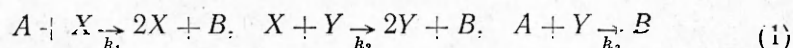


**АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ХОЛОДНЫХ ПЛАМЕН,
ОСНОВАННАЯ НА КИНЕТИЧЕСКОЙ СХЕМЕ
ЛОТКА — ФРАНК-КАМЕНЕЦКОГО**

Р. М. Минц, И. Е. Сальников, Г. А. Сорокина, Н. А. Шишова

З [1] предложено использовать кинетическую схему Лотка [2]



в качестве модельной схемы холоднотламенного окисления углеводов. Здесь A — исходное вещество, X и Y — активные промежуточные продукты, B — продукты реакций, k_i — константы скорости соответствующих реакций. Роль X согласно [1] играют органические перекиси, роль Y — альдегиды.

Кинетическая схема Лотка — Франк-Каменецкого использовалась в [3—5] для объяснения характерных особенностей газофазного окисления углеводов, в частности для объяснения многократных и периодических всплесков холодного пламени. Если реакции схемы (1) протекают в закрытой реакционной системе, а концентрацию исходного вещества можно считать постоянной, то, записывая уравнения материального баланса по веществам X и Y , получим

$$\begin{aligned} dC_x/dt &= k_1 C_A C_x - k_2 C_x C_y, \\ dC_y/dt &= k_2 C_x C_y - k_3 C_A C_y, \end{aligned} \quad (2)$$

где C_A , C_x , C_y — концентрации веществ; t — время. Такие же уравнения получены в [6, 7] при решении задачи об изменении численности двух биологических видов, один из которых питается другим (модель «жертва — хищник»).

Исследование фазовой плоскости уравнений (2) приводится в ряде работ (см., например, [8]). Эти уравнения — математическая модель консервативной системы, обладающей состоянием равновесия типа центра, которое окружено континуумом замкнутых фазовых траекторий, отображающих периодические процессы. Как указывалось в [9], система (2) — негрубая, и, следовательно, дополнение уравнений сколько угодно малыми членами (опущенными при составлении математической модели) должно, вообще говоря, приводить к превращению системы в грубую и к качественному изменению ее поведения [8]. В частности, фазовое пространство грубой системы не может содержать континуума замкнутых траекторий. Наблюдаемые на опыте незатухающие колебания, и, в частности периодические процессы, регистрировавшиеся при окислении углеводов в открытой реакционной системе [4, 10], являются автоколебаниями, которым в фазовом пространстве соответствует изолированная замкнутая траектория — устойчивый предельный цикл [8].

Различные модификации системы (2), позволяющие превратить ее в автоколебательную, рассматривались во многих работах, обзор которых содержится в [11]. В [12—16] обсуждался вопрос о возможности описания колебаний концентраций моделью, основанной на кинетической схеме Лотка — Франк-Каменецкого, при учете расходования исходного реагента. Эту модель представляет система трех дифференциальных уравнений для C_A , C_x , C_y . В [12] сделан ошибочный вывод о невозможности колебательных режимов, исправленный в [13], где, как и в [14, 15], путем численного интегрирования уравнений при некоторых значениях констант получен правильный вывод о возможности затухаю-

щих колебаний. В [15, 16] исследуются условия, при которых приближение к стационарному состоянию носит колебательный характер.

Общий недостаток работ [12—16] — отсутствие исследования фазового пространства, что не позволяет получить представление о динамике изучаемых систем.

В данной работе составлена и исследована математическая модель, соответствующая протеканию реакций по схеме Лотка — Франк-Каменецкого (1) в открытой реакционной системе. Схема (1) дополнена реакцией неавтокаталитического превращения X в Y



что было рекомендовано в [17]. Для полученной модели определены число, тип и устойчивость состояний равновесия, расположенных в первом октанте трехмерного фазового пространства. Рассмотрено поведение фазовых траекторий на границах первого октанта и на бесконечности. Установлено, что при определенных условиях фазовое пространство содержит устойчивый предельный цикл, т. е. рассматриваемая модель может описывать экспериментально наблюдаемые автоколебания.

