

УДК 539.375

## НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТА С ХРУПКИМ СВЯЗУЮЩИМ. 1. СЛАБОЕ АРМИРОВАНИЕ

В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Представлены результаты исследования разрушения композитной среды с хрупким связующим. Хрупкий или пластичный материал усиливающих элементов обладает повышенной деформативностью. Для макротрещин нормального отрыва построены необходимые критерии хрупкой прочности и достаточные критерии квазихрупкой прочности. Получены простые аналитические выражения, связывающие длину макротрещины с параметром нагружения и структурными, жесткостными, прочностными параметрами композитной среды, а также с параметрами поврежденности материалов компонентов. Критические нагрузки для этих критериев могут существенно различаться даже тогда, когда коэффициент армирования мал, а материал усиливающих элементов обладает ярко выраженной повышенной деформативностью. При выполнении необходимого критерия происходит подрастание трещины, и в связях, расположенных перед вершиной макротрещины, формируются микротрещины. Число поврежденных связей зависит от раскрытия макротрещины и характеристик закритического деформирования этих поврежденных связей.

**Введение.** Разрушение хрупких тел с различными квазирегулярными структурами описано Г. Нейбером [1] и В. В. Новожиловым [2]. В критериях Нейбера — Новожилова [1, 2] осреднение существенно зависит от характерных линейных размеров элементарной ячейки регулярных структур. Типичной средой со структурой является композит. При изучении разрушения композитов могут возникать задачи, существенно отличающиеся от классических задач теории упругости. Ниже построен пример, когда регулярная структура композита определяется двумя характерными линейными размерами: диаметром высокодеформативных включений и расстоянием между этими включениями. Разрушение хрупких изотропных твердых тел с иерархией регулярных структур, каждая из которых описывается только одним характерным линейным размером, рассмотрено в [3, 4].

Вначале приведем краткий обзор необходимых и достаточных критериев разрушения изотропных твердых тел с одной структурой. Возможно использование необходимых критериев [2–4] при описании разрушения композитов с хрупким связующим. Применение достаточного критерия [2], предложенного для однородных тел, может привести к получению ошибочных результатов при расчете композитов. Пусть выполняется необходимый критерий, тогда ближайшая к вершине трещины структура твердого тела находится в критическом состоянии. Однако после исчерпания несущей способности этой структуры возможно дополнительное догружение тела с трещиной за счет совместного закритического деформирования структуры перед вершиной трещины и докритического деформирования последующей структуры. При выполнении достаточного критерия имеет место

исчерпание несущей способности совместного деформирования двух или более структур перед вершиной трещины и происходит разделение тела с трещиной на части.

Остановимся более подробно на классических достаточных критериях [5–8]. В работе [9] дана математическая интерпретация модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [5, 6]. Для двучленной асимптотики решения (изотропный материал) с точностью до величин высшего порядка малости в окрестности вершины трещины на ее продолжении ( $y = 0$ ) можно записать соотношение

$$\sigma_y(x, 0) \simeq \sigma_\infty + K_I^0 / (2\pi x)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\sigma_\infty$  — характерное напряжение, заданное на бесконечности;  $K_I^0$  — суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Суммарный КИН можно представить в виде [10]

$$K_I^0 = K_{I\infty}^0 + K_{I\Delta}^0, \quad K_{I\infty}^0 > 0, \quad K_{I\Delta}^0 < 0. \quad (2)$$

Здесь  $K_{I\infty}^0$  — КИН, порождаемый напряжениями  $\sigma_\infty$ ;  $K_{I\Delta}^0$  — КИН, порождаемый напряжениями  $\sigma_m$ , действующими согласно модели Леонова — Панасюка — Дагдейла в окрестности вершины трещины в зоне предразрушения;  $\Delta$  — длина нагруженного участка или зоны предразрушения. Напряжения  $\sigma_m$  совпадают с “теоретической” прочностью монокристалла [2, 10]. Для соотношений (1), (2) рассматриваются ограничения

$$K_I^0 = 0; \quad (3)$$

$$K_I^0 > 0. \quad (4)$$

В классических критериях [6, 7], по существу, используется ограничение (3). Класс решений, соответствующий ограничению (4), анализируется в работах [10, 11].

