УДК 620.178.6

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ТЕЛ ИЗ ОДНОРОДНОГО И НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛОВ С ТРЕЩИНОЙ

В. М. Тихомиров

Сибирский государственный университет путей сообщения, 630049 Новосибирск, Россия
E-mail: twm@stu.ru

На основе результатов анализа асимптотических решений задач о деформировании однородного тела с разрезом и пластины с трещиной, расположенной на границе раздела двух сред, разработаны алгоритмы определения коэффициента интенсивности напряжений. Предложенные алгоритмы применены для расчета коэффициентов интенсивности напряжений с использованием результатов численного решения задач о нагружении различных плоских и пространственных однородных тел с трещинами, а также пластины с трещиной, расположенной на границе раздела двух упругих сред. Показано, что результаты расчета хорошо согласуются с данными, полученными другими методами.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, трещина на границе раздела двух сред, асимптотическое решение, метод конечных элементов.

DOI: 10.15372/PMTF20200114

Введение. Анализ напряженно-деформированного состояния тела с разрезом является одной из основных задач линейной механики разрушения. Из решения задач для изотропных сред [1] следует, что вблизи вершины трещины поле напряжений имеет корневую особенность $O(r^{-1/2})$, где r — полярный радиус точки, лежащей на нормали к фронту трещины. Универсальной характеристикой такого сингулярного распределения напряжений является коэффициент интенсивности напряжений (КИН) [2]. В общем случае выделяются три независимых КИН, которые соответствуют трем типам перемещений берегов трещины: нормальный отрыв ($K_{\rm I}$), поперечный сдвиг ($K_{\rm II}$) и продольный сдвиг ($K_{\rm III}$).

Способы определения КИН можно разделить на три основные группы: аналитические, экспериментальные и вычислительные. Аналитические решения получены для ограниченного класса осесимметричных и плоских задач. В экспериментах и при численном решении определяются различные величины: перемещения, напряжения, энергия. Например, в работах [3–5] с использованием экспериментальных интерференционно-оптических методов определяются напряжения или перемещения в окрестности трещины, которые затем аппроксимируются аналитическими решениями для пространственных или плоских тел с разрезами [6, 7].

В настоящее время наиболее развитыми являются вычислительные алгоритмы, основанные на использовании методов конечных элементов, граничных элементов или граничных интегральных уравнений. Например, при анализе напряженно-деформированного состояния тела с трещиной методом конечных элементов вследствие сингулярного характера распределения напряжений более точно определяются значения перемещений и контурный J-интеграл [8]. Поэтому в вычислительных комплексах (ANSYS, COSMOS/M, NASTRAN и др.) используются процедуры определения КИН по этим величинам [9]. В специальных программных блоках использован алгоритм аппроксимации перемещений поверхности разреза, моделирующего трещину, асимптотическим решением [2], полученным только для плоского напряженного состояния или состояния плоской деформации. В работе [10] поле перемещений в окрестности трещины предложено описывать решением задачи для осесимметричного тела с математическим разрезом.

В свою очередь, распределение напряжений не зависит от степени стеснения деформации вдоль ее фронта. Следовательно, характеристики поля напряжений в окрестности трещины можно использовать при определении КИН как для тела с трещиной, изготовленного из однородного материала, так и для тела с трещиной на границе двух упругих сред.

В данной работе исследуется возможность применения асимптотического представления напряженного состояния в окрестности трещины для независимого определения коэффициента интенсивности напряжений трех типов.

1. Трещина в однородном теле. Рассмотрим решение задачи о деформировании однородного изотропного тела с трещиной [11]. В плоскости, перпендикулярной трещине (рис. 1), на линии $\theta = 0$ зависимость компонент напряжений от полярного радиуса точки r имеет следующий вид:

— для трещины нормального отрыва

$$\sigma_{yy} = K_{\mathrm{I}}(2\pi r)^{-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{yyn} r^{(2n-1)/2}, \quad \sigma_{xx} = K_{\mathrm{I}}(2\pi r)^{-1/2} + \sigma_{xx}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{xxn} r^{n/2},$$
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0; \tag{1}$$