Составим математическую модель процесса. Учитывая непрерывную подачу исходного вещества и отвод реагирующей смеси, уравнения материального баланса по веществам X , Y , A можно записать в виде [18]

$$\begin{aligned} dC_X/dt &= k_1 C_A C_X - k_2 C_X C_Y - k_4 C_X - q C_X / V, \\ dC_Y/dt &= k_2 C_X C_Y - k_3 C_A C_Y + k_4 C_X - q C_Y / V, \\ dC_A/dt &= q (C_{A0} - C_A) / V - k_1 C_A C_X - k_3 C_A C_Y, \end{aligned} \quad (4)$$

где C_{A0} — входная концентрация исходного вещества; q — объемная скорость потока вещества через реактор; V — объем реактора. После преобразования системы (4) к безразмерным переменным

$$x = (k_2 V / q) C_X, \quad y = (k_2 V / q) C_Y, \quad z = C_A / C_{A0}, \quad \tau = (q / V) t \quad (5)$$

уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= x[az - y - (1 + b)] \equiv P(x, y, z), \\ dy/d\tau &= xy - (am/n)yz + bx - y \equiv Q(x, y, z), \\ dz/d\tau &= 1 - z(1 + nx + my) \equiv R(x, y, z), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$a = k_1 C_{A0} V / q, \quad b = k_4 V / q, \quad m = k_3 / k_2, \quad n = k_1 / k_2. \quad (7)$$

Определим число и характер состояний равновесия системы (6). Их координаты x_s , y_s , z_s находятся из уравнений

$$\begin{aligned} x_s [a z_s - y_s - (1 + b)] &= 0, \\ b x_s - y_s + x_s y_s - (am/n) y_s z_s &= 0, \\ 1 - z_s (1 + n x_s + m y_s) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим область \mathcal{G} фазового пространства, определяемую неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, т. е. первый октант, включая его границы, представляющие собой координатные плоскости. Состояние равновесия $A(0, 0, 1)$ лежит на интегральной плоскости $x = 0$. Если $a < 1 + b$, то A — устойчивый узел; если $a > 1 + b$, то A — седло, устойчивая сепаратрисная поверхность которого — плоскость $x = 0$.

Для нахождения координат остальных состояний равновесия выразим x_s и y_s через z_s из первых двух уравнений системы (8)

$$\begin{aligned} x_s &= [az_s - (1+b)] [(am/n)z_s + 1] / (az_s - 1), \\ y_s &= az_s - (1+b), \end{aligned} \quad (9)$$

а z_s определяется уравнением

$$f(z) = 2a^2mz^3 - a(3m+2bm-n-1)z^2 - [a+1+(b+1)(n-m)]z + 1 = 0.$$

Из этого выражения видно, что при $z \rightarrow +\infty$ $f(z) \rightarrow +\infty$, при $z \rightarrow -\infty$ $f(z) \rightarrow -\infty$ и $f(0) = 1$. Из равенств (9) следует, что аппликаты состояний равновесия в области \mathcal{G} должны удовлетворять условию

$$z_s \geq (1+b)/a. \quad (10)$$

Для определения числа состояний равновесия рассмотрим следующие случаи.

1) $a > 1+b$. При выполнении этого неравенства $f[(1+b)/a] = b(b+1-a)/a < 0$. Отсюда следует, что кривая $f(z)$ имеет вид, показанный на рис. 1, а уравнение $f(z) = 0$ имеет один отрицательный корень z_1 и два положительных — z_2 и z_3 , причем $z_2 < (1+b)/a < z_3$. На рис. 1 изображен случай $z_{\max} > 0$. Возможен также случай $z_{\max} \leq 0$, для

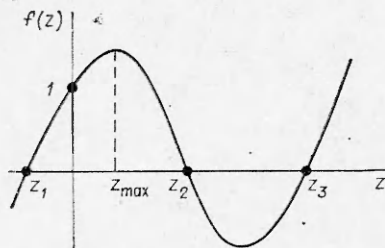


Рис. 1.

