. *Эллиптический  $\Gamma\Theta$ .* Рассмотрим криволинейный  $\Gamma\Theta$ , расположенный на дуге эллипса с центром в точке  $c_{0j}$  и полуосями  $a_j, b_j$ :

$$\begin{aligned} t_{0j} = t_{0j}(\theta_j) = (a_j \cos \theta_j + ib_j \sin \theta_j) \exp i\psi_j + c_{0j}, \\ t_{0j}(\theta_j^A) = A_{0j}, \quad t_{0j}(\theta_j^A + \Delta\theta_j) = B_{0j}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\psi_j$  — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси  $x_0$  до полуоси  $a_j$ ;  $\theta_j$  — переменный параметр;  $\theta_j^A, \Delta\theta_j \neq 0$  — заданные константы.

В качестве отображений  $z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})$  ( $\nu = 1, 2$ ) используем следующие отображения [9, 12]:

$$z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}) = Q_{\nu j} Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}), \quad Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j}) = \zeta_{\nu j} + \varepsilon_{\nu j} / \zeta_{\nu j} + (\operatorname{Re} c_{0j} + \mu_{\nu} \operatorname{Im} c_{0j}) / Q_{\nu j},$$

$$Q_{\nu j} = [(a_j - i\mu_{\nu} b_j) \cos \psi_j + (\mu_{\nu} a_j + i b_j) \sin \psi_j] \exp [i(\theta_j^A + \Delta\theta_j/2)]/2, \quad (19)$$

$$\varepsilon_{\nu j} = \frac{(a_j + i\mu_{\nu} b_j) \cos \psi_j + (\mu_{\nu} a_j - i b_j) \sin \psi_j}{(a_j - i\mu_{\nu} b_j) \cos \psi_j + (\mu_{\nu} a_j + i b_j) \sin \psi_j} \exp [-i(2\theta_j^A + \Delta\theta_j)],$$

$$\tau_j = \exp [i(\theta_j - \theta_j^A - \Delta\theta_j/2)], \quad \alpha_j = \exp (-i\Delta\theta_j/2), \quad \beta_j = \exp (i\Delta\theta_j/2) = \bar{\alpha}_j = \alpha_j^{-1}.$$

Преобразование (19) конформно отображает единичную окружность и ее внешность  $|\zeta_{\nu j}| \geq 1$  ( $\nu = 1, 2$ ) на контур и внешность эллипса, который на плоскости  $z_{\nu}$  соответствует эллипсу (18) при  $0 \leq \theta_j < 2\pi$ , а кольцо  $|\sqrt{\varepsilon_{\nu j}}| < |\zeta_{\nu j}| < 1$  — на внутренность этого эллипса с прямолинейным разрезом, соединяющим его фокусы. Преобразования  $\zeta_{1j}(z_1)$ ,  $\zeta_{2j}(z_2)$ , обратные (19), удовлетворяют условиям (12), (13).

Выражение (14) для эллиптического ГЭ с учетом (19) представим в форме

$$\omega_{\nu j}(t_{\nu j}) = (1 - \varepsilon_{\nu j} \tau_j^{-2})^{-1} \left\{ c_{\nu j 0}^{2\lambda} u_{j 0}^{2\lambda}(\tau_j) + \sum_{k=1}^{q_j^{2\lambda}} [c_{\nu j k}^{2\lambda} u_{j k}^{2\lambda}(\tau_j) + c_{\nu j, -k}^{2\lambda} u_{j, -k}^{2\lambda}(\tau_j)] \right\}, \quad (20)$$

$$\lambda = 0, 1, 2.$$

При указанном представлении функции  $\omega_{\nu j}(t_{\nu j})$  в виде (20) для точного удовлетворения уравнению (9) во всех точках ГЭ  $L_{0j}$  достаточно, чтобы при всех  $k = 0, \dots, q_j^{2\lambda}$  ( $\lambda = 0, 1, 2$ ) выполнялись условия

$$u_{j, -k}^{2\lambda}(\tau_j) = -(d\bar{\tau}_j/d\tau_j) \overline{u_{j k}^{2\lambda}(\tau_j)} = \tau_j^{-2} \overline{u_{j k}^{2\lambda}(\tau_j)} \quad (\bar{\tau}_j = \tau_j^{-1}); \quad (21)$$

$$c_{2j, \pm k}^{2\lambda} = -a_0(Q_{1j}/Q_{2j}) c_{1j, \pm k}^{2\lambda} + b_0(\bar{Q}_{1j}/Q_{2j}) \bar{c}_{1j, \mp k}^{2\lambda}. \quad (22)$$

