

В. А. Тартаковский, Ю. Н. Исаев, В. Д. Несветайло,
Ю. В. Волков, В. Н. Попов

(Томск)

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
РАДИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ГОДИЧНЫХ КОЛЕЦ ДЕРЕВЬЕВ**

Представлена математическая модель годичных колец в форме интерференционной картины, позволяющая ретроспективно восстановить радиальный рост дерева непрерывно в течение вегетационного периода. Изменения плотности древесины вдоль радиуса диска дерева рассматриваются как некоторое колебание, фаза которого является строго возрастающей функцией радиуса. Радиальный рост определен как монотонная функция времени, обратная по отношению к фазе. На основе свойства дисперсионной причинности разработаны алгоритмы анализа модели. Приводятся экспериментальные результаты.

Введение. Дерево как биологический объект находится в тесной взаимосвязи с окружающей средой. В конкретном биоценозе в некотором диапазоне значений параметров окружающей среды реакции различных организмов на качество этой среды совпадают. Для дерева и человека этот тезис подтвержден исторически.

Древесные растения реагируют на сезонные изменения внешних условий изменением процессов роста, при этом размеры клеток древесины и скорость их образования могут возрастать и убывать. В начале сезона роста образуется более рыхлая ранняя древесина, к концу сезона – более плотная поздняя древесина, таким способом формируются годичные кольца. Они наиболее выражены у хвойных деревьев, произрастающих в умеренном климате (рис. 1).

Более быстрые вариации погоды на фоне сезонных изменений также приводят к более тонким изменениям в структуре годичных колец. Интерес к этой информации существенно возрос в последнее время в связи с развивающейся неустойчивостью климата. Однако известные методы измерения радиального роста дерева

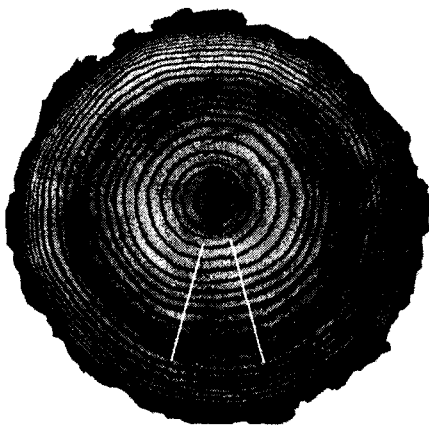


Рис. 1. Диск лиственницы. Светлыми линиями выделен сектор, из которого выбирались сечения для анализа. Диаметр диска около 110 мм

трудоемки. В пределах вегетационного периода с одного дерева необходимо отбирать образцы, число которых не может быть большим. При этом качество полученной реализации определяется только по завершении роста, поэтому существуют проблемы формирования однородной выборки с достаточным объемом [1, 2].

В годичных кольцах содержится интегральная информация о качестве жизни, чего не обеспечивают физические методы измерения параметров окружающей среды. Последние могут с высокой точностью определять концентрации веществ, интенсивность излучения, скорости движения, температуру и т. д., однако живому организму важно их оптимальное сочетание, что и фиксирует дерево как биоиндикатор.

Исследование морфологии годичных колец во взаимосвязи с состоянием окружающей среды в конкретные годы является одним из предметов дендрохроноиндикации. Прогресс в этой области науки в значительной мере связан с развитием математического описания структуры годичных колец. В работе приводится математическая модель, изложены методы ее анализа с привлечением оптических аналогий, описаны результаты натурального эксперимента.

Обоснование математической модели. Рассматривая диск дерева на рис. 1 или его радиальное сечение на рис. 2, *a*, можно предположить, что функция плотности древесины в сечении $R(\rho)$ представляет собой колебательный процесс, период которого не постоянен. Плотность древесины резко изменяется в конце каждого периода, на границе между поздней и ранней древесиной. Эти скачки плотности фиксируют время τ при данных значениях ρ . Фактически на радиус нанесены временные реперы.

Примем во внимание фундаментальные свойства радиального роста дерева. Радиус дерева не может убывать, он возрастает во времени τ и только с конечной скоростью. Стало быть, функция роста $\rho(\tau)$ является монотонной и имеет ограниченную производную. По этой причине обратная ей функция $\tau(\rho)$ также монотонна и, более того, она является строго возрастающей функцией.