которого последующее рассуждение упрощается, а результат останется прежним. Условию (10) удовлетворяет только z_3 . Таким образом, если $a > 1+b$, то в области \mathcal{G} кроме $A(0, 0, 1)$ имеется еще одно состояние равновесия с аппlikатой z_3 , которое назовем C .

2) $a < 1+b$; $f[(1+b)/a] > 0$, а корни уравнения $f(z) = 0$ могут быть а) все отрицательные, б) один отрицательный, а два комплексные сопряженные, в) один отрицательный и два положительных.

В случаях а) и б) ни один из корней не будет аппlikатой состояния равновесия. Рассмотрим случай в). Если $(1+b)/a < z_2$, то положительные корни z_2 и z_3 — аппlikаты состояний равновесия. Если $(1+b)/a > z_3$, то ни один из положительных корней не является аппlikатой состояния равновесия.

Покажем, что случай $(1+b)/a < z_2$ не может осуществляться. Для этого вычислим $f'[(1+b)/a] = 3bm + 2b^2m + 2bn + n + m + 2b + 1 - a > 0$. Отсюда следует, что точка $z = (1+b)/a$ лежит либо на интервале $(0, z_{\max})$, либо на (z_3, ∞) (см. рис. 1). Вычислим $f''[(1+b)/a] = 2a(3m + 4bm + n + 1) > 0$. В представляющей интерес точке кривая обращена выпуклостью вниз, и следовательно, эта точка находится на интервале (z_3, ∞) . Таким образом, если $a < 1+b$, то система (6) имеет в области \mathcal{G} единственное состояние равновесия $A(0, 0, 1)$.

3) При $a = 1+b$ точка C сливается с A , образуя сложное состояние равновесия типа седло — узел [19].

Для определения характера состояния равновесия $C(x_s, y_s, z_s)$ запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 p &= b[(am/n)/z_s + 1]/(az_s - 1) + 1/z_s, \\
 q &= b[(am/n)z_s + 1]/[z_s(az_s - 1)] + [az_s - (1+b)][(am/n)z_s + \\
 &\quad + 1][az_s(1+n) - 1]/(az_s - 1) - (am^2/n)z_s[az_s - (1+b)], \\
 r &= [az_s - (1+b)][(am/n)z_s + 1]/(az_s - 1) \{ (az_s - 1)/z_s + \\
 &\quad + amz_s[az_s - (1+b)] + amz_s(az_s - 1) + bnz_s[(am/n)z_s + 1]/(az_s - 1) \},
 \end{aligned}$$

Так как $z_s > (1+b)/a$, то $p > 0$ и $r > 0$. Для различения узлов от фокусов и седел от седло-фокусов служит поверхность [20]:

$$\Delta_3 \equiv -p^2q^2 + 4p^3r + 4q^3 - 18pqr + 27r^2 = 0.$$

В зависимости от знака r , q , $pq-r$ и Δ_3 для состояния равновесия C могут иметь место следующие возможности [20]:

устойчивый узел

$$r > 0, q > 0, pq - r > 0, \Delta_3 < 0, \quad (11)$$

устойчивый фокус

$$r > 0, q > 0, pq - r > 0, \Delta_3 > 0, \quad (12)$$

седло-фокус с неустойчивой сепаратрисной поверхностью

$$r > 0, q > 0, pq - r < 0, \Delta_3 > 0 \text{ или } r > 0, q \leq 0, \Delta_3 > 0, \quad (13)$$

седло с неустойчивой сепаратрисной поверхностью

$$r > 0, q > 0, pq - r < 0, \Delta_3 < 0 \text{ или } r > 0, q \leq 0, \Delta_3 < 0. \quad (14)$$

Вариант (11) реализуется, когда a близко к $1+b$ (при $a > 1+b$), так как при $a = 1+b$ происходит слияние точек A и C с образованием седло-узла. С помощью вычислений на ЭВМ было показано, что выражение $pq-r$ меняет знак, и следовательно, обращается в нуль. Так как $p > 0$ и $r > 0$, из равенства $pq-r=0$ видно, что $q > 0$. Подставляя $pq=r$ в выражение для Δ_3 , получаем: $\Delta_3 = 8p^2q^2 + 4p^4q + 4q^3 > 0$. Таким образом осуществляются также варианты (12) и (13). При помощи вычислений на ЭВМ было показано, что реализуется и вариант (14).

