УДК 532

ДВУХФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ТИПА НЕСЖИМАЕМАЯ КОНДЕНСИРОВАННАЯ СРЕДА — ГАЗ

В. И. Налимов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Для описания течений порошкообразных смесей предложена модель слабосжимаемых сред, основанная на предположении малости объемной концентрации газа. Приближение сильных ударных волн используется для описания динамики сильных разрывов. Различные приближенные постановки выводятся из вариационного принципа после сужения класса функций, в котором ищется экстремаль функционала действия.

Из уравнения движения смесей, состоящих из несжимаемой конденсированной среды и газа, в односкоростном с общим давлением фаз приближении (см. [1] и библиографию к ней) в предположении малости объемной концентрации газа в смеси выводятся приближенные уравнения динамики смеси. Для описания распространения ударных волн в смеси идеальной жидкости и газа используется приближение сильных ударных волн, совпадающее с выведенной в [2] моделью для слабосжимаемых сред. Для течений без фазовых превращений в этом приближении скорость распространения ударной волны пропорциональна скорости среды за фронтом. Сравнение с экспериментальными данными для металлических порошков [3] показывает, что модель сильных ударных волн дает удовлетворительное приближение для скоростей ударных волн, сравниваемых со скоростью звука в металле.

Для одномерных движений смеси с сильными разрывами доказан вариационный принцип, позволяющий на основе метода Галёркина формулировать различные модели, в которых решение ищется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Обозначения. Будем предполагать, что частицы газа и конденсированной среды, образующие смесь, являются точками. Конденсированную среду будем называть первой фазой, а газ — второй.

Объем dV, занятый смесью, представим в виде суммы двух объемов $dV = dV_1 + dV_2$, где dV_i — меры Лебега (объемы), занятые несущей средой и газом. В каждой точке смеси будем предполагать существование пределов

$$\lim_{dV\to 0} \frac{dV_i}{dV} = \alpha_i, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Величины α_1 и α_2 называются *объемными концентрациями* соответствующих фаз.

Предположим также, что в каждой точке области течения определены функции ρ_i, p_i, T_i, C_{iv}, $\ae_i$ — плотность, давление, температура, удельная теплоемкость при постоянном объеме и коэффициент теплопроводности конденсированной среды ($i = 1$) и газа ($i = 2$),

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 98-01-00660, 98-03-32328).

$\sigma'_{ij} = -p_i\delta_{ij} + \tau'_{ij}$ — тензор напряжений конденсированной среды (δ_{ij} — символ Кронекера). Масса i-го компонента смеси, содержащегося в объеме dV, полагается равной $\rho_i dV_i$. Плотность смеси определяется равенством $\rho dV = \rho_1 dV_1 + \rho_2 dV_2$, $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$. Величины

$$\beta_i = \frac{\rho_i dV_i}{\rho dV} = \frac{\alpha_i \rho_i}{\rho}, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 1 \tag{1.1}$$

называются *массовыми концентрациями* компонентов смеси.

Замечание 1. Так как в движущихся объемах масса каждой фазы сохраняется, то массовые концентрации в частицах постоянны.

Далее предполагается, что уравнения состояния газа имеют вид

$$p_2 = f(\rho_2, T_2). \tag{1.2}$$

В частности, для идеального газа $p_2 = \rho_2 R T_2$. Конденсированная среда предполагается несжимаемой: $\rho_1 = \mathrm{const}$. Отметим, что для удельных объемов $dv_i = 1/\rho_i$, $v = 1/\rho$ справедливы равенства

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, \quad \alpha_1 v = \beta_1 v_1, \quad \alpha_2 v = \beta_2 v_2 = v - \beta_1 v_1. \tag{1.3}$$

Тензор напряжений и коэффициент теплопроводности. Для определения тензора напряжения смеси $\sigma_{ij} = -p_i\delta_{ij} + \tau_{ij}$ рассмотрим элементарную площадку $dS = dS_1 + dS_2$ (dS_i — плоская мера i-й фазы) с нормалью $\boldsymbol{n}$ и положим

$$\Big(-pn_i + \sum_{j=1}^{3} \tau_{ij} n_j\Big) dS = -(p_1\, dS_1 + p_2\, dS_2) + \sum_{j=1}^{3} \tau'_{ij} n_j\, dS_1,$$

где $i = 1, 2, 3$. Достраивая площадку произвольным образом до цилиндра высотой dl и учитывая, что $dS_i/dS = dV_i/dV = \alpha_i$, из предыдущего равенства получим $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$, $\tau_{ij} = \alpha_1 \tau'_{ij}$. Иными словами, среднеобъемные и среднеповерхностные величины совпадают [1].

В дальнейшем будем полагать, что в элементарном объеме давления в каждой фазе совпадают: $p_1 = p_2 = p$. Тензор напряжения смеси имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\sigma_{ij} + \alpha_1 \tau'_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta_1 \rho \tau'_{ij}/\rho_1. \tag{1.4}$$

Аналогично определяется коэффициент теплопроводности смеси

$$æ = \alpha_1 æ_1 + \alpha_2 æ_2 = (\beta_1\rho/\rho_1) æ_1 + \beta_2(1 - \beta_1\rho/\rho_1) æ_2. \tag{1.5}$$

Внутренняя энергия и энтропия. Внутренняя энергия смеси определяется равенством $\varepsilon = \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2$, где $\varepsilon_i = C_{vi} T_i$. Согласно первому началу термодинамики $dQ_1 + dQ_2 = d(\beta_1\varepsilon_1) + d(\beta_2\varepsilon_2) + p\, dv$, где dQ_i — приращение количества тепла каждого компонента единицы массы смеси. С учетом замечания 1 и равенства (1.3) последнее соотношение можно записать в виде

$$dQ_1 + dQ_2 = \beta_1\, d\varepsilon_1 + \beta_2\, d\varepsilon_2 + \beta_2 p\, dv_2. \tag{1.6}$$

Течение смеси существенно зависит от процессов теплопередачи. Ниже рассматриваются две модели описания двухфазных сред.