С учетом (21) и результатов работы [11] функции  $u_{j, \pm k}^{2\lambda}(\tau_j)$  запишем в виде

$$u_{j, \pm k}^{20}(\tau_j) = \tau_j^{k-1}, \quad k = 0, \dots, q_j^{20},$$

$$u_{j k}^{21}(\tau_j) = (\alpha_j - \tau_j)^{k-3/2}, \quad u_{j, -k}^{21}(\tau_j) = \tau_j^{-2} (\alpha_j^{-1} - \tau_j^{-1})^{k-3/2}, \quad k = 1, \dots, q_j^{21}, \quad u_{j 0}^{21}(\tau_j) = 0,$$

$$u_{j, \pm k}^{22}(\tau_j) = -\overline{u_{j, \pm k}^{21}(\tau_j^{-1})}, \quad k = 1, \dots, q_j^{22}, \quad u_{j 0}^{22}(\tau_j) = 0.$$

Можно показать, что если в бесконечной пластине с единственным свободным эллиптическим отверстием его контур состоит из одного или нескольких таких ГЭ, то решение (20) с функциями  $u_{j, \pm 1}^{20}(\tau_j) = \tau_j^{\pm 1-1}$  при правильно выбранных коэффициентах  $c_{\nu j, \pm 1}^{20}$  соответствует (с учетом (6), (7)) точному решению для потенциалов  $\Phi_{\nu}(z_{\nu})$  при различных способах равномерного нагружения такой пластины на бесконечности; решение (20) с функциями  $u_{j, \pm 2}^{20}(\tau_j) = \tau_j^{\pm 2-1}$  при правильно выбранных коэффициентах  $c_{\nu j, \pm 2}^{20}$  соответствует точному решению для  $\Phi_{\nu}(z_{\nu})$  при различных вариантах нагружения на бесконечности по линейному закону и т. д. [8, 9].

С использованием представлений общего вида (14) для  $\omega_{\nu j}(t_{\nu j})$  уравнения (8), (10), (11) преобразуются в систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_{1jp}$ ,  $c_{2jp}$ :

$$\sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{q_j} \{a_{0n}(\tau_n) I_{1jp}(\tau_{1jn}) c_{1jp} - b_{0n}(\tau_n) \overline{I_{1jp}(\tau_{1jn})} \bar{c}_{1jp} + I_{2jp}(\tau_{2jn}) c_{2jp}\} \approx \\ \approx -2\pi i \{a_{0n}(\tau_n) \Phi_1^0(t_{1n}) + b_{0n}(\tau_n) \overline{\Phi_1^0(t_{1n})} + \Phi_2^0(t_{2n})\}, \quad (23)$$

$$\tau_n = \zeta_{\nu n}(t_{\nu n}), \quad \tau_{\nu jn} = \zeta_{\nu j}(t_{\nu n}), \quad t_{\nu n} = \operatorname{Re} t_{0n} + \mu_{\nu} \operatorname{Im} t_{0n}, \quad \nu = 1, 2, \\ t_{0n} \in L_{0n}, \quad n = 1, \dots, J;$$

$$\sum_{j=J_{m-1}+1}^{J_m} \sum_{p=1}^{q_j} (Q_{1j} U_{jp}) c_{1jp} = 0, \quad m = m_0, \dots, M; \quad (24)$$

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{q_j} I_{1jp}(z_1^{(m)}) c_{1jp} \right) = 0, \quad m = m_0, \dots, N. \quad (25)$$