Для исследования бесконечности фазового пространства системы (6) применим преобразование переменных [20]

$$x = 1/u, y = v/u, z = w/u, \quad (15)$$

которое позволяет исследовать все бесконечно удаленные точки кроме тех, которые лежат на плоскости $x=0$. Система (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= v + bu + v^2 + buv - a(1+m/n)v\omega, \\
 \dot{u} &= (1+b)u^2 + uv - au\omega, \\
 \dot{w} &= -n\omega + u^2 - a\omega^2 + bu\omega + (1-m)v\omega.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Плоскость $u=0$, соответствующая бесконечно удаленной плоскости фазового пространства системы (6), будет для системы (16) интегральной плоскостью. Исследуем состояния равновесия, которые лежат на плоскости $u=0$, причем следует рассматривать только первый октант пространства u, v, ω , соответствующий первому октанту пространства x, y, z . При этих ограничениях система (16) имеет два состояния равнове-

сия: $C_1(0, 0, 0)$ — «конец» оси x и $Q_2\{0, n(n+m-1)/[m(1-n-m)], n(n-m+1)/[am(1-n-m)]\}$ — при $n+m < 1$. Если $n+m > 1$, C_2 уходит из первого октанта, если $n+m=1$, то C_2 лежит в бесконечности на плоскости $x=0$, и его можно исследовать, применив другое преобразование переменных.

Характеристическое уравнение для C_1 имеет корни $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=-n$. Это будет четнократное состояние равновесия «типа C », согласно [19]. Через него проходят две полуповерхности, одна из которых заполнена O^+ -траекториями (т. е. траекториями, стремящимися к состоянию равновесия при $t \rightarrow +\infty$, а другая — O^- -траекториями (т. е. траекториями, стремящимися к состоянию равновесия при $t \rightarrow -\infty$). Все остальные траектории в достаточно малой окрестности состояния равновесия проходят на конечном расстоянии от него. Покажем, что O^+ -полуповерхность состояния равновесия C_1 не проходит в первом октанте пространства u, v, w (а, следовательно, и пространства x, y, z). Из уравнений (16) видно, что при достаточно малых $u, v, w \dot{v} > 0$. Отсюда следует, что исследуемая полуповерхность не может проходить через первый октант, так как в точках этой полуповерхности должны выполняться неравенства $\dot{u} < 0, \dot{v} < 0, \dot{w} < 0$. Таким образом, ни одна траектория из конечной части первого октанта не уходит в состояние равновесия C_1 . Как показывают опыты, C_2 — неустойчивый узел или неустойчивый фокус.

Для исследования бесконечно удаленных точек плоскости $x=0$ применим второе преобразование переменных [20]

$$y=1/u, z=v/u, x=w/u, \quad (17)$$

в результате которого система (6) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (am/n)uv - uw + u^2 - bu^2w, \\ \dot{v} &= -mv + u^2 + (am/n)v^2 - (n+1)v\omega - buv\omega, \\ \dot{w} &= -w + a(1+m/n)n\omega - \omega^2 - bu\omega - bu\omega^2. \end{aligned} \quad (18)$$

На плоскости $x=0$ в первом октанте имеются два бесконечно удаленных состояния равновесия: $D_1(0, 0, 0)$ — «конец» оси y и $D_2(0, n/a, 0)$. Корни характеристического уравнения для D_1 : $\lambda_1=0, \lambda_2=-m, \lambda_3=-1$. Согласно [19], D_1 — седло-узел с устойчивой узловой областью. Рассмотрим, как расположен этот седло-узел относительно первого октанта пространства u, v, w . Плоскости $u=0$ и $w=0$ — интегральные плоскости системы (18). На плоскости u, v поведение траекторий определяется системой

$$\dot{u} = u[u + (am/n)v], \quad \dot{v} = -mv + u^2 + (am/n)v^2, \quad (19)$$

которая имеет седло-узел $(0, 0)$ с устойчивой узловой областью [21] и неустойчивый узел $(0, n/a)$. Поскольку $\dot{u} > 0$ при $u > 0$ и $v > 0$, то седловая область седло-узла расположена в первой четверти плоскости u, v ; O^+ -сепаратриса — интегральная прямая системы (19) — $u=0$. На оси $v \dot{v} > 0$, значит O^- -сепаратриса седло-узла идет в первой четверти плоскости u, v (см. рис. 2, где сепаратрисы проведены жирными линиями).