А. Нетеплопроводные конденсированная среда и газ. Так как теплообмен между фазами отсутствует, то в соответствии с (1.6) должны выполняться равенства $dQ_1 = \beta_1\, d\varepsilon_1$, $dQ_2 = \beta_2(d\varepsilon_2 + p\, dv_2) = \beta_2 T_2\, ds_2$, где s_2 — энтропия второй фазы.

Замечание 2. Если внешние источники тепла отсутствуют, то изменение внутренней энергии первой фазы равно работе внутренних сил трения.

Определим энтропию смеси равенством $s = \beta_2 s_2$. Для политропного газа

$$p/p_0 = A(s, \beta_2)(\rho_2/\rho_{20})^\gamma. \tag{1.7}$$

Замечание 3. Если внешние источники тепла отсутствуют, то при непрерывных течениях энтропия в частицах сохраняется и $A(s, \beta_2) = 1$.

Б. Теплопроводные конденсированная среда и газ. В этом случае будем полагать, что в любом элементарном объеме температуры обеих фаз совпадают. Равенством $C_v \rho \, dV = C_{v1} \rho_1 \, dV_1 + C_{v2} \rho_2 \, dV_2$ определим удельную теплоемкость смеси

$$C_v = \beta_1 C_{v1} + \beta_2 C_{v2}. \tag{1.8}$$

По определению $d\varepsilon_i = C_{vi} \, dT$ и $dQ = dQ_1 + dQ_2 = C_v \, dT + \beta_2 p \, dv_2 = \beta_1 C_{v1} \, dT + \beta_2 T \, ds_2$. Следовательно, энтропия смеси имеет вид $s = \beta_1 C_{v1} \ln T + \beta_2 s$.

Как и в случае нетеплопроводных фаз, для политропного газа

$$p/p_0 = B(s, \beta_2)(\rho_2/\rho_{20})^{\gamma_*}, \tag{1.9}$$

где

$$\gamma_* = 1 + \beta_2 R / C_v. \tag{1.10}$$

Замечание 4. В отличие от нетеплопроводных сред энтропия смеси возрастает ($ds > 0$) при наличии внутренних сил трения: $B(s, \beta_2) = 1$, если энтропия в частицах постоянна.

Законы сохранения удельной концентрации, массы и импульса. Приведенные выше рассуждения показывают, что под смесью несжимаемой конденсированной среды и газа можно понимать конденсированную среду с полем скоростей $\boldsymbol{u}$, плотностью ρ и тензором напряжений σ_{ij}, определенным равенствами (1.4). Согласно замечанию 1

$$\frac{d\beta_2}{dt} = 0, \tag{1.11}$$

где оператор $d/dt = \partial/\partial t + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)$ — полная производная по времени.

Для течений без сильных разрывов законы сохранения массы и импульса имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0; \tag{1.12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho \rho_1} \mathbf{div} \, (\beta_1 \rho \tau) + \boldsymbol{f}, \tag{1.13}$$

где $\boldsymbol{f}$ — массовые силы; τ — девиатор тензора напряжений и по определению

$$(\mathbf{div} \, (\beta_1 \rho \tau))_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \, (\beta_i \rho \tau_{ij}).$$

Законы сохранения энергии. Как известно, полное изменение кинетической энергии среды происходит за счет работы массовых сил и работы поверхностных сил над элементом. Изменение внутренней энергии ε связано с работой сил трения по изменению объема среды и процессами теплопереноса:

$$\rho \, \frac{d\varepsilon}{dt} + p \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \alpha_2 G = \nabla \cdot \boldsymbol{\theta}, \tag{1.14}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — плотность потока тепла, переносимого в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности; $G = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \tau_{ij} \, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$; τ^* — диссипативная (вязкая) составляющая тензора касательных напряжений.

Изменение внутренней энергии происходит по-разному в зависимости от процессов теплопроводности. Рассмотрим два случая.

А. Нетеплопроводные конденсированная среда и газ. В соответствии с замечанием 2 работа внутренних сил трения равна изменению внутренней энергии первой фазы. Поэтому уравнение (1.14) распадается на два:

$$\rho \frac{d}{dt}(\beta_1 \varepsilon_1) - \alpha_1 G = 0, \qquad \rho \frac{d}{dt}(\beta_2 \varepsilon_2) + p \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Учитывая закон сохранения массовой концентрации (1.11) и определения удельных внутренних энергий $\varepsilon_i = C_{vi} T_i$ и (1.1), получим

$$C_{v1} \frac{dT_1}{dt} - \frac{\rho}{\rho_1} G = 0; \tag{1.15}$$

$$\beta_2 C_{v2} \rho \frac{dT_2}{dt} + p \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{1.16}$$

Б. Теплопроводные конденсированная среда и газ [1]. В этом случае равенствами (1.5) и (1.8) определены коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость при постоянном объеме смеси. Полагая $\varepsilon = C_v T$, из (1.14) получим уравнение для температуры

$$C_v \rho \frac{dT}{dt} + p \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \alpha_2 G = \nabla \cdot (æ \nabla T). \tag{1.17}$$

Уравнение состояния смеси (2.2) с учетом (1.3) можно записать в виде

$$p = g(\beta_2, \rho, T), \tag{1.18}$$

где $T = T_2$ для нетеплопроводных фаз.

Замечание 5. Если энтропия в частицах сохраняется, то для политропной смеси из (1.3), (1.7) и (1.9) следует закон сохранения энтропии

$$\frac{d}{dt}[(v - \beta_1 v_1)^k p] = 0, \tag{1.19}$$

где $k = \gamma$ в случае А и $k = \gamma_*$ в случае Б. Показатель адиабаты определен формулой (1.10).

Отметим, что в случае теплопроводных фаз течение изэнтропично, если тензор напряжений шаровой и коэффициент теплопроводности пренебрежимо мал.