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Суммарный КИН  $K_I^0$  не может быть отрицательным, так как при  $K_I^0 < 0$  берега трещины налагаются друг на друга, что легко проверить.

Ниже рассматривается ограничение (4), из которого следует, что в соотношении (1) имеется сингулярная составляющая решения. Бесконечные напряжения в вершине трещины, не допускаемые континуальным критерием, не противоречат дискретному [1, 2], если сингулярная составляющая имеет интегрируемую особенность.

Для исследования наибольший интерес представляет зона предразрушения, примыкающая к вершине трещины. Далее все величины для исходного композита отмечены индексом 1, а для армирующих волокон (включений) — индексом 2. В зоне предразрушения в рассматриваемой модели для композитных материалов могут действовать напряжения  $\sigma_{m2} = \text{const}$ , отличные от “теоретической” прочности пучка волокон с хрупким связующим  $\sigma_{m1}$ . Возможны следующие случаи: 1)  $\sigma_{m1} > \sigma_{m2}$ ; 2)  $\sigma_{m1} = \sigma_{m2}$ ; 3)  $\sigma_{m1} < \sigma_{m2}$ . Второй случай при выполнении ограничения (4) рассмотрен в [10, 11]. Первый случай соответствует слабому армированию, третий — армированию высокопрочными волокнами; в первом и втором случаях могут выполняться ограничения (3) или (4).

Следует отметить, что использование необходимого критерия хрупкой прочности и достаточного критерия квазихрупкой прочности В. В. Новожилова [2] при анализе процессов предразрушения и окончательного разрушения композита представляется естественным.

### 1. Физико-механическая модель пучка волокон для зоны предразрушения.

Допустим, что исходный композит имеет регулярную структуру, которая характеризуется одним геометрическим параметром  $r_1$  ( $r_1$  — расстояние между волокнами-включениями). Для упрощения примем, что после осреднения композит описывается уравнениями, совпадающими с уравнениями изотропных упругих сред всюду вне зоны предразрушения. В зоне предразрушения поведение частично разрушенного композита зависит от его структуры и диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  армирующих волокон. Наиболее простая модель композита — модель

пучка волокон. Следует отметить, что до начала разрушения структура композита может не содержать волокон. Ниже приведен пример, когда в зоне предразрушения при распространении трещины только по хрупкой матрице волокна формируются из включений. Предполагается, что материал этих включений обладает повышенными деформационными свойствами.

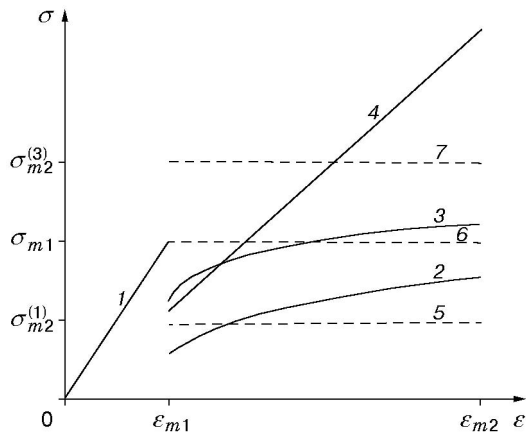


Рис. 1

На рис. 1 использованы следующие обозначения:  $\sigma_{m1}$  — “теоретическая” прочность пучка волокон с учетом повреждений связующего;  $\varepsilon_{m1}$ ,  $\varepsilon_{m2}$  — предельные относительные удлинения связующего и волокон ( $\varepsilon_{m1} < \varepsilon_{m2}$ );  $\sigma_{m2}^{(1)}$ ,  $\sigma_{m2}^{(2)}$ ,  $\sigma_{m2}^{(3)}$  — осредненные напряжения, действующие в зоне предразрушения, для первого, второго и третьего случаев соответственно ( $\sigma_{m2}^{(2)} = \sigma_{m1}$ ). Эти осредненные напряжения в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла вычисляются из энергетических соображений [2, 5, 6, 10, 11]:

$$\sigma_{m2} = \frac{1}{\varepsilon_{m2} - \varepsilon_{m1}} \int_{\varepsilon_{m1}}^{\varepsilon_{m2}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (5)$$

Рис. 1 и соотношение (5) соответствуют “испытанию” пучка волокон композита в предельно жесткой машине.