Здесь

$$a_{0n}(\tau_n) = a_0 \frac{Q_{1n}}{Q_{2n}} \frac{Z'_{1n}(\tau_n)}{Z'_{2n}(\tau_n)}, \quad b_{0n}(\tau_n) = b_0 \frac{\bar{Q}_{1n}}{Q_{2n}} \frac{\overline{Z'_{1n}(\tau_n)}}{Z'_{2n}(\tau_n)} \frac{d\bar{\tau}_n}{d\tau_n}, \quad (26) \\ I_{\nu jp}(\zeta_{\nu j}) = \int_{\Lambda_j} \frac{u_{jp}(\sigma_j) d\sigma_j}{Z_{\nu j}(\sigma_j) - Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})}, \quad \nu = 1, 2, \quad U_{jp} = \int_{\Lambda_j} u_{jp}(\sigma_j) d\sigma_j.$$

При конечных  $q_j$  равенство (23) понимается как приближенное, так как его точное выполнение для всех  $t_{0n} \in L_{0n}$  в общем случае невозможно. Далее коэффициенты  $c_{2jp}$  в форме  $c_{2jk}^{1\lambda}$  (см. (16)) или  $c_{2j,\pm k}^{2\lambda}$  (см. (20)) в соответствии с (17), (22) могут быть исключены.

С учетом (9) достаточно, чтобы условия непрерывности плотностей  $\omega_{\nu j}(B_{\nu j}) = \omega_{\nu n}(A_{\nu n})$  ( $\nu = 1, 2$ ) в каждой точке стыковки  $\Gamma\Theta$  ( $j, n$  — номера предыдущего и следующего  $\Gamma\Theta$  в этой точке) выполнялись при  $\nu = 1$ :

$$\sum_{p=1}^{q_j} \frac{u_{jp}(\beta_j)}{Z'_{1j}(\beta_j)} c_{1jp} - \sum_{p=1}^{q_n} \frac{u_{np}(\alpha_n)}{Z'_{1n}(\alpha_n)} c_{1np} = 0. \quad (27)$$

Невыполнение условий (27) при аппроксимации функций плотности приводит к появлению у функций  $\Phi_{\nu}(z_{\nu})$  и напряжений логарифмических особенностей в точках стыковки  $\Gamma\Theta$  [13]. Для повышения гладкости решения в точках стыковки можно дополнительно задать условие непрерывности производных плотностей соответствующих порядков.

**3. Параметры напряженно-деформированного состояния.** Результатом решения системы (23)–(27) с использованием соотношений (17), (22) являются коэффициенты  $c_{1jp}$ ,  $c_{2jp}$ . Напряжения рассчитываются по формулам (2), где согласно (6), (7), (14), (26) значения функций  $\Phi_{\nu}(z_{\nu})$  равны

$$\Phi_{\nu}(z_{\nu}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^J \sum_{p=1}^{q_j} c_{\nu jp} I_{\nu jp}(\zeta_{\nu j}) + \Phi_{\nu}^0(z_{\nu}), \quad \nu = 1, 2. \quad (28)$$

В окрестностях вершин трещин с использованием (28) вычисляются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) первого и второго рода  $K_1$ ,  $K_2$  [3, 14].

Перемещения вычисляются согласно (1), где

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(z_\nu) &= \int \Phi_\nu(z_\nu) dz_\nu = \int \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\nu} \frac{\omega_\nu(s_\nu) ds_\nu}{s_\nu - z_\nu} + \Phi_\nu^0(z_\nu) \right] dz_\nu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=m_0}^M \left\{ \left[ \ln(s_\nu - z_\nu) \int \omega_\nu(s_\nu) ds_\nu \right]_{L_\nu^{(m)}} - \int_{L_\nu^{(m)}} \left[ \int \omega_\nu(s_\nu) ds_\nu \right] \frac{ds_\nu}{s_\nu - z_\nu} \right\} + \\ &+ \int \Phi_\nu^0(z_\nu) dz_\nu, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь несущественные константы интегрирования опущены; запись  $[\cdot]_{L_\nu^{(m)}}$  означает приращение выражения в скобках при движении точки  $s_\nu$  по контуру  $L_\nu^{(m)}$  от его начальной точки к конечной.