Из экспериментальных данных рис. 1 и 2 следует, что сечение $R(\rho)$ содержит шумы аддитивно основному колебанию. Импульсный шум $h(\rho)$ вызван главным образом недостаточной чистотой обработки поверхности диска. Этот шум практически отсутствует в области временных реперов. Имеется низкочастотный шум $l(\rho)$, связанный с наличием функционально-возрастных зон на диске, ядра и заболони. Кроме того, присутствует низкочастотная амплитудная модуляция $a(\rho)$ основного колебания.

Проведенных наблюдений достаточно для записи математической модели радиального сечения годичных колец в виде положительной суммы шумов и действительного колебания $U(\rho)$, модулированного по амплитуде и фазе:

$$R(\rho) = 1 + U(\rho) + h(\rho) + l(\rho) > 0, \quad U(\rho) = a(\rho) \cos \varphi(\rho), \quad (1)$$

$$a(\rho) = 1 + \mu(\rho) > 0, \quad \varphi(\rho) = 2\pi\tau(\rho)/T.$$

Здесь T есть длительность вегетационного периода, а функции $a(\rho)$ и $\varphi(\rho)$ имеют смысл амплитуды и фазы колебания $U(\rho)$ соответственно. При этом фаза рассматривается как полезный сигнал.

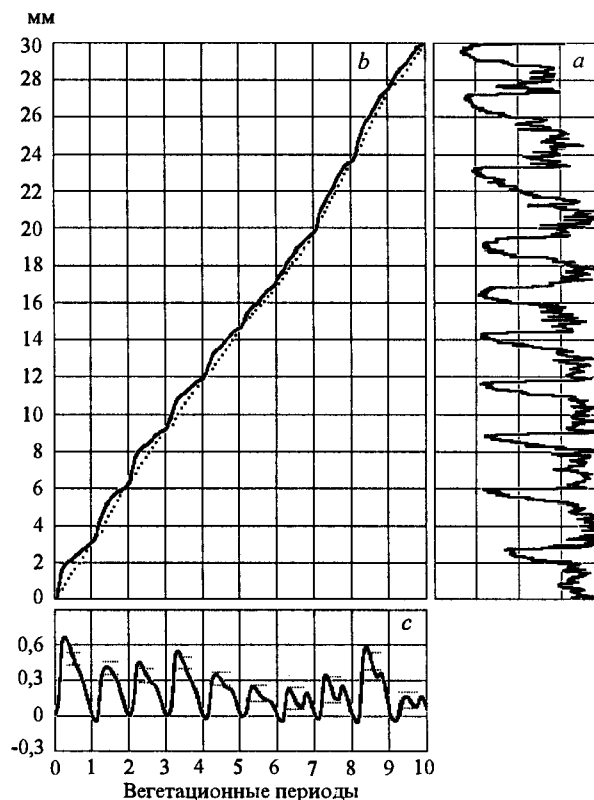


Рис. 2. Восстановление сезонных вариаций радиального роста дерева: радиальное сечение диска дерева $R(\rho)$ в относительных единицах из сектора на рис. 1, показаны десять годовичных колец (а); восстановленный радиальный рост $\rho(\tau)$ (сплошная кривая), кусочно-линейная аппроксимация роста (точечная кривая) (b); оценка сезонных вариаций радиального роста $\langle \delta\rho(\tau) \rangle$ (точками показан доверительный интервал для полугодия) (c)

Функция $R(\rho)$ формируется биологическим объектом под влиянием внешней среды и имеет вид интерференционной картины. Естественно предположить, что она является результатом взаимодействия некоторых комплексных полей: биологического и экологического. В этой связи полезны дендрооптические аналогии для определения функций, составляющих модель. Поэтому будем развивать методы, применяемые в интерферометрии.