— для трещины поперечного сдвига

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = 0, \qquad \sigma_{xy} = K_{\mathrm{II}}(2\pi r)^{-1/2} + \sigma_{xy}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{xyn} r^{(2n-1)/2}; \tag{2}$$

— для трещины продольного сдвига

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \qquad \sigma_{yz} = K_{\mathrm{III}}(2\pi r)^{-1/2} + \sigma_{yz}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{yzn} r^{(2n-1)/2}. \tag{3}$$

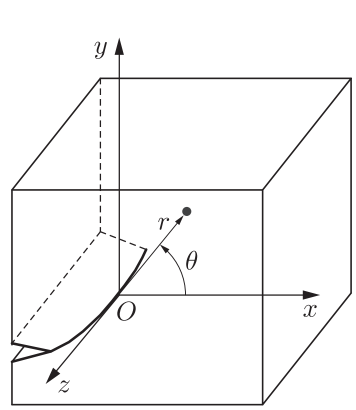

Рис. 1. Схема расположения трещины и система координат

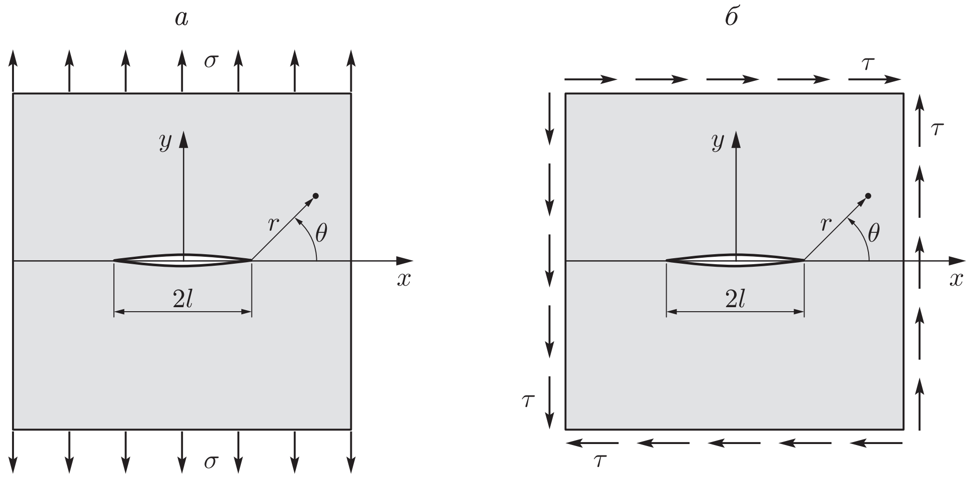

Рис. 2. Расчетные схемы плоских задач:
а — растяжение, *б* — чистый сдвиг

В выражения для напряжений σ_{yy}, σ_{xy}, σ_{yz} входит только один из трех КИН: $K_{\rm I}$, $K_{\rm II}$, $K_{\rm III}$ соответственно. Это позволяет независимо определить данные величины при произвольном нагружении тела с трещиной.

Если в формулах (1)–(3) ограничиться первыми членами ряда, то выражения для компонент напряжений, умноженных на величину $r^{1/2}$, можно представить в следующем виде:

$$p_i r^{1/2} = K_i (2\pi)^{-1/2} + a_{pi} r, \qquad i = {\rm I}, {\rm II}, {\rm III}.$$

Здесь $p_{\rm I} = \sigma_{yy}$; $p_{\rm II} = \sigma_{xy}$; $p_{\rm III} = \sigma_{yz}$.

Принимая линейную аппроксимацию поля напряжений в окрестности трещины

$$p_i r^{1/2} = A_i + B_i r, \tag{4}$$

можно определить КИН

$$K_i = A_i (2\pi)^{1/2}, \qquad i = {\rm I}, {\rm II}, {\rm III}. \tag{5}$$

Аналогичный подход используется при расчете КИН по значениям перемещений поверхности трещины [9].