Феноменологические модели в механике разрушения изложены в [12, 13]. Механизмом разрушения композита с хрупким связующим является рост макротрещины в матрице с последующим обрывом волокон [12], только после обрыва волокон происходит разделение композита на части.

Непосредственно воспользоваться величинами  $\varepsilon_{m1}$ ,  $\varepsilon_{m2}$  при формулировке критериев прочности не удастся, так как отсутствует характерный линейный размер. Введем в рассмотрение поперечник зоны предразрушения и обозначим его через  $a$  (для монокристалла этот размер совпадает с постоянной кристаллической решетки [2, 10]; в п. 3 линейный размер  $a$  — диаметр включений). Итак, зона предразрушения занимает прямоугольник со сторонами  $\Delta$ ,  $a$  (см. [14]). Раскрытие трещины в точке  $x = -\Delta$  определяется следующим образом:  $a_{m2} = (\varepsilon_{m2} - \varepsilon_{m1})a$ . В зоне предразрушения на отрезке  $[-\Delta, 0)$  действуют постоянные напряжения  $\sigma_{m2}$  (система координат связана с правой вершиной трещины). Напряжения  $\sigma_{m2}$  “стараются” закрыть трещину.

Окончательно имеем два набора параметров: геометрические  $r_1$ ,  $\Delta$ ,  $a_{m2}$  и силовые  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$ , причем первые параметры из каждого набора  $r_1$ ,  $\sigma_{m1}$  используются при формулировке необходимого критерия хрупкой прочности, а весь набор параметров — при формулировке достаточного критерия квазихрупкой прочности.

Пусть каждый представительный пучок волокон скреплен хрупким связующим, армирующие волокна могут быть хрупкими или пластичными. Допустим, предельное относительное удлинение волокон существенно больше предельного относительного удлинения связующего. На рис. 1 приведены упрощенные диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  пучка волокон и их аппроксимации. Сплошная прямая 1 соответствует упругому деформированию композита (пучка волокон), сплошные кривые 2–4 — первому ( $\sigma_{m1} > \sigma_{m2}^{(1)}$ ), второму ( $\sigma_{m1} = \sigma_{m2}^{(2)}$ ) и третьему ( $\sigma_{m1} < \sigma_{m2}^{(3)}$ ) случаям деформирования волокон, когда связующее разрушено. Штриховые прямые 5–7 — аппроксимации кривых 2–4 соответственно.

**2. Необходимый критерий хрупкой прочности и достаточный критерий квазихрупкой прочности композита.** Трещина отрыва в композите моделируется двусторонним разрезом. Необходимый дискретно-интегральный критерий хрупкой прочности имеет вид ( $\Delta = 0$ )

$$\frac{1}{kr_1} \int_0^{nr_1} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_{m1}, \quad x \geq 0. \quad (6)$$

Достаточный дискретно-интегральный критерий квазихрупкой прочности имеет вид ( $\Delta > 0, a_{m2} > 0$ )

$$\frac{1}{kr_1} \int_0^{nr_1} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_{m1}, \quad x \geq 0; \quad 2v^* = \frac{\varkappa + 1}{G} K_I^0 \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} \leq a_{m2}, \quad x \leq 0. \quad (7)$$

Здесь  $\sigma_y$  — нормальные напряжения на продолжении трещины (они могут иметь сингулярную составляющую);  $Oxy$  — прямоугольная система координат, начало которой совпадает с правой вершиной трещины;  $r_1$  — характерный линейный размер структуры композитного материала;  $n, k$  — числа ( $n \geq k, k$  — число целых волокон);  $nr_1$  — интервал осреднения;  $(n - k)/n$  — коэффициент поврежденности арматуры на этом интервале;  $2v = 2v(x)$  — раскрытие трещины;  $2v^*(-\Delta) = a_{m2}$  — критическое раскрытие трещины, при котором обрывается ближайшее к центру трещины волокно;  $\varkappa = 3 - 4\nu$  или  $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоской деформации или плоского напряженного состояния соответственно;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $G$  — модуль сдвига;  $K_I^0$  — суммарный КИН, вычисляемый по соотношению (2) для соответствующей задачи. Пределы осреднения напряжений в критериях (6), (7) зависят от наличия и расположения дефектов (обрыва волокон) в зоне предразрушения композита при его деформировании. Поврежденность в зоне предразрушения существенно зависит от повреждений в исходном композите.