В данном случае представляет интерес функция роста $\rho(\tau)$, которая определяет время появления каждой клетки дерева на исследуемом радиусе в процессе вегетации, т. е. для всех значений ρ в интервале между реперами. Для восстановления функции роста следует найти из выражения (1) фазу $\phi(\rho)$, а затем обратную ей функцию

$$\rho(\tau) = \tau^{-1} [T\phi / 2\pi]. \quad (2)$$

Неизвестная фаза вместе с амплитудой составляет функцию $U(\rho)$, для их выделения необходимы некоторые конструктивные предпосылки, которые вместе с алгоритмами их реализации рассмотрены далее.

Алгоритм восстановления фазы. В общем случае для представления колебания в виде двух величин (амплитуды и фазы) требуется непротиворечивое определение этих понятий. Уравнения, описывающие колебательные процессы различной физической природы, такого определения не содержат. Поэтому предлагается конкретизировать свойства колебательного процесса в целом так же, как его амплитуды и фазы в отдельности.

Имеется значительное количество работ [3–12], в которых рассматриваются эти проблемы. Различные методы определения полезны в рамках решаемых задач и используемых математических моделей. Но аналитический сигнал (АС), введенный Д. Габором в 1946 году [3], получил благодаря работам Д. Вакмана наибольшее распространение. При анализе различных методов определения амплитуды и фазы им были приняты во внимание непрерывность и дифференцируемость амплитуды сигнала, независимость фазы от единиц измерения сигнала, совпадение с интуитивным представлением об амплитуде и фазе гармонических колебаний.

Соответствующий действительному сигналу $U(x)$ аналитический сигнал $W(x)$ строится в виде комплексной функции

$$W(x) = U(x) + iV(x), \quad V(x) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(s)}{x-s} ds. \quad (3)$$

Здесь преобразование Гильберта (несобственный интеграл) определено на всей действительной оси x , а в случаях, когда $s \rightarrow \pm\infty$ и при $x = s$, – в смысле главного значения по Коши (v.p.). Таким образом, мнимая составляющая аналитического сигнала $V(x)$ является гильберт-трансформантой его действительной части $U(x)$.

Однако выражение (1) определено только на конечном интервале. В этом случае одним из методов получения оптимальных оценок результатов эксперимента является продолжение функции $R(\rho)$ на всю ось x с максимальной гладкостью [10]. Продолжение посредством периодической функции представляет особый интерес, так как именно для таких функций предназначен алгоритм быстрого преобразования Фурье, который является базовым при численном анализе сигналов. В этой связи какой-либо экспериментальный сигнал целесообразно дополнить функцией, плавно соединяющей его окончание с его же началом на следующем периоде. Этого можно достичь, используя собственные фрагменты сигнала или применяя сплайны. Обозначим операцию оптимального периодического продолжения символом \mathbf{C} , а обратную ей как \mathbf{C}^{-1} , тогда

$$\mathbf{C}R(\rho) = R(x) = 1 + h(x) + l(x) + a(x)\cos\varphi(x), \quad \mathbf{C}^{-1}R(x) = R(\rho). \quad (4)$$

После введения АС амплитуду и фазу вычисляют по известным формулам, содержащим неопределенность в знаке и в количестве π , поэтому полученные функции не обязательно единственны:

$$a(x) = \pm\sqrt{U^2(x) + V^2(x)}, \quad (5)$$

$$\varphi(x) = \text{arctg} \frac{V(x)}{U(x)} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Интересно, что в общем случае целое число n и знаки в (5) могут изменяться вместе с аргументом x [6].

Наиболее важное свойство аналитического сигнала есть причинность его спектра Фурье. Смысл этого термина в том, что спектр АС располагается по одну сторону от начала координат оси частот [13]. Причинность вытекает из свойств преобразования Гильберта, эквивалентного умножению в области частот α на функцию $-i \operatorname{sgn} \alpha$. Иными словами, АС, соответствующий данной действительной функции $U(x)$, получается путем обнуления одной половины ее спектра Фурье. Но эта операция непротиворечива только в том случае, когда $U(x)$ априорно сформирован как двухполосный сигнал, как сумма сопряженных комплексных функций с непересекающимися спектральными полосами. Эти комплексные функции будут по определению сопряженными аналитическими сигналами. Качественный признак наличия двухполосности – это большое число мало меняющихся периодов у колебания. Но при наличии шума, наблюдая, например, сечение колец $R(\rho)$, трудно сделать вывод о выполнении данного требования.