На плоскости v, w поведение траекторий определяется системой

$$\dot{v} = -mv + (am/n)v^2 - (n+1)v\omega, \quad \dot{w} = -w + a(1+m/n)v\omega - \omega^2. \quad (20)$$

Точка $(0, 0)$ на этой плоскости является устойчивым узлом.

Покажем, что плоскость $u=0$ — сепаратрисная поверхность седло-узла D_1 (рис. 2). Пусть эта поверхность проходит через первый октант пространства $u, v, w(x, y, z)$ выше плоскости $u=0$. Тогда на сепаратрисной поверхности в некоторой достаточно малой окрестности точки $D_1(0, 0, 0)$ в первом октанте должны выполняться неравенства $\dot{u} < 0$, $\dot{v} < 0$, $\dot{w} < 0$. Как видно из (18), правая часть уравнения для \dot{u} меняет знак при $u = [w - (am/n)v] / (1 - bw)$. При малых w знаменатель положителен, и знак дроби меняется на плоскости $w = (am/n)v$, а именно при $w > (am/n)v$ $\dot{u} > 0$, что не может иметь места на сепаратрисной поверхности. Отсюда, принимая во внимание аналитичность сепаратрисной поверхности, заключаем, что она совпадает с плоскостью $u=0$. Таким образом, ни одна траектория системы (6) из конечной части первого октанта не идет в состояние равновесия D_1 .

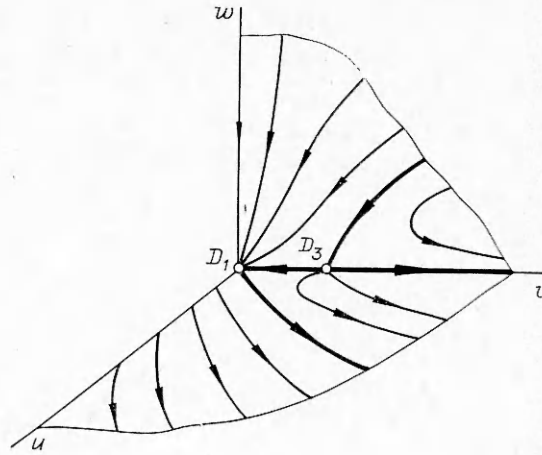


Рис. 2.

Исследуем точку D_2 . Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = m$, $\lambda_3 = n + m - 1$.

1) При $n + m > 1$ в бесконечности первого октанта нет состояния равновесия C_2 . Точка D_2 будет неустойчивым узлом.

2) При $n + m < 1$ D_2 — седло с неустойчивой сепаратрисной поверхностью, совпадающей с плоскостью $w=0$.

3) В случае $n + m = 1$ состояния равновесия D_2 и C_2 сливаются, образуя седло-узел с неустойчивой сепаратрисной поверхностью.

Рассмотрим, как расположена относительно первого октанта O^+ -сепаратриса седла D_2 , идущая из конечной части фазового пространства. Точка $(n/a, 0)$ системы (20) — седло, одна из сепаратрис которого является сепаратрисой седла D_2 (см. рис. 2). Таким образом, сепаратриса седла D_2 лежит в плоскости $u=0$ и не попадает в первый октант.