Оценим размеры области в окрестности вершины трещины, где различие приближенного решения, полученного на основе линейной аппроксимации, и точного решения невелико. Рассмотрим задачи о растяжении и чистом сдвиге бесконечной пластины с центральным разрезом длиной $2l$ (рис. 2).

На линии продолжения разреза ($y = 0$) как при растяжении, так и при сдвиге получаем одно и то же распределение напряжений [6]

$$p(r) = p \, \frac{r + l}{(r^2 + 2rl)^{1/2}}. \tag{6}$$

Здесь $p(r)$ — нормальные напряжения σ_{yy} при растяжении пластины и касательные напряжения σ_{xy} при ее сдвиге; $p = \sigma$ — нормальные напряжения в задаче о растяжении, $p = \tau$ — касательные напряжения в задаче о сдвиге; σ, τ — напряжения, действующие на достаточно большом расстоянии от разреза.

Представим функцию $p(r)$ в безразмерном виде

$$s = \frac{p(r)}{p} \Big(\frac{2r}{l}\Big)^{1/2} = \Big(1 + \frac{r}{l}\Big)\Big(1 + \frac{r}{2l}\Big)^{-1/2}$$

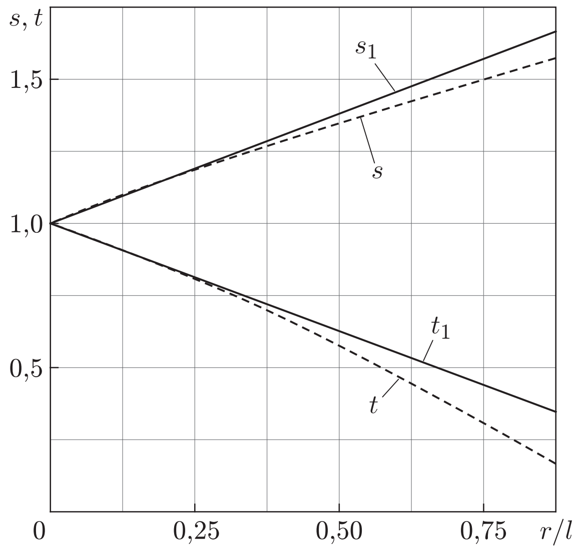

Рис. 3. Приближенное (s_1, t_1) и точное (s, t) распределения напряжений для плоской (s, s_1) и пространственной (t, t_1) задач

и разложим ее в ряд:

$$s = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{3n-4}} \Big(\frac{r}{l}\Big)^{n-1}.$$

Если ограничиться первым членом, то получаем линейное приближение теоретического распределения напряжений

$$s_1 = 1 + 3r/(4l).$$

На рис. 3 представлены графики функций s и s_1.

Решением задачи о кручении цилиндра с кольцевым вырезом является распределение касательных напряжений σ_{yz} по диаметру неповрежденной части цилиндра [6]

$$\sigma_{yz} = \frac{3}{8}\,\tau_0\,\frac{l-r}{(2lr - r^2)^{1/2}} \qquad (0 \leqslant r \leqslant l).$$

Для безразмерного напряжения получаем формулу

$$t = \frac{8\sigma_{yz}}{3\tau_0}\Big(\frac{2r}{l}\Big)^{1/2} = \Big(1 - \frac{r}{l}\Big)\Big(1 - \frac{r}{2l}\Big)^{-1/2}.$$

Здесь $\tau_0 = 2M/(\pi l^3)$ — номинальное касательное напряжение, соответствующее крутящему моменту M; l — радиус неповрежденной части цилиндра.

С помощью преобразований, выполненных при анализе плоских задач, получаем приближенное линейное представление функции t

$$t_1 = 1 - 3r/(4l).$$

На рис. 3 представлены распределения напряжений t и t_1 в круговом цилиндре с кольцевым вырезом, соответствующие аналитическому решению и решению на основе линейной аппроксимации.