Фаза характеризует некоторое расстояние от начала колебания. С точки зрения однозначности измерений фаза должна быть монотонной. Это свойство может быть априорным и следовать из схемы эксперимента, как, например, в компенсированных интерферограммах. Монотонность фазы $\varphi(\rho)$ в (1) вытекает из монотонности радиального роста дерева, что является его фундаментальным свойством. Однако вовсе не обязательно, что монотонность фазы сигнала и причинность его преобразования Фурье реализуются совместно.

В приложении между этими свойствами устанавливаются взаимосвязи. Из них следует возможность конструктивного использования свойства монотонности. Именно монотонность фазы вносит определенность в рассматриваемую проблему и позволяет предложить алгоритмы демодуляции как интерферограмм, так и годичных колец деревьев.

Поскольку функция φ монотонна и строго возрастающая, то обратная ей функция φ^{-1} будет однозначна и непрерывна, что особенно важно для ее численной реализации. Введем преобразование сжатие–растяжение вдоль оси x следующим образом:

$$\varphi(x) = \alpha_c z, \quad x = \varphi^{-1}(\alpha_c z). \quad (6)$$

Это преобразование \mathbf{CE} сжимает периоды колебания, которые больше некоторого среднего периода, и растягивает те из них, которые меньше, а обратное преобразование \mathbf{CE}^{-1} возвращает колебание в исходное состояние. Пусть также \mathbf{Hb} есть оператор последовательного выполнения полосовой фильтрации на частоте α_c и преобразования Гильберта, тогда

$$\mathbf{CE}[1 + \mu(x)] \cos \varphi(x) = \{1 + \mu[\varphi^{-1}(\alpha_c z)]\} \cos \{\varphi[\varphi^{-1}(\alpha_c z)]\} = [1 + \mu(z)] \cos \alpha_c z,$$

$$\mathbf{Hb}[1 + \mu(z)] \cos \alpha_c z = b \sin \alpha_c z, \quad (7)$$

$$\mathbf{CE}^{-1} \sin \alpha_c z = \sin \{\alpha_c \varphi(x) / \alpha_c\} = b \sin \varphi(x).$$

Как это следует из (7), преобразование сжатие–растяжение и полосовой фильтр позволяют выделить из колебания с монотонной фазой гармоничес-

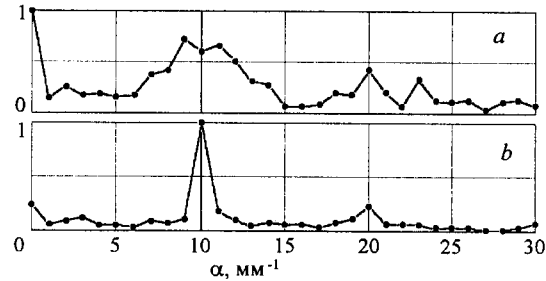


Рис. 3. Модуль спектров радиального сечения десяти годовичных колец: *a* – показанного на рис. 2, *a*; *b* – после преобразования сжатие–растяжение. Несущая частота α_c равна десяти обратным миллиметрам

кое колебание с частотой α_c . Для него находится гильберт-трансформанта, которая затем сжимается и растягивается в обратном порядке. При этом амплитуда исходного колебания не сохраняется (константа b), но в данном случае амплитуда не несет полезной информации и функция $\mu(x) = \mathcal{C}\mu(\rho)$ рассматривается как мультипликативный шум.

На рис. 3 показаны спектры Фурье радиального сечения диска дерева. Спектр исходного сигнала широкополосный, медленно убывающий, что делает проблематичным как введение АС, так и подавление шума. Видно, что преобразование $\mathcal{C}\mathcal{E}$ эффективно сжимает спектр радиального сечения и делает возможным применение узкополосного фильтра для выделения полезного сигнала из широкополосной смеси.