Замечание 6. Уравнения (1.11)–(1.13), (1.15), (1.16) и уравнение состояния (1.18) являются полной системой для определения массовой концентрации, поля скоростей, плотности, давления и температуры каждого компонента смеси для нетеплопроводных фаз.

Уравнения (1.11)–(1.13), (1.17) и уравнение состояния (1.18) являются полной системой для нахождения параметров течения в случае одинаковой температуры фаз.

Замечание 7. Для изэнтропических течений массовая концентрация, плотность, давление и поле скоростей находятся из уравнений (1.11)–(1.13), уравнения состояния (1.18) и закона сохранения энтропии (1.19).

Замечание 8. Для изэнтропических течений скорость звука в смеси вычисляется по формуле (см. также [1])

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{kp}{\rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{k\rho_2}{\gamma \alpha_2 \rho}\right)^{1/2} c_0,$$

где c_0 — местная скорость звука в газе.

Для нетеплопроводных фаз ($k = \gamma$) при фиксированных ρ_2 скорость звука в смеси $c(\alpha_2)$ равна скорости звука в газе c_0, если $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_2 = \alpha_2^*$; $c(\alpha_2) < c_0$, если $\alpha_2^* < \alpha_2 < 1$;

$c(\alpha_2) > c_0$, если $\alpha_2 < \alpha_2^*$. Здесь $\alpha_2^* = (\rho_1 - |\rho_1 - 2\rho_2|)/(2(\rho_1 - \rho_2))$. Минимальное значение скорости звука в смеси

$$c_* = 2\Big[\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)\Big]^{1/2} c_0$$

достигается при $\alpha_2 = \rho_1/(2(\rho_1 - \rho_2))$ $(\rho_2 < \rho_1)$. Если $\rho_2/\rho_1 \ll 1$, то $c_* \simeq 2\sqrt{\rho_2/\rho_1}c_0 \ll c_0$.

Начальные и граничные условия. Для выделения единственного решения уравнений, описывающих динамику смесей, необходимо задать начальные и граничные условия. При $t = 0$ поле скоростей $\boldsymbol{u}_0$, массовую концентрацию β_2 (или β_1) и плотность газа ρ_{20} будем считать известными. Объемная концентрация и плотность смеси находятся из формул $\alpha_2 = \beta_2\rho_1/(\beta_2\rho_1 + \beta_1\rho_2)$, $\rho = \rho_1\rho_2/(\beta_2\rho_1 + \beta_1\rho_2)$. Кроме того, должны быть заданы температуры T_{10} и T_{20} каждой фазы. Давление определяется из уравнения состояния (1.18).

На твердых стенках должно выполняться условие непротекания: нормальная скорость частиц, прилегающих к стенке, должна совпадать с нормальной скоростью стенки. Этого условия достаточно, если первая фаза представляет собой идеальную несжимаемую жидкость. Для других конденсированных сред появляются дополнительные краевые условия. Если конденсированная среда является несжимаемой вязкой жидкостью, то на твердых стенках должно выполняться условие прилипания: скорость частицы жидкости на стенке совпадает со скоростью стенки. Для пластичной среды на стенке должен быть выполнен закон трения (например, Амантона — Кулона: на твердой стенке плотность силы трения пропорциональна нормальному напряжению и направлена в сторону, противоположную движению частиц среды).

На свободных границах должны выполняться кинематическое условие (условие непротекания) и динамические условия: нормальное напряжение совпадает с внешним давлением, касательное напряжение отсутствует. Кроме того, для теплопроводной смеси на твердых стенках и свободных границах должны быть заданы условия для температуры.

Ударные волны. Если первая фаза является несжимаемой идеальной жидкостью (тензор напряжений шаровой), то возможны течения с сильными разрывами. При переходе через сильный разрыв должны выполняться условия постоянства массовых концентраций, потока массы и импульса:

$$[\beta_2]_D = 0, \qquad [\rho(D - u)]_D = 0, \qquad [\rho(D - u)^2 + p]_D = 0. \tag{1.20}$$

Здесь квадратные скобки обозначают оператор, определяющий скачок на ударной волне стоящей внутри скобок функции; D — скорость ударной волны; u — нормальная к фронту ударной волны скорость смеси.

Для идеального газа выражение для удельной энергии можно записать в виде

$$u^2/2 + pv + C_vT = u^2/2 + pv + (C_v/R)pv_2.$$

Здесь и ниже полагаем $C_v = \beta_2C_{v2}$, $T = T_2$ в случае А и $C_v = \beta_1C_{v1} + \beta_2C_{v2}$ в случае Б, удельный объем v определен равенством (1.3).

Закон сохранения энергии при переходе через ударную волну запишем в виде

$$\Big[\frac{1}{2}(D - u)^2 + pv + \frac{C_v}{\beta_2R}\,(v - \beta_1v_1)p\Big]_D = -ve. \tag{1.21}$$

Здесь $1/v$ — плотность смеси за фронтом ударной волны; e — потеря энергии единицей объема смеси при переходе через ударную волну, обусловленная какими-либо причинами (например, химическими процессами).

Из условий на скачке (1.20), (1.21) выводится уравнение ударной адиабаты. Для нетеплопроводных сред и идеального газа оно имеет вид

$$-\frac{1}{2}\,(v_0 - v)p + \frac{v - \beta_1v_1}{\gamma - 1}\,p = \frac{1}{2}\,(v_0 - v)p_0 + \frac{v_0 - \beta_1v_1}{\gamma - 1}\,p_0 - ev. \tag{1.22}$$

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПОСТАНОВКИ

Приближение в предположении малости объемной концентрации газа в смеси. Будем полагать, что в начальный момент времени массовая концентрация газа в смеси $\beta_2 = \delta^2$ постоянная и $\delta \ll 1$. Так как массовые концентрации в частице сохраняются, то величина δ будет постоянной и в последующие моменты времени.