**3. Подростание трещин в композите при формировании силовых связей в вершине трещины.** Существуют хрупкие материалы (например, керамики), которые при наличии макродефектов типа трещин легко разрушаются при растяжении. Введение небольшого количества высокодеформативных добавок (слабое армирование) существенно меняет поведение перспективного композита в зоне предразрушения. Вопросы, связанные с распространением трещин в средах с указанной структурой, рассмотрены в [15, 16]. В хрупкую керамическую матрицу добавлены высокодеформативные составляющие: золото (металл) или тефлон (твердый полимер). Отмечено, что при определенных условиях изготовленные материалы обладают повышенной трещиностойкостью. Воспользуемся критериями (6), (7), позволяющими объяснить обнаруженные эффекты [15, 16]. Далее рассматривается двумерная постановка задачи.

*3.1. Напряженное состояние в окрестности вершины трещины.* Изучается процесс квазистатического подростания плоских трещин в композите, когда один из материалов обладает повышенной деформативностью. Пусть этот компонент образует отдельные редко расположенные включения в хрупкой керамической матрице (рис. 2, а). Рассматривается регулярное расположение цилиндрических включений ( $a$  — диаметр включений,  $r_1$  — расстояние между их центрами). Плоская трещина проходит через центры включений, а силы, действующие на границе керамика — металл или керамика — полимер, не превосходят силы адгезии между керамикой и металлом (например, золотом) или твердым полимером (например, тефлоном). Тогда можно считать, что из цилиндрических включений формируются силовые связи (рис. 2, б). Максимальное раскрытие трещины можно

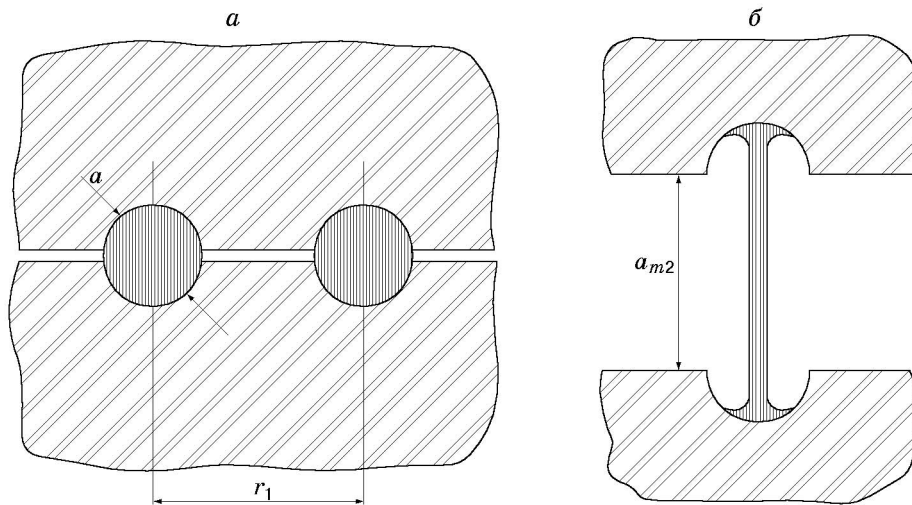


Рис. 2

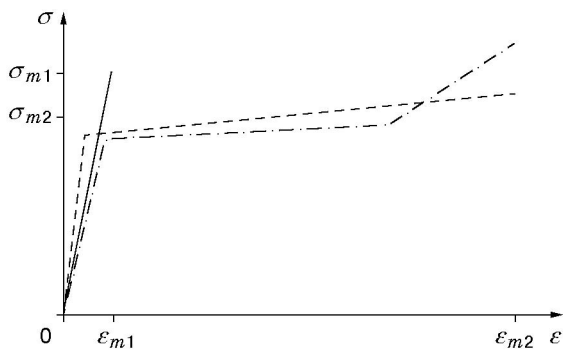


Рис. 3

оценить как  $a_{m2} \simeq a(\varepsilon_{m2} - \varepsilon_{m1})$ , где  $\varepsilon_{m1}$ ,  $\varepsilon_{m2}$  — максимальные деформации в матрице и связях, причем  $\varepsilon_{m1} \ll \varepsilon_{m2}$  (рис. 3). На рис. 3 представлены диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$ , где  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$  — максимальные напряжения в матрице и связях. Заметим, что для напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в твердом теле со структурой уже выполнено осреднение. На рис. 3 штриховой и штрихпунктирной кривыми представлены типичные диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  для высокодеформативных металлов и твердых полимеров соответственно, сплошная прямая — диаграмма  $\sigma$ - $\varepsilon$  для хрупкой керамики.