Возникает вопрос о реализации описанных операций. Действительно, для того чтобы определить фазу $\varphi(x)$, зная только $U(x)$, ее уже необходимо знать для выполнения преобразований (6), (7). Но здесь можно предположить, что величины

$$\varphi_0(x) = \arctg \{ \mathcal{H}b U(x) / U(x) \} \quad (8)$$

будет достаточно для осуществления начального сжатия спектра. Затем производится итерационный процесс в соответствии с уравнением

$$\varphi_{n+1}(x) = \arctg \{ \mathcal{H}b U[\varphi_n^{-1}(\alpha_c z)] / U[\varphi_n^{-1}(\alpha_c z)] \} \Big|_{z = \varphi_n(x) / \alpha_c} \quad (9)$$

Численные эксперименты [10] показали, что четыре итерации по (9) увеличивают точность оценки фазы в 5–10 раз по сравнению с (8).

Натурный эксперимент. Объектом исследования был выбран диск лиственницы (*Larix sibirica* Ledeb.), произрастающей на территории Томского научного центра СО РАН в 1975–2002 гг. Диск сканировался с разрешением 1200 точек на дюйм, число уровней квантования равнялось 256. Данные вводились в память компьютера, где с помощью графического редактора из изображения диска вырезался сектор с углом в 30° , ориентированный на юг, с выраженными переходными зонами между ранней и поздней древесиной. В секторе было выбрано девять радиальных сечений, на которых располагалось десять годовичных колец. Длина сечений изменялась в диапазоне 30–31 мм. Типичная реализация радиального сечения показана на рис. 2, *a*.

Каждое радиальное сечение в компьютере приводилось к одной длине, равной 1024 отсчетам, и обрабатывалось в соответствии с алгоритмом

$$U(x) = \mathbf{PM} \mathbf{C} R(\rho), \quad V(x) = \mathbf{C} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{E} U(x),$$

$$\rho(\tau) = \tau^{-1} \left\{ \mathbf{C}^{-1} \left[\frac{T}{2\pi} \arctg \frac{V(x)}{U(x)} \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь символ \mathbf{M} обозначает медианный фильтр для подавления импульсного шума $h(\rho)$. Длина фильтра составляла 121 отсчет. Полиномиальный фильтр четвертого порядка \mathbf{P} использовался для устранения низкочастотного фона $I(\rho)$ во всем сечении. Фильтр реализовывался по методу наименьших квадратов. Окно полосового фильтра центрировалось относительно α_c , имело супергауссову форму с полушириной в восемь отсчетов. Посредством алгоритма быстрого преобразования Фурье этот фильтр реализовывался вместе с преобразованием Гильберта (оператор \mathbf{H}). Операции сжатие–растяжение и получение обратной функции осуществлялись с помощью кубического сплайна.

Применяемые алгоритмы обеспечили прохождение функции роста $\rho(\tau)$ точно через реперные точки, соответствующие резкому переходу от поздней к ранней древесине, что подтверждает правильность результата (см. рис. 2, *a, b*).

Вычитая из функции $\rho(\tau)$ кусочно-линейную функцию, проведенную через реперные точки (см. рис. 2, *b*), можно получить сезонные вариации роста в пределах вегетационного периода $\delta\rho(\tau)$. Оценка этой функции ($\langle\delta\rho(\tau)\rangle$) показана на рис. 2, *c*, она определялась как среднее арифметическое по девяти реализациям.

Представляют интерес оценки с достаточно малой дисперсией, что характеризует устойчивость алгоритмов к входным данным. Тогда оценка $\langle\delta\rho(\tau)\rangle$ распределена приблизительно нормально и будет центром интервала $\langle\delta\rho(\tau)\rangle \pm \sigma N^{-0,5} t_{N-1}(1-p/2)$, где σ есть выборочное стандартное отклонение функции $\delta\rho(\tau)$. Для доверительной вероятности $p = 0,05$, объема выборки $N = 9$ из таблиц распределения Стьюдента найдем $t_8(0,975) = 2,25$, тогда интервал будет иметь вид $\langle\delta\rho(\tau)\rangle \pm 0,75\sigma$. Этот доверительный интервал показан на рис. 2, *c*, из его величины следует, что точность оценки приемлема.