Следует отметить, что при $r < 0{,}5l$ различие приближенного решения на основе линейной аппроксимации и точного решения не превышает 2,5 %. Таким образом, при однородном нагружении тела с разрезом коэффициент A в формуле (4) с достаточной точностью

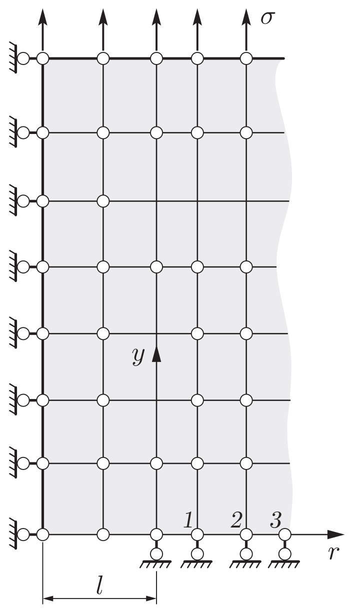

Рис. 4

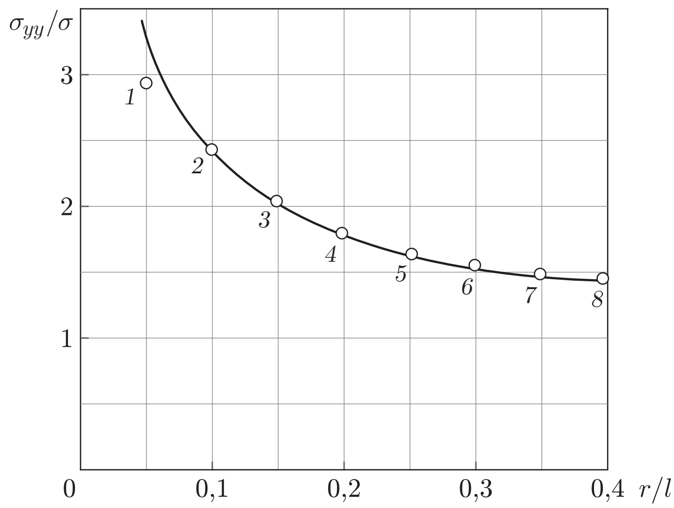

Рис. 5

Рис. 4. Расчетная схема:
1–3 — номера узлов

Рис. 5. Распределение напряжения на линии разреза:
сплошная линия — расчет по формуле (6), точки — расчет с использованием метода конечных элементов (*1–8* — номера узлов)

можно определить по значениям напряжений, действующих в точках, расположенных на линии продолжения трещины на расстоянии от ее вершины, не превышающем $0{,}5l$.

Используем алгоритм определения КИН по значениям напряжений, полученным с помощью метода конечных элементов, при решении задачи о растяжении пластины с центральным разрезом длиной $2l$, расположенным перпендикулярно действующим напряжениям σ (см. рис. 2).

На рис. 4 представлена конечно-элементная схема. Размер конечного элемента в окрестности вершины разреза равен $0{,}05l$, ширина и высота пластины — $20l$. На рис. 5 показаны распределения напряжений σ_{yy}/σ.

Большая погрешность расчета напряжений наблюдается только в первом узле конечно-элементной сетки при $r = 0{,}05l$. Аналогичные результаты получены при других размерах конечного элемента. Поэтому для определения постоянной A в линейном приближении (4) целесообразно использовать значения напряжений во втором и третьем узлах сетки на линии продолжения трещины (см. рис. 4). В результате расчета (см. рис. 4) получен коэффициент $A = 0{,}71\sigma\sqrt{l}$. Следовательно, согласно формуле (5) КИН равен $K_{\rm I} = 1{,}779\sigma\sqrt{l}$. Это значение отличается от теоретического значения $K_{\rm I} = \sigma\sqrt{\pi l} = 1{,}772\sigma\sqrt{l}$ на 0,4 %.

В таблице приведены результаты расчета, полученные с использованием предложенного алгоритма и алгоритма определения КИН по значениям перемещения поверхности разреза [9] при численном решении различных задач (K/K_t — отношение расчетного значения КИН к теоретическому, которое определялось по данным [12]). Для пространственных тел с криволинейной трещиной положение расчетной точки определялось угловой координатой φ (рис. 6).