Предполагая компоненты смеси нетеплопроводными, положим $v = v_1(1 - \delta^2 + \delta^2\theta)$, $\boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{u}'$, $t = \delta t'$, $\tau_{ij} = \delta^2\tau'_{ij}$, $G = \delta^{2\sigma+1}G'$, $T_1 = \delta^{2\sigma}T'_1$, $T_2 = T'_2$, $e_0 = \delta^2 e'_2$, $e_1 = \delta^2 e'_1$. Здесь $\sigma = 0$ или $\sigma = 1$ в зависимости от свойств первой фазы.

Предполагая газ идеальным, из уравнения состояния $pv_2 = RT_2$, (1.3) и законов сохранения (1.12), (1.13), (1.15), (1.16) с точностью до слагаемых второго порядка малости по δ получим (штрихи опущены)

$$\theta p = \rho_1 R T_2, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1}\nabla p = \frac{\delta^{2\sigma}}{\rho_1}\,\mathbf{div}\,\tau + \boldsymbol{f}; \tag{2.2}$$

$$C_{v2}\rho_1\frac{\partial T_2}{\partial t} + p\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0; \tag{2.3}$$

$$C_{v1}\frac{\partial T_1}{\partial t} - G = 0. \tag{2.4}$$

Уравнения (2.1)–(2.3) вместе с начальными данными и краевыми условиями служат для нахождения поля скоростей, поля давления, температуры и удельного объема θ. Равенство (2.4) определяет температуру первой фазы.

Замечание 9. В случае вязкой жидкости девиатор тензора напряжений линейно зависит от производных скоростей по пространственным переменным, поэтому $\sigma = 1$. Слагаемое в правой части (2.2), пропорциональное $\delta^{2\sigma}$, удержано для того, чтобы учесть сглаживающие свойства вязкости и избежать сложностей при постановке краевых условий.

Если касательные напряжения отсутствуют (тензор шаровой), то согласно замечанию 3 течение изэнтропично и система (2.1)–(2.4) значительно упрощается. В качестве уравнений, описывающих течение, достаточно взять закон сохранения массы (второе уравнение из (2.1)), закон сохранения энтропии (1.19) и закон сохранения импульса (без учета массовых сил). В рамках данного приближения получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(p\theta^\gamma) = 0; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1}\nabla p = 0. \tag{2.6}$$

Согласно (2.4) температура жидкости постоянна. Температура газа в смеси определяется из уравнения состояния $\theta p = \rho_1 R T_2$. Соотношение (2.3) является следствием уравнения состояния и формул (2.5), (2.6).

В течениях без касательных напряжений (первая фаза — идеальная несжимаемая жидкость) возможны ударные волны. На скачке условия постоянства потоков массы и импульса (1.20) будут выполнены с точностью до младших по δ членов, если

$$(\theta_0 - \theta)V = u - u_0, \qquad p - p_0 = \rho_1(u - u_0)V, \tag{2.7}$$

где $V = \delta^{-1}D$.

Из уравнения ударной адиабаты (1.22) в рамках данного приближения получим

$$((\gamma+1)\theta - (\gamma-1)\theta_0)p = ((\gamma+1)\theta_0 - (\gamma-1)\theta)p_0 - (\gamma-1)e/2. \tag{2.8}$$

Исключив из уравнения ударной адиабаты с помощью соотношений (2.7) функции p и θ, получим зависимость между скоростью ударной волны V и скоростью газа u

$$2\theta_0\rho_1 uV^2 - \Big((\gamma+1)\rho_1 u^2 - \frac{\gamma-1}{2}\,e\Big)V - 2\gamma p_0 u = 0. \qquad (2.9)$$

Возвращаясь к исходым (без штрихов) переменным и учитывая, что $\alpha_2 = \delta^2\theta$, получим

$$2\alpha_{20}uD^2 - \Big((\gamma+1)u^2 - \frac{\gamma-1}{2\rho_1}\,e\Big)D - 2\,\frac{\rho_{20}}{\rho_1}\,c_0^2 = 0, \qquad (2.10)$$

где $c_0^2 = \gamma p_0/\rho_{20}$ — квадрат скорости звука в газе. При $e = 0$ (теплообмен между фазами отсутствует) имеем

$$D = \frac{\gamma+1}{4\alpha_{20}}\Big(u + \Big(u^2 + \frac{16}{(\gamma+1)^2}\,\frac{\rho_{20}}{\rho_1}\,\alpha_{20}c_0^2\Big)^{1/2}\Big).$$

При $\rho_{20}/\rho_1 \ll 1$ последняя формула приобретает вид

$$D = (\gamma+1)u/(2\alpha_{20}). \qquad (2.11)$$

Если дополнительно $u^2 \gg (\gamma-1)e/(2(\gamma+1)\rho_1)$, то из (2.10) имеем приближенно

$$D = \frac{2}{4\alpha_{20}}\Big((\gamma+1)u - \frac{\gamma-1}{2\rho_1}\,\frac{e}{u}\Big). \qquad (2.12)$$

Замечание 10. В рамках данного приближения контактные разрывы в смеси неподвижны.