Неопределенный интеграл от  $\omega_\nu(s_\nu)$  будем рассматривать как определенный с переменным верхним пределом по каждому контуру  $L_\nu^{(m)}$ :

$$\begin{aligned} \int \omega_\nu(s_\nu) ds_\nu &= \sum_{n=J_{m-1}+1}^{j-1} \int_{A_{\nu n}}^{B_{\nu n}} \omega_{\nu n}(t_{\nu n}) dt_{\nu n} + \int_{A_{\nu j}}^{s_{\nu j}} \omega_{\nu j}(t_{\nu j}) dt_{\nu j}, \\ j &= J_{m-1} + 1, \dots, J_m, \quad m = m_0, \dots, M. \end{aligned} \tag{29}$$

С учетом (14), (29) в результате преобразований получаем

$$\varphi_\nu(z_\nu) = \sum_{j=1}^J \left[ \sum_{p=1}^{q_j} C_{\nu jp} W_{\nu jp}(\zeta_{\nu j}) + D_{\nu j} \ln \frac{Z_{\nu j}(\beta_j) - Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})}{Z_{\nu j}(\alpha_j) - Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})} \right] + \int \Phi_\nu^0(z_\nu) dz_\nu; \tag{30}$$

$$C_{\nu jp} = \frac{Q_{\nu j} c_{\nu jp}}{2\pi i}, \quad W_{\nu jp}(\zeta_{\nu j}) = \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \left[ \int_{\alpha_j}^{\sigma_j} u_{jp}(\tau_j) d\tau_j \right] \frac{Z'_{\nu j}(\sigma_j) d\sigma_j}{Z_{\nu j}(\sigma_j) - Z_{\nu j}(\zeta_{\nu j})}; \tag{31}$$

$$\begin{aligned} D_{\nu, J_{m-1}+1} &= 0, \quad D_{\nu j} = D_{\nu, j-1} + \sum_{p=1}^{q_j} C_{\nu, j-1, p} U_{j-1, p}, \\ \nu &= 1, 2, \quad j = J_{m-1} + 2, \dots, J_m, \quad m = m_0, \dots, M. \end{aligned}$$

**4. Численные методы.** Для решения системы (23)–(27) (после исключения коэффициентов  $c_{2jp}$ ) используется метод коллокаций (МК) или метод наименьших квадратов (МНК). В результате получается действительная система линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей коэффициентов  $c_{1jp}$ . Интегралы в (23)–(26), (28), (30), (31) вычисляются аналитически: интегралы типа интегралов Коши и особые (в смысле главного значения по Коши) — с использованием предложенных в [5] и аналогичных рекуррентных формул, а стартовые особые интегралы — по формуле Сохоцкого — Племели через предельные значения соответствующих стартовых интегралов типа интегралов Коши. Выражение  $W_{\nu jp}(\zeta_{\nu j})$  в (31) при  $u_{jp}(\tau_j) = u_{j0}^{20}(\tau_j)$  не интегрируемо в замкнутом виде, поэтому при необходимости расчета перемещений функции  $u_{j0}^{20}(\tau_j)$  на начальном этапе исключаются из разложения (20) (параметр  $q_j = 2q_j^{20}$  в (14) становится четным).



**5. Примеры численных расчетов.** Ниже рассмотрены тестовые задачи, показывающие сходимость и точность предлагаемого метода при использовании ГЭ различного типа. В задачах 1–3 материал пластины ортотропный с характеристиками  $E_2/E_1 = 0,7619$ ,  $G_{12}/E_1 = 0,2$ ,  $\nu_{12} = 0,09$  ( $\mu_1 = 0,5383i$ ,  $\mu_2 = 2,1284i$ ) [1], направление  $E_1$  совпадает с осью  $Ox_0$ . Разбиение на элементы проводилось равномерно: в задаче 1 — по длине разреза, в задачах 2, 3 — по параметру в обычном параметрическом уравнении эллипса (дуги эллипса). Точки коллокаций в МК (задачи 1, 3) и МНК (задачи 2, 4) размещались внутри каждого элемента с некоторым сгущением вблизи его концов, что позволяло уменьшить максимальные погрешности вычислений. В МНК количество коллокаций на ГЭ принималось равным удвоенному числу неизвестных комплексных коэффициентов в разложении (14).