Значения КИН, полученные с помощью численных алгоритмов и справочных данных

Задача	Вид нагружения (тип трещины)	K/K_t	
		Расчет по напряжениям (формула (4))	Расчет по перемещениям [9]
Растяжение пластины с центральным разрезом	Растяжение (K_{I})	0,993	0,959
Двухосное растяжение пластины с дугообразным разрезом	Двухосное растяжение:		
	K_{I}	0,889	0,964
	K_{II}	0,866	0,843
Деформирование цилиндра с дисковым разрезом, перпендикулярным его оси	Растяжение (K_{I})	0,973	0,989
	Сдвиг по оси x (K_{II}) при $\varphi = 0$	0,914	0,948
	Растяжение сосредоточенными силами, приложенными к берегам разреза на расстоянии $0{,}5l$ (K_{I}):		
	$\varphi = 0$	0,982	0,955
	$\varphi = \pi/2$	0,975	0,939
	$\varphi = \pi$	1,005	0,976
Изгиб плиты с полукруглой трещиной, выходящей на поверхность	Изгиб (K_{I}):		
	$\varphi = 0$	1,020	1,008
	$\varphi = \pi/2$	0,877	0,958
Кручение цилиндра с внешним радиальным разрезом	Кручение (K_{III})	0,975	1,003

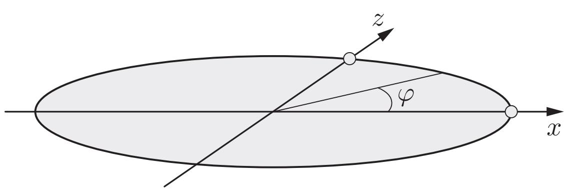

Рис. 6. К определению положения точек на берегу криволинейной трещины

Результаты, представленные в таблице, показывают, что погрешность определения КИН по известным напряжениям сопоставима с погрешностью вычислений по другим методикам.

2. Трещина на границе раздела двух упругих сред. Рассмотрим бесконечную пластину с разрезом, расположенным на границе двух бесконечных полуплоскостей из материалов с различными упругими характеристиками: коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 и модулями сдвига G_1, G_2. На достаточно большом расстоянии от разреза пластина нагружена нормальными σ и касательными τ напряжениями (рис. 7).

Асимптотическое решение данной задачи можно представить в комплексной форме [13]

$$(\sigma_{yy} + i\sigma_{xy})\big|_{\theta=0} = (K_{\mathrm{I}} + iK_{\mathrm{II}})(r/l)^{ia}(2\pi r)^{-1/2}, \tag{7}$$

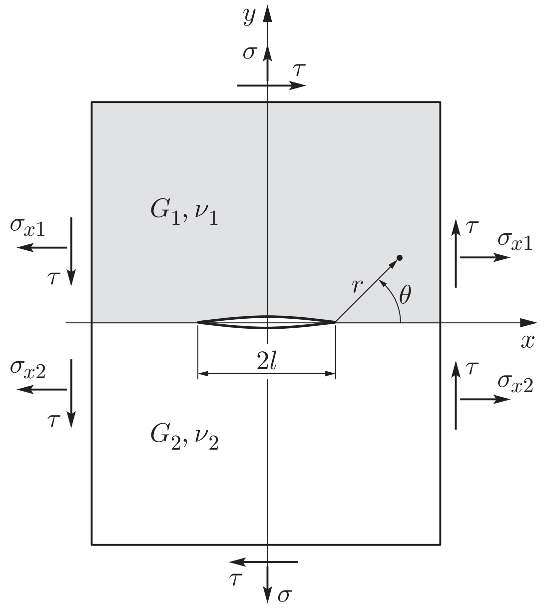

Рис. 7. Схема пластины с трещиной на границе раздела двух сред

где $a = (2\pi)^{-1} \ln ((G_2\varkappa_1 + G_1)/(G_1\varkappa_2 + G_2))$; $\varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ в случае плоской деформации, $\varkappa_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1 + \nu_{1,2})$ в случае плоского напряженного состояния; l — полудлина трещины.