Приближение сильных ударных волн. При $p \to \infty$ в соответствии с уравнением ударной адиабаты (2.8) $\theta \to \theta_0(\gamma-1)/(\gamma+1)$ или $\rho_2 \to \rho_{20}(\gamma+1)/(\gamma-1)$, так как $\rho_2 = \delta^2\rho_1/\theta$. Будем полагать, что за фронтом (в его окрестности) ударной волны

$$\frac{p}{p_0} \gg 1, \qquad \theta = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,(\theta_0 - \theta'), \qquad \theta' \ll 1.$$

Пусть L — характерный линейный размер. Введем безразмерные переменные равенствами

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \qquad t' = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_1}}\,t, \qquad p = \frac{(\gamma-1)\theta_0^2}{(\gamma+1)^2\theta}\,p_0p',$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\theta_0}{\gamma+1}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_1}}\,\boldsymbol{u}, \qquad V = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_1}}\,V', \qquad e = \frac{\theta_0^2}{(\gamma+1)^2\theta}\,p_0e_0.$$

Учитывая, что

$$\theta \simeq \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\,\theta_0, \qquad p \simeq \frac{\theta_0 p_0}{\gamma+1}p', \qquad \nabla p \simeq \frac{\theta_0 p_0}{L(\gamma+1)}\,\nabla' p',$$

из системы (2.5), (2.6) получим (штрихи опущены)

$$p_t + p\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \qquad \boldsymbol{u}_t + \nabla p = 0. \qquad (2.13)$$

Полагая в уравнениях сохранения импульса в (2.7) и $(V-u)$-диаграммы (2.9) $p_0 = 0$, как это принято в теории сильных ударных волн, получим соотношения на скачке

$$p = uV, \qquad 2uV = u^2 - 2e_0. \qquad (2.14)$$

В физических переменных второе равенство из (2.14) совпадает с формулой (2.12).

Замечание 11. Закон сохранения массы в (2.7) служит граничным условием для функции θ'. Используя (2.14), его можно записать в виде $(\gamma-1)\theta' = 2e\theta_0/p$.

Замечание 12. Условия (2.14) на ударной волне можно записать в виде

$$p = uV, \qquad u^2/2 = p + e_0. \tag{2.15}$$

Согласно [2] течение смеси можно трактовать как течение слабосжимаемого политропного газа (показатель адиабаты много больше единицы) с фазовыми переходами на ударной волне (при $e \neq 0$), обусловленными физическими процессами типа эндотермического горения.

Сравнение с экспериментом. В работе [3] приведены экспериментальные зависимости скорости ударной волны D от скорости течения u среды для порошков молибдена, вольфрама, меди и алюминия. Из приведенных в [3] графиков следует, что эту зависимость можно считать линейной ($D = au+b$) для достаточно широкого диапазона скоростей. Ниже приводятся полученные из [3] уравнения $(D-u)$-диаграммы для каждого порошка и соответствующие им формулы (2.11) в зависимости от пористости m, связанной с объемной концентрацией равенством $\alpha_2 = (m-1)/m$.

Для порошка молибдена

$D_э = 2{,}05u + 0{,}03$, $D = 2{,}66u$ при $m = 1{,}82$, $0{,}58 \leqslant u \leqslant 2{,}31$,

$D_э = 1{,}58u - 0{,}07$, $D = 1{,}77u$ при $m = 3{,}1$, $0{,}64 \leqslant u \leqslant 3{,}21$.

Для порошка вольфрама

$D_э = 1{,}97u + 0{,}13$, $D = 2{,}68u$ при $m = 1{,}81$, $0{,}52 \leqslant u \leqslant 1{,}98$,

$D_э = 1{,}48u - 0{,}11$, $D = 1{,}67u$ при $m = 3{,}55$, $0{,}61 \leqslant u \leqslant 2{,}86$.

Для порошка меди

$D_э = 1{,}82u + 0{,}21$, $D = 2{,}52u$ при $m = 1{,}91$, $0{,}6 \leqslant u \leqslant 2{,}44$,

$D_э = 1{,}62u + 0{,}06$, $D = 1{,}81u$ при $m = 2{,}98$, $0{,}64 \leqslant u \leqslant 2{,}73$.

Для порошка алюминия

$D_э = 1{,}85u + 0{,}2$, $D = 2{,}39u$ при $m = 2{,}01$, $0{,}65 \leqslant u \leqslant 2{,}97$,

$D_э = 1{,}59u - 0{,}05$, $D = 1{,}78u$ при $m = 3{,}01$, $0{,}67 \leqslant u \leqslant 3{,}16$.

Здесь $D_э$ — скорость ударной волны, определенная экспериментально; D — соответствующая скорость, полученная из (2.11). Экспериментальные $(D-u)$-диаграммы строились по крайним точкам указанных диапазонов скоростей. Единица измерения скорости — 1 км/с.

Приведенные данные показывают, что приближение сильных ударных волн удовлетворительно описывает динамику сред типа порошков для скоростей ударных волн, сравнимых со скоростью звука в металле.

Замечание 13. Одномерная система (2.13) $p_t + pu_x = 0$, $u_t + p_x = 0$ линеаризуется, если в качестве независимых переменных выбрать $\alpha = u$, $\beta = 2\sqrt{p}$, а в качестве искомых величин взять $t = t(\alpha, \beta)$ и $x = x(\alpha, \beta)$: $x_\alpha + \beta t_\beta/2 = 0, x_\beta + \beta t_\alpha/2 = 0$. Согласно (2.15) на плоскости (α, β) уравнение ударной волны имеет вид $|\alpha| = \sqrt{2(\beta^2 + 4e_0)}/2$ или $\beta = \sqrt{2\alpha^2 - 4e_0}$. На ней должно быть выполнено условие

$$\frac{x_\alpha + \beta_\alpha x_\beta}{t_\alpha + \beta_\alpha t_\beta} = \frac{\beta^2}{4\alpha}.$$

Если ввести функцию тока $x = \beta\psi_\beta/2$, $t = -\psi_\alpha$, то она будет удовлетворять уравнению колебания мембраны $\psi_{\alpha\alpha} - (\beta\psi_\beta)_\beta/\beta = 0$.