Рассматриваются две модели трещины. В первой модели отсутствуют связи внутри трещины (необходимый критерий), во второй существуют силовые связи в окрестности вершины трещины (достаточный критерий).

Изучается поведение композита в окрестности вершины трещины отрыва. Пусть в исходном состоянии отсутствуют силовые связи внутри трещины, а на бесконечности задано напряжение  $\sigma_\infty$ . Допустим, что напряжение  $\sigma_\infty$  меньше критического напряжения  $\sigma_\infty^0$  для необходимого критерия. Тогда подрастания трещины не происходит, так как  $\sigma_\infty < \sigma_\infty^0$ . При постепенном догружении напряжения  $\sigma_\infty$  достигают критического значения  $\sigma_\infty^0$ , а при  $\sigma_\infty = \sigma_\infty^0$  начинается подрастание трещины из-за разрушения связующего, и формируются силовые связи из материала с повышенной деформативностью в окрестности вершины трещины, появляется зона предразрушения (рис. 4, а). В соответствии с моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла напряжения  $\sigma_{m2}$  на нагруженном участке трещины “стараятся” закрыть трещину (рис. 4, б). Силовая связь, ближайшая к середине трещины, обрывается, когда относительное удлинение в ней достигает критического значения  $\varepsilon_{m2}$ . Различие рассматриваемых механических моделей заключается в следующем: для необходимого критерия отсутствует нагруженный участок ( $\Delta = 0$ ), а для достаточного критерия имеется нагруженный участок ( $\Delta > 0$ ). Очевиден предельный переход от одной механической модели к другой при  $\Delta \rightarrow 0$ . Работа “арматуры” в закритическом режиме позволяет воспринять дополнительную по сравнению с  $\sigma_\infty^0$  нагрузку.

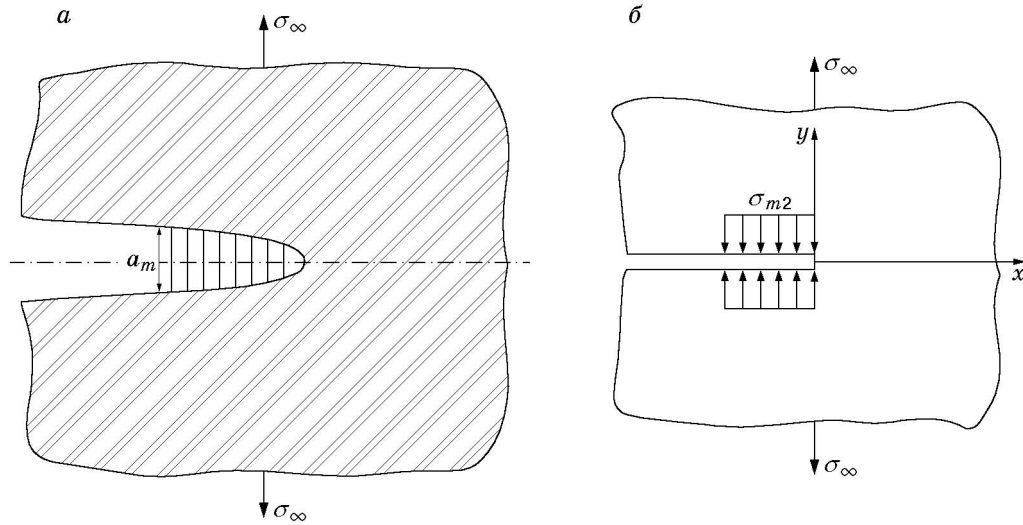


Рис. 4

3.2. *Сопоставление критических напряжений по необходимому и достаточному критериям.* В соответствии с выбранными моделями для необходимого критерия зона предразрушения отсутствует, а для достаточного критерия такая зона существует. Для этих критериев воспользуемся представлениями решений для напряжений на продолжении острых трещин ( $y = 0$ ) через суммарный КИН в виде [17]