Из выражения (7) следует

$$(\sigma_{yy})\big|_{\theta=0} = K_{\rm I}(2\pi r)^{-1/2} \cos [a \ln (r/l)] - K_{\rm II}(2\pi r)^{-1/2} \sin [a \ln (r/l)],$$
$$(\sigma_{xy})\big|_{\theta=0} = K_{\rm II}(2\pi r)^{-1/2} \cos [a \ln (r/l)] + K_{\rm I}(2\pi r)^{-1/2} \sin [a \ln (r/l)].$$

В отличие от случая однородного материала в данном случае КИН $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$ нельзя связать только с одной компонентой тензора напряжений:

$$\begin{aligned} K_{\rm I} &= (2\pi r)^{1/2} \{(\sigma_{yy})\big|_{\theta=0} \cos [a \ln (r/l)] + (\sigma_{xy})\big|_{\theta=0} \sin [a \ln (r/l)]\}, \\ K_{\rm II} &= (2\pi r)^{1/2} \{(\sigma_{xy})\big|_{\theta=0} \cos [a \ln (r/l)] - (\sigma_{yy})\big|_{\theta=0} \sin [a \ln (r/l)]\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Для случая плоского напряженного состояния пластины (см. рис. 7) вычислим $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$, используя соотношения (8) и численное решение, полученное методом конечных элементов, при следующих параметрах задачи: $\tau = 0$, $G_2/G_1 = 0{,}1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, высота и ширина пластины — $20l$, размер конечного элемента в окрестности вершины разреза — $0{,}025l$. В этом случае на границе раздела двух сред при $y = 0$ должно быть выполнено условие совместности деформаций $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2}$. Для этого пластину необходимо нагрузить дополнительными напряжениями σ_{x1} и σ_{x2} (см. рис. 7). В соответствии с результатами работы [13]

$$\sigma_{x2} = \frac{G_2}{G_1}\, \sigma_{x1} + \Big(\nu_2 - \frac{G_2}{G_1}\, \nu_1\Big)\sigma.$$

Следовательно, при $\sigma_{x1} = 0$ $\sigma_{x2} = 0{,}27\sigma$.

На рис. 8 представлены результаты расчета КИН с использованием метода конечных элементов при $y = 0$ в области $0{,}025l < r < 0{,}350$ ($k_{\rm I} = K_{\rm I}/K_0$, $k_{\rm II} = K_{\rm II}/K_0$ — безразмерные КИН; $K_0 = \sigma(\pi l)^{1/2}$). Следует отметить, что при $0{,}05l < r < 0{,}35l$ функции $k_{\rm I}$ и $k_{\rm II}$ практически линейны.

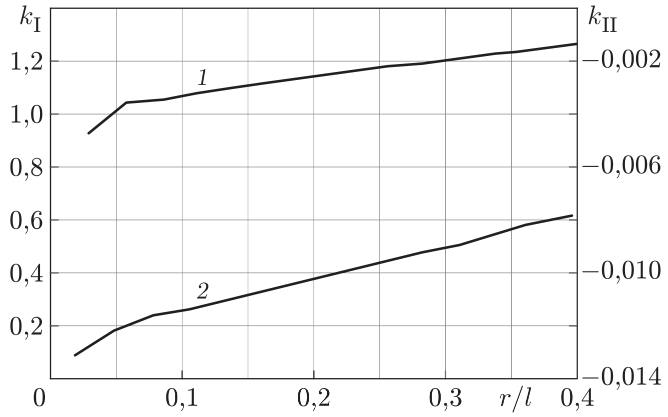

Рис. 8. Результаты расчета КИН k_{I} (*1*) и k_{II} (*2*) с использованием метода конечных элементов

Таким образом, в некоторой окрестности вершины трещины можно правые части выражений (8) представить в виде линейных функций

$$K_{\text{I}}(r) = A_{\text{I}} + B_{\text{I}} r, \qquad K_{\text{II}}(r) = A_{\text{II}} + B_{\text{II}} r,$$