3. ИМПУЛЬСНОЕ ОБЖАТИЕ КОНЕЧНОЙ МАССЫ СМЕСИ

Постановка задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ покоящаяся смесь занимает объем $0 \leqslant r \leqslant 1$. Предположим, что от границы $r = 1$ к центру симметрии $r = 0$ движется ударная волна, положение фронта которой определяется равенствами $r = 1 - R(t)$, $R(0) = 0$. Будем полагать, что за фронтом ударной волны течение описывается одномерной системой (2.13) с краевыми условиями (2.15). Для описания движения среды, учитывая специфику задачи, целесообразно ввести новые независимые переменные $\tau = R(t)$, $\xi = (1-r)/\tau$ и положить $R'(t) = q(\tau)/\sqrt{\tau}$, $u(r,t) = -q(\tau)V(\xi,\tau)/\sqrt{\tau}$, $p(r,t) = P(\xi,\tau)/\tau$. В новых переменных одномерная система (2.10) принимает вид

$$\tau\,\frac{\partial \ln P}{\partial \tau} - \xi\,\frac{\partial \ln P}{\partial \xi} + r^{-\nu}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,(r^{\nu}V) = 1; \tag{3.1}$$

$$\tau q\,\frac{\partial}{\partial \tau}\,(qV) - q^2\xi\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,V - \frac{q^2}{2}\,V + \frac{\partial}{\partial \xi}\,P = 0, \tag{3.2}$$

где $r = 1-\tau\xi$; параметр геометрии $\nu = 0, 1, 2$ для плоских, цилиндрических и сферических волн соответственно.

На ударной волне должны выполняться соотношения на скачке

$$q^2V = P, \qquad q^2V^2/2 = P + e_0\tau \qquad (\xi = 1). \tag{3.3}$$

Границу $r = 1$ будем считать либо неподвижной твердой стенкой:

$$V = 0 \qquad (\xi = 0), \tag{3.4}$$

либо границей среды с вакуумом:

$$P = 0 \qquad (\xi = 0). \tag{3.5}$$

Течение среды существенно зависит от способа инициирования ударной волны. Поэтому в области

$$\Pi = \{(\xi,\tau)\colon 0 < \xi < 1, \tau_0 < \tau < \tau_1\},$$

где $0 < \tau_0 < \tau_1 < 1$, рассмотрим семейство задач (3.1)–(3.4) или (3.1)–(3.3), (3.5) с начальными данными

$$q = q_0, \qquad V = V_0(\xi), \qquad P = P_0(\xi) \qquad (\tau = \tau_0). \tag{3.6}$$

Начальные данные должны быть согласованы с краевыми условиями (3.3)–(3.5):

$$q_0^2V_0(1) = P_0(1), \qquad q^2V_0^2/2 = P_0 + e_0\tau_0; \tag{3.7}$$

$$V_0(0) = 0 \quad \text{или} \quad P_0(0) = 0. \tag{3.8}$$

Условия согласования (3.7) определяют начальные данные для функции $q(\tau)$.

По известной функции $q(\tau)$ закон движения фронта ударной волны определяется из решения задачи Коши

$$\sqrt{R(t)}\,R'(t) = q(R(t)), \qquad R(t_0) = \tau_0. \tag{3.9}$$

Цель дальнейшего исследования состоит в определении класса начальных данных (3.6), позволяющих выписывать приближенные решения сформулированных выше задач при $\tau_0 \to 0$.

Вариационная формулировка. Система (3.1)–(3.3) с краевыми условиями (3.4) или (3.5) допускает интеграл энергии

$$\int\limits_0^1 r^{\nu}\Big(\frac{q^2}{2}\,V^2 + P + e_0\tau\Big)d\xi = E \tag{3.10}$$

(проверяется дифференцированием по τ) с постоянной E, вычисляемой по начальным данным (3.6).

Вариационный принцип. Решения уравнений движения сплошной среды (3.1)–(3.3), (3.4) или (3.5), (3.6) в области П совпадают с экстремалями функционала действия

$$S(q, V, P) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} L\, d\tau$$

с лагранжианом

$$L = \frac{\sqrt{\tau}}{q} \int_0^1 \Big(\frac{q^2}{2} V^2 - P - e_0\tau\Big) r^\nu\, d\xi + \frac{\sqrt{\tau}}{q} E$$

в классе функций, удовлетворяющих начальным данным (3.6), уравнению связи (3.1) и дополнительному ограничению $V = 0$ при $\xi = 0$ в случае краевого условия (3.4).

Действительно, вариация функционала S по q дает интеграл энергии. Далее положим

$$P = \exp(-r^{-\nu} g_\xi), \qquad V = r^{-\nu}\Big[(\tau g)_\tau - \xi g_\xi + \frac{1 - r^{\nu+1}}{\tau(\nu+1)}\Big], \tag{3.11}$$

так что уравнение неразрывности (3.1) выполнено автоматически. Начальные данные (3.6) будут выполнены, если при $\tau = \tau_0$ положить

$$g = g_0(\xi), \qquad \tau_0 g_\tau = r_0^\nu V_0 + \xi g_0' - g_0 - \frac{1 - r_0^{\nu+1}}{\tau_0(\nu+1)}, \tag{3.12}$$

где

$$r_0(\xi) = 1 - \tau_0\xi, \qquad g_0(\xi) = \int_\xi^1 r_0^\nu \ln P(\xi)\, d\xi,$$

и определить q_0 из условий согласования (3.7). Краевое условие (3.4) также будет выполнено, если положить

$$\tau g = \tau_0 g_0 \qquad (\xi = 0). \tag{3.13}$$

Из представления (3.11) имеем

$$\delta P = -r^{-\nu} P \delta g_\xi, \qquad \delta V = r^{-\nu}[(\tau g)_\tau - \xi \delta g_\xi]. \tag{3.14}$$

Варьируя функционал действия по V и P с учетом представления (3.14) и полагая $\delta g(\xi, \tau_0) = \delta g(\xi, \tau_1) = 0$, после интегрирования по частям получим уравнение в вариациях

$$\iint_\Pi \frac{\sqrt{\tau}}{q} \Big(\sqrt{\tau}\tau g \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{qV}{\sqrt{\tau}} - \xi q^2 \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial \xi}\Big) \delta g(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi =$$

$$= -\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sqrt{\tau}}{q} P(0, \tau) \delta g(0, \tau)\, d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sqrt{\tau}}{q} [P(1, \tau) - q^2 V(1, \tau)] \delta g(1, \tau)\, d\tau. \tag{3.15}$$

Отсюда в силу произвольности $\delta g(\xi, \tau)$ и $\delta g(1, \tau)$ следует уравнение (3.2) и первое из условий (3.3). Если $\delta g(0, \tau)$ произвольно, то из (3.15) следует краевое условие (3.5) (в случае краевого условия (3.4) из (3.13) следует $\delta g(0, \tau) = 0$). Второе краевое условие из (3.3) следует из интеграла энергии (3.10) после дифференцирования по τ. Вариационный принцип доказан.