Таким образом, существует область изотропности и в ней находится выбранный для анализа сектор диска. В этой области для различных азимутов в сечениях с приведенной длиной сохраняются сезонные вариации радиального роста.

Заключение. Установлено, что аналитический сигнал целесообразно применять только при априорной двухполосности спектра Фурье анализируемого колебания. В рамках выполнения условия дисперсионной причинности предложен алгоритм, использующий монотонность фазы как отличительный признак, по которому полезный сигнал выделяется из смеси. Применение его для изучения взаимодействия биологического объекта с окружающей средой дало возможность апостериорно по годичным кольцам восстановить сезонный радиальный рост дерева без использования каких-либо инструментальных подходов.

Монотонность фазы и дисперсионная причинность спектра. Проблемы определения амплитуды и фазы интенсивно обсуждаются, так как не существует единообразного подхода к построению математических моделей колебаний, волновых процессов, детекторов и систем. Кроме того, носители сигналов имеют разную физическую и биологическую природу. Например, не является принципиальным положение начала координат относительно сигнала в пространстве, но во времени всегда существует начальный момент, до которого ничего не происходило. Однако АС дает отличную от нуля амплитуду еще до этого момента. Поэтому возникают сомнения в целесообразности такой модели и требуется ее обоснование [4].

Когда носитель сигнала является пространственно-временной функцией, существует проблема выбора переменной, по которой следует вводить аналитический сигнал, и соответствия возможных одномерных аналитических сигналов друг другу [12]. При монохроматическом освещении в интерферометрах в силу наличия высокочастотных несущих амплитуда и фаза объекта практически никак не связаны в плоскости регистрации интерферограммы. В апертуре интерферометра инструментально обеспечивается постоянство амплитуды, что не обязательно совпадает с результатом применения АС.

Свяжем выполнение условия причинности для спектра комплексной функции $W(x)$ с наличием свойства монотонности у ее фазы, имея в виду, что сдвиг спектра Фурье вдоль оси частот эквивалентен добавлению линейной функции к фазе сигнала.

Вначале определим класс функций, из которых будет состоять математическая модель сигнала, чем и определяется в основном ее пригодность для исследования. Примем во внимание существование преобразования Гильберта, которым вводится АС.

Преобразование Фурье периодических функций может иметь особенности вида δ -функций. По теореме Винера – Пэли – Шварца [14] такие функции являются целыми функциями экспоненциального типа (ЦФЭТ), если они имеют финитный спектр. Для них возможно обратимое дискретное представление, необходимое для численного анализа. Практический интерес представляют функции ЦФЭТ, ограниченные на действительной оси, класса А [15]. Из ограниченности ЦФЭТ следует абсолютная интегрируемость ее спектра, включая случай, когда она сама не является квадратично-интегрируемой. Справедливо и обратное утверждение, а так как преобразование Гильберта от ЦФЭТ не нарушает абсолютной интегрируемости ее спектра, то гильберт-трансформанта также будет ограниченной функцией.

Воспользуемся неравенством Бернштейна [16] в виде

$$\max \left| \frac{dW(x)}{dx} \right| \leq \alpha_s \max |W(x)|, \quad (11)$$

где функция $W(x) = a(x) \exp i\varphi(x)$ принадлежит к классу ЦФЭТ, α_s – модуль верхней частоты в спектре этой функции. Пусть амплитуда постоянна, тогда найдем

$$\max |\varphi'(x)| \leq \alpha_s. \quad (12)$$

По теореме о сдвиге спектра для функции $\exp i[\varphi(x) + \alpha_e x]$ (она является АС) выполняется условие причинности в частотной области, а из неравенства Бернштейна следует, что фаза $[\varphi(x) + \alpha_e x]$ заведомо монотонна. Таким образом, для наличия свойства монотонности у фазы сигнала с постоянной амплитудой достаточно, чтобы спектр сигнала был причинным.

Выясним, что следует из предположения о наличии монотонности у фазы. Определим эффективную ширину спектра α_e в дисперсионном смысле (через нормированный момент второго порядка). Такой подход позволяет рассмотреть в том числе функции, не имеющие финитного спектра.