Задачи 1, 2. Рассмотрим бесконечную ортотропную пластину, нагруженную двумя сосредоточенными силами  $\pm P(1+i)$ , приложенными в точках  $\pm l(1+i)$  соответственно ( $P$  — сила, отнесенная к единице толщины пластины). Пластина ослаблена прямолинейной трещиной  $-l < x_0 < l$ ,  $y_0 = 0$  (задача 1) или эллиптическим отверстием  $x_0^2/l^2 + y_0^2/(l/2)^2 < 1$  (задача 2). В табл. 1, 2 приведены результаты аналитических расчетов [9] значений КИН, напряжений, перемещений (в (1) принято  $u_0 = v_0 = \omega = 0$ ) и абсолютные погрешности  $\Delta$  этих величин, появляющиеся при расчете по предлагаемой методике в зависимости от количества элементов  $J$  и числа членов ряда  $q_j$  в разложении (14). Также приведены среднеквадратичные значения модуля полного напряжения  $\langle p \rangle$  на свободной границе, которые можно трактовать как интегральные показатели погрешности данной схемы КМГЭ.

Задача 3. Рассматривается бесконечная ортотропная пластина с трещиной длиной  $2l$ , расположенной вдоль дуги эллипса

$$t_0 = t_0(\eta) = R_1 \cos [(\eta + 1)\varphi/2] + iR_2 \sin [(\eta + 1)\varphi/2], \quad -1 \leq \eta \leq 1,$$

при нагружении усилиями на бесконечности  $\sigma_x^\infty = 1$ ,  $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$ . На рис. 1 сплошными линиями показаны значения вычисленных в работе [1] аналогов КИН  $N_1 = K_1/\sqrt{2\pi l}$  и  $N_2 = K_2/\sqrt{2\pi l}$  для этой задачи. Видно, что результаты расчетов, приведенные в [1], и результаты расчетов, выполненные по предлагаемой методике, хорошо согласуются во всем диапазоне значений параметра  $\varphi$ .

Задача 4. Пластина подковообразной формы с трещиной или без трещины нагружена двумя парами сил. На рис. 2 показана пластина с трещиной длиной  $2l = 1,2L$ . В расчетах материал пластины задается как ортотропный с параметрами  $E_1 = E_2 = E_x = E_y$ ,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $G_{12} = 0,9999E_1/[2(1 + \nu_{12})]$ ,  $\mu_1 = 0,9920i$ ,  $\mu_2 = 1,0081i$  (материал, близкий к изотропному). Вычисления проводились для двух вариантов дискретизации границы:  $J = 52$ ,  $J_1 = 49$  ( $J_1$  — количество ГЭ на внешнем контуре; на рис. 2 границы элементов показаны длинными штрихами) и  $J = 100$ ,  $J_1 = 94$  (дополнительные границы элементов показаны короткими штрихами). В табл. 3 приведены значения  $\langle p \rangle$  на свободной границе, а также результаты расчетов в трех характерных областях: КИН в точке  $A$  при наличии трещины [14] либо напряжение в точке  $B$  при отсутствии трещины [15], напряжения в точках  $C$ ,  $D$ ,  $E$  кривого бруса [15] и в точках  $F$ ,  $G$  в случае изгиба консоли, нагруженной на конце [15].

Из приведенных примеров (задачи 1, 2, 4) следует, что с увеличением числа ГЭ  $J$  и (или) параметра  $q_j$  (независимо от наличия или отсутствия нулевого члена в разложении (20) при  $\lambda = 0$ ), а также при увеличении расстояния от расчетной точки до границы погрешность уменьшается.

Результаты анализа отклонений от нуля значений модуля вектора полного напряжения  $p$  на свободной границе области  $D_0$  и напряжений всех типов внутри и на границах областей  $D_0^{(m)}$  ( $m = m_0, \dots, N$ ) позволяют оценить погрешности вычисления напряжений

Таблица 1

Результаты расчета параметров напряженно-деформированного состояния в пластине с прямолинейной трещиной