Рассмотрим еще одну точку в бесконечности — «конец» оси z . Воспользуемся для этого третьим преобразованием переменных [20]

$$z = 1/u, \quad x = v/u, \quad y = w/u.$$

Система (6) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u^2 + nuv + miv - u^3, \\ \dot{v} &= av + nv^2 - buv + (m-1)v\omega - u^2v, \\ \dot{w} &= -(am/n)\omega + m\omega^2 + (n+1)v\omega + buv - u^2\omega. \end{aligned}$$

Плоскости $u=0$ и $v=0$ — интегральные плоскости этой системы. Можно показать, что представляющая интерес точка $E(0, 0, 0)$ — четнократное состояние равновесия «типа С» [19]. На плоскости u, w поведение траекторий определяется системой $\dot{u} = u^2 + miw - u^3$, $\dot{w} = -(am/n)\omega + m\omega^2 - u^2\omega$, для которой прямые $u=0$ и $w=0$ будут интегральными прямыми. Точка $(0, 0)$ этой системы — седло-узел с седловой областью и O^- -сепаратрисой при $u > 0$ и узловой областью при $u < 0$. Следовательно, полуплоскость $u < 0$ на плоскости u, w является O^+ -полуповерх-

ностью состояния равновесия E , которая не проходит в конечной части первого октанта. Таким образом, доказано, что бесконечность фазового пространства системы (6) абсолютно неустойчива, так как ни одна траектория из первого октанта не идет в бесконечность.

Чтобы получить представление о характере фазового пространства системы (6) в области \mathcal{F} необходимо кроме исследования бесконечности выяснить также, как ведут себя траектории на ограничивающих область \mathcal{F} координатных плоскостях.

Плоскость $x=0$ — интегральная плоскость системы (6). Поскольку при $z=0$ $\dot{z}>0$, а при $y=0$ и $x>0$ $\dot{y}>0$, то плоскости $y=0$ и $z=0$ являются поверхностями без контакта; фазовые траектории пересекают эти поверхности, входя внутрь области \mathcal{F} . Поэтому траектории, расположенные в первом октанте, остаются в нем все время.

Для однозначного определения характера фазового пространства предполагается, что оно не содержит каких-либо предельных множеств, кроме состояний равновесия и предельных множеств, родившихся из состояний равновесия. Отсутствие замкнутых интегральных поверхностей, предельных для траекторий системы, можно показать при помощи критерия, полученного в [22]. Взяв функцию $F=1/(xyz)$, можно убедиться, что $\partial/\partial x(PF) + \partial/\partial y(QF) + \partial/\partial z(RF) = -b/(zy^2) - 1/(xyz^2) < 0$, т. е. сохраняет знак в исследуемой области.

Рассмотрим возможные типы картины в фазовом пространстве системы (6).

При выполнении неравенства $a < 1+b$ устойчивый узел $A(0, 0, 1)$ — единственный элемент притяжения всех фазовых траекторий. Физическую сущность этого можно истолковать, обратившись к формулам (5) и (7), объясняющим смысл переменных и параметров. После перехода к исходным параметрам неравенство $a < 1+b$ примет вид $q > (k_1 C_{A0} - k_4) V$. Следовательно, для достаточно большой скорости подачи при любых начальных условиях устанавливается стационарное состояние, соответствующее прекращению реакций.

При $a > 1+b$ и выполнении неравенств (11) или (12) единственный элемент притяжения фазовых траекторий — состояние равновесия. Соответствующее ему стационарное состояние устанавливается при любых начальных условиях, причем в случае выполнения неравенств (12) процесс установления будет носить колебательный характер.

Если состояние равновесия C является седло-фокусом или седлом (выполнение неравенств (13) или (14)), система имеет некоторое ω -предельное множество, к которому стремятся все траектории, выходящие

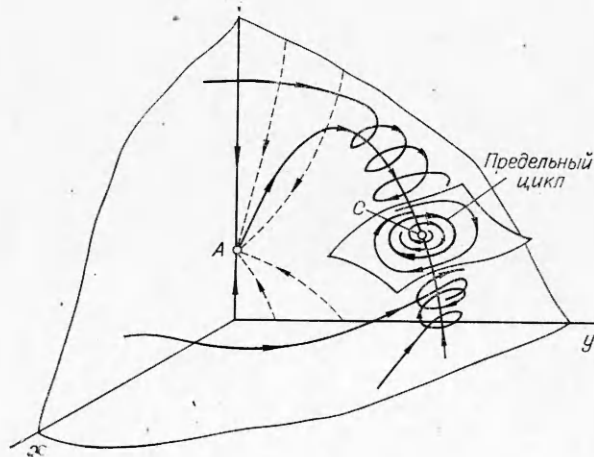


Рис. 3.