Пусть T -периодическая функция $W(x)$ и ее производная ограничены сверху. Тогда для нее существует дискретный спектр Фурье S_k и его второй момент. Имея в виду равенство Парсеваля, найдем

$$\alpha_e^2 = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |S_k|^2}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2} = \frac{\int_0^T |W'(x)|^2 dx}{\int_0^T |W(x)|^2 dx} = \frac{\int_0^T [a'^2 + a^2 \varphi'^2] dx}{\int_0^T a^2 dx} < A^2 + \max \varphi'^2(x), \quad (13)$$

где

$$A^2 = \frac{\int_0^T a'^2(x) dx}{\int_0^T a^2(x) dx}.$$

По аналогии с условием причинности введем условие дисперсионной причинности. Для его выполнения достаточно сдвинуть спектр более чем на свою эффективную ширину α_e в любую сторону, например

$$a(x) \exp i \left\{ \varphi(x) + x \sqrt{A^2 + \max \varphi'^2(x)} \right\}. \quad (14)$$

При достаточно большом сдвиге монотонность фазы и дисперсионная причинность спектра наблюдаются совместно, как это вытекает из неравенства

$$\alpha_e < \sqrt{A^2 + \max \varphi'^2(x)} \geq \max |\varphi'(x)|. \quad (15)$$

Когда $a = \text{const}$, то $A = 0$, и из выражения (15) получим

$$\max |\varphi'(x)| > \alpha_e. \quad (16)$$

Таким образом, чтобы выполнялось условие дисперсионной причинности для спектра сигнала с постоянной амплитудой, достаточно наличия свойства монотонности у фазы сигнала.

Из найденных взаимосвязей следует, что причинность спектра как основное свойство аналитического сигнала не всегда позволяет решить задачу восстановления фазы. Свойство аналитичности необязательно для математического описания экспериментальных данных в рамках выполнения условия дисперсионной причинности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваганов Е. А., Шашкин А. В. Рост и структура годовичных колец хвойных. Новосибирск: Наука, 2000.
2. Шиятов С. Г., Ваганов Е. А., Кирдянов А. В. и др. Методы дендрохронологии. Часть I. Основы дендрохронологии. Сбор и получение древесно-кольцевой информации. Красноярск: Краснояр. ГУ, 2000.
3. Gabor D. Theory of communication // Journ. of IEE. 1946. 93. P. 429.
4. Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А. Амплитуда, фаза, частота – основные понятия теории колебаний // УФН. 1977. 123, вып. 4. С. 657.
5. Vakman D. On the analytic signal, the Teager – Kaiser energy algorithm, and other methods for defining amplitude and frequency // IEEE Trans. Signal Process. 1996. 44, N 4. P. 791.
6. Cohen L., Loughlin P., Vakman D. On an ambiguity in the definition of the amplitude and phase of a signal // Signal Process. 1999. 79. P. 301.
7. Золотарев И. Д. Проблема «амплитуда, фаза, частота» и ее решение в радиотехнике // Техника радиосвязи. 1997. № 3. С. 3.
8. Коржик В. И. Огибающая сигнала и некоторые ее свойства // Радиотехника. 1968. 23, № 4. С. 1.
9. Витриченко Э. А., Лукин В. П., Пушной Л. А., Тартаковский В. А. Проблемы оптического контроля. Новосибирск: Наука, 1990.
10. Тартаковский В. А. О продолжении интерферограмм за пределы области определения // Оптика атмосферы и океана. 1993. 6, № 12. С. 1581.
11. Tartakovsky V. A. Fringe Pattern Evaluation and Analytic Signal Theory // Optical Metrology Series. Berlin: Akademie Verlag, 1997. P. 84.
12. Тартаковский В. А. Определение фазы оптической волны и многомерный аналитический сигнал // Оптика атмосферы и океана. 1997. 10, № 3. С. 301.
13. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976.
14. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
15. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций М.: Гостехиздат, 1956.
16. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике // ТИИЭР. 1977. 65, № 7. С. 16.

*Институт оптического мониторинга СО РАН,
E-mail: tv@iom.tomsknet.ru*

*Поступила в редакцию
8 апреля 2003 г.*