Параметр	Решение [9]	$\Delta$					
		$J = 3$			$J = 5$		
		$q_j = 2$	$q_j = 3$	$q_j = 4$	$q_j = 2$	$q_j = 3$	$q_j = 4$
$K_1\sqrt{\pi l}/P$	0,8059	-0,0197	0,0201	0,0037	0,0137	0,0064	0,0004
$K_2\sqrt{\pi l}/P$	0,6487	0,0859	0,0040	-0,0013	0,0362	-0,0001	-0,0004
$\sigma_x(l/2, 0)^* \cdot 2l/P$	-1,1564	0,0240	-0,0253	-0,0056	-0,0274	-0,0062	-0,0008
$\sigma_x(0, l/2) \cdot 2l/P$	0,3486	-0,0015	0,0008	0,0001	0,0003	0,0001	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_y(0, l/2) \cdot 2l/P$	-0,0795	-0,0079	-0,0012	-0,0001	-0,0029	-0,0003	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\tau_{xy}(0, l/2) \cdot 2l/P$	0,4538	-0,0006	0,0007	$< 5 \cdot 10^{-5}$	0,0008	$< 5 \cdot 10^{-5}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\langle p \rangle \cdot 2l/P$	0	0,0673	0,0168	0,0054	0,0327	0,0070	0,0009
$u(l/2, 0)^* E_1/P$	0,5169	-0,0117	-0,0031	0,0002	-0,0067	-0,0002	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$v(l/2, 0)^* E_1/P$	1,0132	0,0137	-0,0024	0,0006	-0,0014	$< 5 \cdot 10^{-5}$	0,0001
$u(0, l/2) E_1/P$	0,5387	-0,0002	-0,0009	0,0001	-0,0009	$< 5 \cdot 10^{-5}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$v(0, l/2) E_1/P$	0,5602	0,0114	-0,0011	-0,0001	0,0020	-0,0001	$< 5 \cdot 10^{-5}$

\* Значения на верхнем берегу трещины.

Таблица 2

Результаты расчета параметров напряженно-деформированного состояния в пластине с эллиптическим отверстием

Параметр	Решение [9]	$\Delta$					
		$J = 4$			$J = 8$		
		$q_j = 2$	$q_j = 4$	$q_j = 6$	$q_j = 2$	$q_j = 4$	$q_j = 6$
$\sigma_y(l, 0) \cdot 2l/P$	3,0725	-0,4464	0,1445	0,0243	-0,0308	0,0130	-0,0003
$\sigma_x(0, l/2) \cdot 2l/P$	0,7868	-0,4903	-0,0157	0,0068	-0,1457	-0,0012	0,0001
$\sigma_x(0, l) \cdot 2l/P$	0,7552	0,0121	-0,0025	-0,0001	-0,0035	$< 5 \cdot 10^{-5}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_y(0, l) \cdot 2l/P$	-0,1158	-0,1547	-0,0003	0,0005	-0,0011	-0,0002	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\tau_{xy}(0, l) \cdot 2l/P$	0,3293	-0,0098	0,0035	$< 5 \cdot 10^{-5}$	0,0060	0,0004	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\langle p \rangle \cdot 2l/P$	0	0,2430	0,0289	0,0062	0,0854	0,0056	0,0005
$u(l, 0) E_1/P$	-0,0593	0,0447	-0,0089	-0,0004	-0,0065	-0,0001	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$v(l, 0) E_1/P$	1,1017	0,1227	0,0024	-0,0009	0,0095	0,0001	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$u(0, l/2) E_1/P$	1,1017	0,0391	0,0033	-0,0002	0,0040	0,0003	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$v(0, l/2) E_1/P$	0,5251	0,1796	0,0021	-0,0008	-0,0031	0,0002	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$u(0, l) E_1/P$	0,8620	0,0223	0,0007	-0,0001	-0,0024	$< 5 \cdot 10^{-5}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$v(0, l) E_1/P$	0,4942	0,1136	0,0030	-0,0004	-0,0011	0,0003	$< 5 \cdot 10^{-5}$