Замечание 14. В дальнейшем будем искать решения задач (3.1)–(3.6), регулярные при $\tau_0 \to 0$. Поэтому начальные данные не могут быть произвольными. Из (3.11) при $\tau_0 \to 0$ получим $P_0 = \exp(-g_{0\xi})$, $V_0 = g_0 - \xi g_{0\xi} + \xi$; из (3.12) при $\tau_0 \to 0$ — $(\xi P_0)' = p_0 V_0'$;

из (3.7), (3.8) при $\tau_0 \to 0$ — $V_0(1) = 2$, $P_0(1) = 2q_0^2$, $V_0(0) = 0$ или $P_0(0) = 0$. Начальное значение для q определяется из интеграла энергии при $\tau_0 \to 0$ по заданной константе E.

Приближенные решения. Для малых значений времени течение можно считать плоскопараллельным, так как $r \sim 1$. Постоянную e_0 можно положить равной нулю. При $e_0 = 0$ задача (3.1)–(3.4) имеет стационарное решение [2]

$$U^{2/3}(U-1)^{-1/2}(3-U)^{5/6} = \xi^{-1}2^{2/3}, \quad P = \frac{q^2}{2}\,\frac{\xi^2U^2}{U-1}, \quad q^2 = \frac{3}{4}\,E,$$

где $U = V/\xi$. Закон движения фронта ударной волны определяется равенством $R(t) = 3\cdot 4^{-2/3}E^{1/3}t^{2/3} \simeq 1{,}19E^{1/3}t^{2/3}$. Отметим, что $P(1) = 3E/2$, $P(0) = (3E/4)\,4^{2/3}$. В [2] также приведены приближенные решения задач (3.1)–(3.4) с начальными данными вида (3.6).

Уравнения (3.1), (3.2) не имеют стационарных решений, удовлетворяющих краевому условию (3.5) и краевым условиям (3.3) (при $e_0 = 0$). Поэтому в дальнейшем строятся приближенные решения, дающие некоторые средние значения скорости и давления на сечениях $\tau = \mathrm{const}$. Рассмотрим семейство функций $g(\xi, \boldsymbol{\mu})$, зависящее от векторного параметра $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$, и в соответствии с (3.11) положим $P(\xi, \boldsymbol{\mu}) = \exp(-q_\xi)$, $V(\xi, \boldsymbol{\mu}) = g - \xi q_\xi + \xi$. При таком определении P и V уравнение неразрывности (3.1) будет выполнено автоматически. Кроме того, будем полагать, что

$$g(0, \boldsymbol{\mu}) = V(0, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \text{или} \quad P(0, \boldsymbol{\mu}) = 0.$$

Множество вариаций $\delta g = \nabla_{\boldsymbol{\mu}} g \cdot \delta\boldsymbol{\mu}$ функций g не являются финитными по времени. Поэтому рассмотрим последовательность вариаций вида $\delta g_n = \varphi_n(\tau)\delta g(\xi)$, где $\varphi_n(\tau)$ — гладкие функции, обращающиеся в нуль при $\tau = \tau_0$ и $\tau = \tau_1$, и $\varphi_n(\tau) \to 1$ при $\tau_0 < \tau < 1$. Подставляя δg_n в формулу (3.15) и считая функцию q постоянной, в пределе при $n \to \infty$ после интегрирования по частям получим равенство

$$\frac{3}{2}\,q^2 \int V\nabla_{\boldsymbol{\mu}} g\,d\xi = \int\limits_0^1 (q^2\xi V - P)\nabla_{\boldsymbol{\mu}} g\,d\xi, \tag{3.16}$$

справедливое в силу произвольности $\delta\boldsymbol{\mu}$. Таким образом, имеем приближенную постановку: *требуется найти параметры* $\boldsymbol{\mu}$ *и* q *из системы* (3.16) *и интеграла энергии* (3.10).

В простейшем случае $V = \mu_1\xi$, $P = \mu_2\xi^{\mu_1-1}$ соответствующее решение имеет вид [2] $\mu_1 = 3/2$, $\mu_2 = E$, $q_0^2 = 8E/9$. Закон движения фронта ударной волны задается формулой $R(t) = 2^{1/3}E^{1/3}t^{2/3} \simeq 1{,}26E^{1/3}t^{2/3}$. Следует ожидать, что построенные предложенным выше способом приближенные решения дают удовлетворительное приближение в окрестности $\tau = 0$. Для того чтобы учесть динамику процесса и геометрию течения, рассмотрим семейство функций $g(\xi, \boldsymbol{T})$, зависящих от векторной функции $\boldsymbol{T}(\tau) = (T_1(\tau), \ldots, T_k(\tau))$, и определим отображения $\boldsymbol{T} \to P(\xi, \boldsymbol{T})$, $\boldsymbol{T} \to V(\xi, \boldsymbol{T}, \tau\boldsymbol{T}', \tau)$ равенствами (3.11). Тем самым определен лагранжиан

$$L = \sqrt{\tau}M(q, \boldsymbol{T}, \tau\boldsymbol{T}', \tau) + \frac{\sqrt{\tau}}{q}\Big[E - \frac{e_0}{\tau(\nu+1)}(r^{\nu+1} - 1)\Big],$$