а значения КИН определять путем экстраполяции в вершину разреза:

$$K_{\text{I}} = A_{\text{I}}, \qquad K_{\text{II}} = A_{\text{II}}.$$

Экстраполируя данные, представленные на рис. 7, получаем $K_{\text{I}} = 1{,}0021\sigma\sqrt{\pi l}$, $K_{\text{II}} = -0{,}1248\sigma\sqrt{\pi l}$. Сравним эти результаты с аналитическими значениями КИН, полученными в [14]:

$$K_{\text{I}}^{\text{т}} = \{\sigma[\cos(a\ln 2) + 2a\sin(a\ln 2)] + \tau[\sin(a\ln 2) - 2a\cos(a\ln 2)]\}\sqrt{\pi l},$$
$$K_{\text{II}}^{\text{т}} = \{\tau[\cos(a\ln 2) + 2a\sin(a\ln 2)] - \sigma[\sin(a\ln 2) - 2a\cos(a\ln 2)]\}\sqrt{\pi l}.$$

В рассматриваемом случае получаем значение $K_{\text{I}}^{\text{т}} = 1{,}0129\sigma\sqrt{\pi l}$, отличие которого от расчетного КИН составляет 1 %. Отличие значения $K_{\text{II}}^{\text{т}} = -0{,}1300\sigma\sqrt{\pi l}$ от расчетного КИН равно 4 %. Увеличив размер конечного элемента в окрестности вершины трещины до $0{,}05l$, получаем $K_{\text{I}} = 1{,}0013\sigma\sqrt{\pi l}$ (погрешность — 8 %), $K_{\text{II}} = -0{,}1161\sigma\sqrt{\pi l}$ (погрешность — 11 %).

Для того чтобы результаты расчетов КИН соответствовали аналитическому решению задачи о деформировании тела с трещиной на границе двух сред, необходимо использовать конечно-элементную сетку в сингулярной области с размером конечного элемента менее $0{,}05l$.

Заключение. В работе проведен анализ асимптотических решений для случаев однородного тела с разрезом и неоднородной пластины с трещиной, расположенной на границе раздела двух сред. Распределение напряжений на линии продолжения трещины в окрестности ее вершины представлено в виде линейной функции полярного радиуса точки. На основе проведенного анализа разработан алгоритм независимого определения коэффициента интенсивности напряжений трех типов. Из результатов численного решения задачи о деформировании плоских и пространственных тел с трещиной следует эффективность использования этого алгоритма.

Проведено сравнение результатов, полученных с использованием распределения напряжений в окрестности вершины трещины, и результатов, полученных с помощью других методик. Результаты сравнения подтверждают достоверность предложенных алгоритмов определения коэффициента интенсивности напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Williams M. L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. P. 526–528.
2. **Черепанов П. Г.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. **Тихомиров В. М., Тырин В. П.** Использование метода рассеянного света для определения коэффициента интенсивности напряжений K_{III} в трехмерных задачах // ПМТФ. 1990. № 3. С. 167–170.
4. **Тихомиров В. М.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом фотоупругости в трехмерных задачах механики разрушения // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2004. № 2. С. 94–100.
5. **Тырин В. П.** Применение метода голографической интерферометрии для определения коэффициента интенсивности напряжений // ПМТФ. 1990. № 1. С. 155–158.
6. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.: ОГИЗ, 1947.
7. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975.
8. **Морозов Е. М.** Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. М.: Наука, 1980.
9. **Морозов Е. М.** ANSYS в руках инженера: Механика разрушения / Е. М. Морозов, А. Ю. Муйземнек, А. С. Шадский. М.: Ленанд, 2008.
10. **Тихомиров В. М.** Определение коэффициентов интенсивности напряжений в трехмерных задачах механики разрушения // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 5. С. 172–180.
11. **Вычислительные** методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990.
12. **Мураками Ю.** Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. М.: Мир, 1990.
13. **Sih G. C., Rice J. R.** The bending of plates of dissimilar materials with cracks // J. Appl. Mech. 1964. V. 31. P. 477–482.
14. **Rice J. R., Sih G. C.** Plane problems of cracks in dissimilar media // J. Appl. Mech. 1965. V. 32. P. 418–423.

Поступила в редакцию 8/VII 2019 г.,
после доработки — 26/VII 2019 г.
Принята к публикации 26/VIII 2019 г.