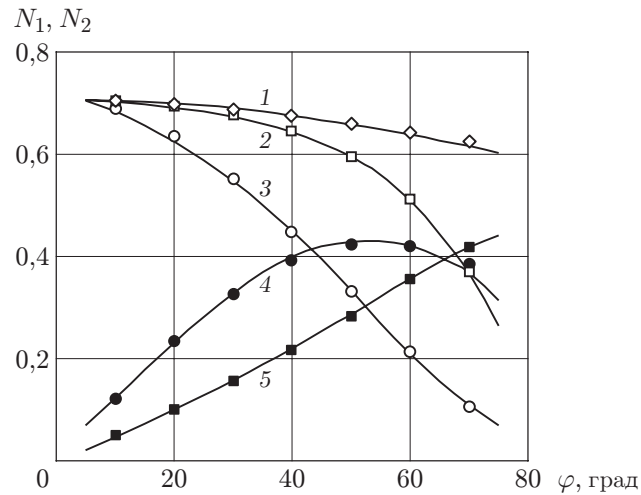


Рис. 1. Зависимости аналогов КИН  $N_1, N_2$  от параметра  $\varphi$ :  
 линии — результаты расчетов [1], точки — результаты расчетов по предлагаемой методике при  $q_j = 4, J = 6$ ; 1 — значения  $N_1$  в начальной точке трещины ( $\eta = -1$ ) ( $R_1/R_2 = 1$ ), 2, 3 — значения  $N_1$  в конечной точке трещины ( $\eta = 1$ ) (2 —  $R_1/R_2 = 0,4$ , 3 —  $R_1/R_2 = 1$ ), 4, 5 — значения  $N_2$  в конечной точке трещины ( $\eta = 1$ ) (4 —  $R_1/R_2 = 1$ , 5 —  $R_1/R_2 = 0,4$ )

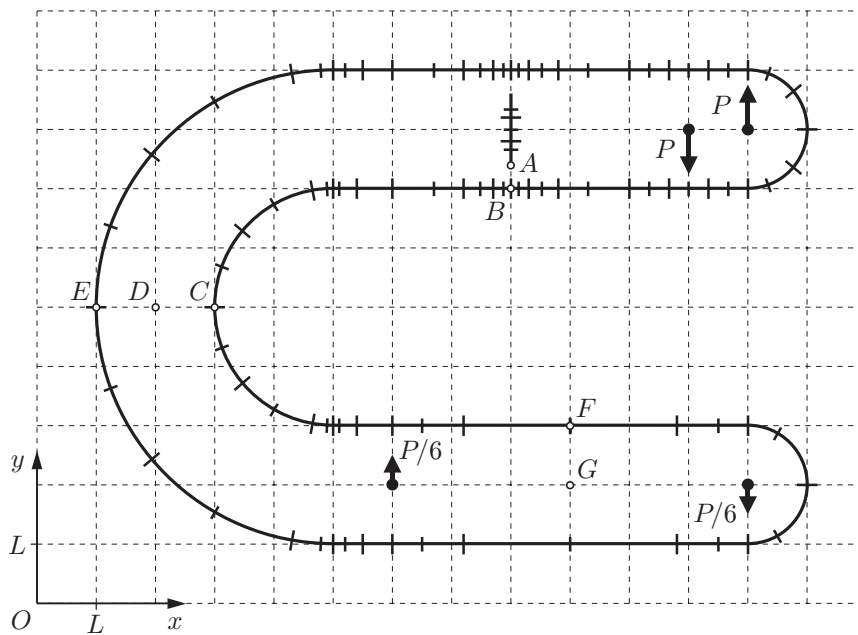


Рис. 2. Схема подковообразной пластины с трещиной длиной  $2l$

Таблица 3

Результаты расчета параметров напряженно-деформированного состояния в подковообразной пластине

Параметр	Решения [14, 15]	$\Delta$				
		$J = 52, J_1 = 49$			$J = 100, J_1 = 94$	
		$q_j = 3$	$q_j = 4$	$q_j = 5$	$q_j = 3$	$q_j = 4$
$K_1(A) \cdot 2L/(3P\sqrt{\pi l})$	0,3196	-0,0046	-0,0005	$< 5 \cdot 10^{-5}$	0,0005	0,0001
$\sigma_x(B) \cdot 2L/(3P)$	1,0000	-0,0154	-0,0017	-0,0004	0,0011	-0,0002
$\sigma_y(C) \cdot 2L/(3P)$	1,2925	-0,1095	-0,0088	-0,0014	0,0009	-0,0003
$\sigma_x(D) \cdot 2L/(3P)$	0,1645	-0,0142	-0,0009	-0,0002	$< 5 \cdot 10^{-5}$	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_y(E) \cdot 2L/(3P)$	-0,8195	0,0587	0,0035	0,0009	-0,0008	0,0001
$\sigma_x(F) \cdot 2L/(3P)$	0,5000	-0,0120	-0,0011	-0,0002	0,0007	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\tau_{xy}(G) \cdot 2L/(3P)$	-0,0833	0,0029	0,0002	$< 5 \cdot 10^{-5}$	-0,0001	$< 5 \cdot 10^{-5}$
$\langle p \rangle \cdot 2L/(3P)$	0	0,0017	0,0003	0,0003	0,0003	0,0001

\* Расчет при отсутствии трещины.