в котором

$$M = \frac{1}{q}\int\limits_0^1 r^\nu\Big(\frac{q^2}{2}V^2 - P\Big)\,d\xi.$$

Вариация функционала действия по q дает интеграл энергии (3.10), а вариация его по $\boldsymbol{T}$ — систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial M}{\partial T_i'} + \frac{1}{2\tau}\,\frac{\partial M}{\partial T_i'} = \frac{\partial M}{\partial T_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{3.17}$$

которая вырождается при $\tau = 0$. Поэтому начальные данные для нее должны находиться в процессе решения. Для их определения используем формулу Тейлора $M = M_0(q, \boldsymbol{T}) + \tau \boldsymbol{N}(q, T) \cdot \boldsymbol{T}' + O(\tau^2)$ и аналогично запишем интеграл энергии (3.10):

$$W_0(q, \boldsymbol{T}) + \tau W(q, \boldsymbol{T}) + \tau \boldsymbol{K}(q, \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{T}' = E + O(\tau^2). \tag{3.18}$$

Подставляя представление (3.18) в уравнения Эйлера (3.17), получим

$$\frac{3}{2} N_i - \frac{\partial M_0}{\partial T_i} + \tau \frac{d}{d\tau} N_i = O(\tau^2) \qquad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Из последнего равенства и интеграла энергии следует, что решение системы (3.17) будет регулярным при $\tau = 0$, если

$$W_0(q, \boldsymbol{T}) = E, \quad \frac{3}{2} N_i(q, \boldsymbol{T}) = \frac{\partial}{\partial T_i} M_0(q, \boldsymbol{T}) \quad (i = 1, 2, \dots, k); \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\tau} W_0(q, \boldsymbol{T}) + \boldsymbol{K}(q, \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{T}' + W(q, \boldsymbol{T}) = 0, \\ \frac{d}{d\tau} \Big[\frac{3}{2} N_i(q, \boldsymbol{T}) - \frac{\partial}{\partial T_i} M_0(q, \boldsymbol{T}) + N_i(q, \boldsymbol{T})\Big] = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, k) \end{gathered} \tag{3.20}$$

при $\tau = 0$. Система (3.19) определяет начальные данные для $\boldsymbol{T}$ и q, а система (3.20) — начальные данные для $\boldsymbol{T}'$ (значение $q'(0)$ вычисляется из интеграла энергии).

В результате получим следующую приближенную постановку задачи об импульсном обжатии конечной массы смеси: *требуется найти решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (3.17) *с начальными данными, определенными системами* (3.19) *и* (3.20).

Замечание 15. При $\nu = 0$ задача (3.19) совпадает с задачей об определении стационарных решений из системы (3.10) и (3.16). Решение системы (3.10) и (3.16) будет стационарным решением уравнений Эйлера (3.17), если $e_0 = 0$ (в этом случае интеграл энергии не зависит явно от τ и из (3.20) следует, что $q'(0) = 0$, $\boldsymbol{T}'(0) = \mathbf{0}$).

В качестве примера рассмотрим семейство приближенных решений вида $V = T_1(\tau)\xi$, $P = \exp\{T_2(\tau) + [T_1(\tau) - 1]\ln\xi\}$ при $\nu = 0$. Функция M, определяющая лагранжиан, имеет вид

$$M = \frac{q}{54}\,[9(T_1 - \tau T_2')^2 + 24\tau T_1'(T_1 - \tau T_2') + 17\tau^2 {T_2'}^2] - \frac{1}{qT_1}\,\mathrm{e}^{T_2}.$$

Другой тип приближенных решений получим в предположении, что $\tau_1 - \tau_0 \ll 1$ и для значений $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ скорость и давление мало отличаются от некоторых средних распределений $V(\xi)$ и $P(\xi)$. Поэтому положим

$$P = \exp[r^{-\nu} q'(\xi)], \qquad V = r^{-\nu}\Big[q(\xi) - \xi q'(\xi) + \frac{1 - r^{\nu+1}}{\tau(\nu + 1)}\Big].$$

При этом уравнение неразрывности будет выполнено.

Считая, что $V = 0$ при $\xi = 0$, из уравнения в вариациях получим

$$-\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\tau}\, qV\, d\tau + \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sqrt{\tau}}{q}\, P\, d\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\tau}\Big(\frac{1}{2} q + \frac{\nu\tau}{r} q\xi - \tau q'\Big) V\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\sqrt{\tau}}{q}[P(1, \tau) - q^2 V(1, \tau)]\, d\tau = 0.$$

Разделив эти равенства на $\tau_1 - \tau_0$, в пределе при $\tau_0, \tau_1 \to \tau$ с учетом уравнения неразрывности получим систему

$$r^{-\nu} P(r^\nu V)_\xi = (\xi P)_\xi - \frac{\nu\tau\xi}{r} P \ln P; \tag{3.21}$$

$$P_\xi = q^2 \sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} V)_\xi - \tau q(q' - \nu\xi q/r)V \tag{3.22}$$

с краевыми условиями

$$P = q^2 V \qquad (\xi = 1), \qquad V = 0 \qquad (\xi = 0). \tag{3.23}$$

Соотношение (3.21) есть уравнение неразрывности (3.1).

Система (3.21)–(3.23) вместе с интегралом энергии (3.10) определяет приближенные решения задачи об импульсном обжатии конечной массы смеси с краевыми условиями (3.4).

При $\nu = 0$ и $e_0 = 0$ решение задачи (3.21)–(3.23) будет автомодельным. В общем случае переменная τ входит в краевую задачу как параметр. Существование решения не очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
2. **Налимов В. И.** Задача о сильном взрыве в слабосжимаемых средах // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 20–28.
3. **Баканова А. А., Дудоладов И. П., Сутулов Ю. Н.** Ударная сжимаемость пористых вольфрама, молибдена, меди и алюминия в области низких давлений // ПМТФ. 1974. № 2. С. 117–122.

Поступила в редакцию 13/I 2000 г.