из неустойчивых состояний равновесия и из бесконечности и входящие в первый октант. Для выяснения характера ω -предельного множества с помощью ЭВМ было вычислено значение первой ляпуновской величины α_3 на бифуркационной поверхности $pq-r=0$ для точки C по формуле [23], которая не приводится ввиду ее громоздкости. Вычисления показали, что $\alpha_3 < 0$. Следовательно, при переходе через поверхность $pq-r=0$ устойчивый фокус системы (6) стано-

вится сложным и превращается в седло-фокус с неустойчивой сепаратрисной поверхностью, порождая единственный устойчивый предельный цикл. Этот цикл — ω -предельное множество для рассматриваемой системы. При изменении параметров в обратном направлении устойчивый предельный цикл стягивается в состояние равновесия, которое становится устойчивым фокусом.

На рис. 3 изображено фазовое пространство после рождения предельного цикла, когда в системе осуществляются автоколебания.

Проведенное исследование показало, что при $b=0$, т. е. при отсутствии реакции (3), модель сохраняет автоколебательный характер. Отличие модели при $b=0$ от исследованной в данной работе состоит в возможности существования (при $a>1$) состояния равновесия B на плоскости $y=0$. При $a < m+n+1$ это состояние равновесия является устойчивым узлом и элементом притяжения всех фазовых траекторий, т. е. отвечает стационарному состоянию, устанавливающемуся после полного выгорания вещества Y .

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
26/VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Докл. АН СССР, 1939, 25, 672.
2. A. J. Lotka. J. Am. Chem. Soc., 1920, 42, 1595.
3. A. D. Walsh. Trans. Faraday Soc., 1947, 43, 305.
4. J. A. Gray. J. Chem. Soc., 1953, 741.
5. Б. Льюис, Г. Эльбе. Горение, пламя и взрывы в газах. М., «Мир», 1968.
6. A. J. Lotka. Proc. Nat. Acad., 1920, 6, 410.
7. В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. М., «Наука», 1976.
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
9. Д. А. Франк-Каменецкий, И. Е. Сальников. ЖФХ, 1943, 17, 79.
10. Ю. Г. Герварт, Д. А. Франк-Каменецкий. Изв. АН СССР, ОХН, 1942, 210.
11. А. М. Жаботинский. Концентрационные автоколебания. М., «Наука», 1974.
12. В. F. Gray, C. H. Gang. Comb. and Flame, 1969, 13, 20.
13. В. F. Gray. Comb. and Flame, 1970, 14, 273.
14. A. Perche, A. Perez, M. Lucquin. Comb. and Flame, 1970, 15, 89.
15. P. E. De Rooy, D. M. Mason. Comb. and Flame, 1971, 17, 107.
16. P. E. De Rooy, D. M. Mason. Comb. and Flame, 1973, 20, 127.
17. Д. А. Франк-Каменецкий ЖФХ, 1940, 14, 30.
18. Б. В. Вольтер, И. Е. Сальников. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М., «Химия», 1972.
19. Р. М. Минц. Матем. сборник, 1964, 63(105), 169.
20. Р. М. Минц. Памяти А. А. Андропова (сборник). М., Изд-во АН СССР, 1955.
21. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., «Наука», 1966.
22. В. С. Медведев. Дифференциальные уравнения, 1970, 6, 454.
23. Н. Н. Баутин. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.—М., Гостехиздат, 1949.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ЗАЖИГАНИЯ БЕЗГАЗОВЫХ СИСТЕМ ВОЛНОЙ ГОРЕНИЯ

А. Г. Струнина, Н. И. Ваганова, В. В. Барзыкин

Инициирование реакции безгазовой системы тепловой волной горящего воспламенителя, находящегося с нею в контакте, теоретически проанализировано в работе [1] и в дальнейшем экспериментально опробовано на модели термитных систем [2]. Эти исследования в основном ка-