во всей области  $D_0$ , а также провести многоэтапные адаптивные расчеты при меньшем (большем) размере  $\Gamma\Theta$  на тех участках границы, на которых на предыдущем этапе были получены большие (малые) значения  $p$  [5].

При прочих равных условиях погрешности расчетов для  $\Gamma\Theta$ , примыкающих к точке конечного разрыва кривизны границы, существенно больше, чем для других элементов. Численные исследования, проведенные на примере простых задач, показывают, что с уменьшением в геометрической прогрессии размеров элементов плотности и напряжения в точке разрыва кривизны стремятся к конечным значениям, а модули их производных по длине контура увеличиваются в арифметической прогрессии. Это косвенно свидетельствует о том, что в окрестности точки разрыва кривизны для плотностей и напряжений существуют конечные асимптотические решения с бесконечным разрывом их первых производных в этой точке. Чтобы получить аналитические выражения для этой области, необходимо провести дополнительные исследования. Одним из способов снижения погрешности при использовании функций  $u_{jp}(\tau_j)$  предложенного вида является уменьшение размеров ближайших к точке разрыва кривизны элементов.

В случае если упругие характеристики материала, форма границы, положение граничных элементов и коллокаций на них симметричны, иногда происходит срыв численного решения, вызванный, по-видимому, появлением собственных функций вследствие симметричной дискретизации континуального уравнения (8). Этот негативный эффект (“парадокс симметрии” [5]) можно устранить, нарушая симметрию при размещении точек коллокаций либо при разбиении контура на элементы.

**Заключение.** Использование предложенных для решения ГИУ плоской задачи теории упругости обычных и концевых граничных элементов с аппроксимирующими функциями, точно удовлетворяющими условию взаимосвязи двух искомых плотностей, позволяет поэлементно в замкнутом виде вычислить требуемые интегралы типа интегралов Коши, особые и обычные интегралы. Аналитическое интегрирование, более точное и простое, чем численное, позволяет получить более точные решения ГИУ и значения напряжений и перемещений, в частности вблизи границ тела, т. е. вблизи концентраторов напряжений. Представленный метод эффективен при решении плоской задачи для конечных или бесконечных упругих тел из анизотропных ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) и близких к изотропным ( $\mu_1 \approx \mu_2 \approx i$ ) материалов со свободными гладкими отверстиями и разрезами произвольной формы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Фильштинский Л. А.** Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 5. С. 91–97.
2. **Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.** The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // Intern. J. Solids Structures. 1977. V. 13, N 4. P. 269–278.
3. **Саврук М. П.** Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. Киев: Наук. думка, 1989.
4. **Максименко В. Н.** Применение метода функций влияния в задачах теории трещин для анизотропных пластин // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 3. С. 128–137.
5. **Линьков А. М.** Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука. С.-Петербург. отд-ние, 1999.
6. **Максименко В. Н., Подружин Е. Г.** Изгиб конечных анизотропных пластин, содержащих гладкие отверстия и сквозные криволинейные разрезы // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 125–135.
7. **Громадка П. Т.** Комплексный метод граничных элементов / П. Т. Громадка, Ч. Лей. М.: Мир, 1990.
8. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
9. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
10. **Шерман Д. И.** К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды // Прикл. математика и механика. 1942. Т. 6, № 6. С. 509–514.
11. **Дементьев А. Д.** Расчет коэффициентов интенсивности напряжений в вершине сквозной трещины по данным тензометрии // Учен. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1987. Т. 18, № 5. С. 83–88.
12. **Калоеров С. А., Горянская Е. С.** Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. Киев: А.С.К., 1998. С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т.; Т. 7).
13. **Мухелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
14. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т.; Т. 2).
15. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975.

*Поступила в редакцию 22/V 2014 г.*

---