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_\infty^0 + K_I^0 / (2\pi x)^{1/2}, \quad K_I^0 = \sigma_\infty^0 \sqrt{\pi l_{nk}^0}, \quad \Delta = 0; \quad (8)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_\infty^* + K_I^* / (2\pi x)^{1/2}, \quad (9)$$

где  $K_I^* = \sigma_\infty^* \sqrt{\pi l_{nk}^*} - \sigma_{m2} \sqrt{\pi l_{nk}^*} [1 - (2/\pi) \arcsin(1 - \Delta/l_{nk}^*)]$ ,  $\Delta \neq 0$ ;  $2l_{nk}^0 = 2l^0(n, k)$ ,  $2l_{nk}^* = 2l^*(n, k)$  — критические длины трещин;  $K_I^0, K_I^*$  — критические КИНы;  $\sigma_\infty^0, \sigma_\infty^*$  — критические напряжения для необходимого и достаточного критериев соответственно.

Пусть задана трещина длиной  $2l_{nk}^0$  такая, что  $\Delta = 0$ . На рис. 5 показаны кривые разрушения. Штриховая кривая построена по необходимому критерию, штрихпунктирная — по достаточному критерию, сплошная прямая соответствует переходу системы от одного состояния равновесия (отсутствие зоны предразрушения) к другому (наличие зоны предразрушения). Штриховая и штрихпунктирная кривые соответствуют неустойчивым участкам роста трещин, сплошная — участку устойчивого роста трещины. На устойчивом участке происходит подрастание трещины ( $l_{nk}^0 < l_{nk}^*$ ) и формируются силовые связи в вершине трещины (см. рис. 4), образовавшаяся новая система способна воспринять увеличивающуюся нагрузку, так как  $\sigma_\infty^* > \sigma_\infty^0$ . Получилась своеобразная ловушка для распространяющихся трещин [15, 16].

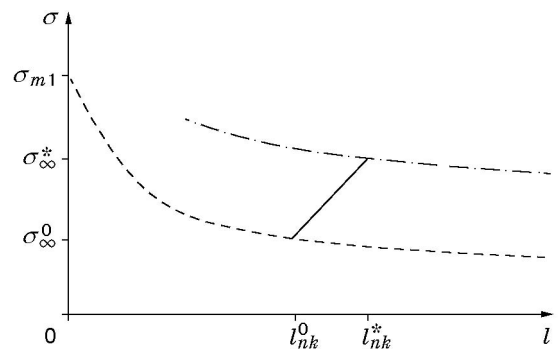


Рис. 5

Выведем соотношения, связывающие критические параметры для двух предлагаемых критериев. Легко получить оценки для критических КИНов  $K_I^0$  и  $K_I^*$ . Так, после соответ-

ствующих преобразований имеем

$$\frac{K_I^0}{\sigma_\infty^0 \sqrt{r_1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left( k \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_\infty^0} - n \right), \quad \frac{K_I^*}{\sigma_\infty^* \sqrt{r_1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left( k \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_\infty^*} - n \right). \quad (10)$$

Если первым соотношением в (10) можно воспользоваться непосредственно, то во второе соотношение входит неизвестный параметр  $\Delta$ , характеризующий длину зоны предразрушения (см. (9)). Соотношения (9), (10) имеют смысл только тогда, когда  $K_I^* > 0$ . Подчеркнем, что предлагаемые критерии (6), (7) имеют смысл и при нулевой длине трещины, так как в соотношениях (8), (9) удержаны члены  $\sigma_\infty^0, \sigma_\infty^*$ . Таким образом, первое соотношение в (10) может использоваться для описания возникновения трещин.

Последнее соотношение в (9) существенно упрощается, если  $\Delta/l_{nk}^*$  — малая величина. В этом случае

$$\arcsin(1 - \Delta/l_{nk}^*) \simeq \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l_{nk}^*}.$$

Учитывая это упрощение, из соотношений (7), (9) получаем квадратное уравнение для параметра  $\sqrt{\Delta/l_{nk}^*}$

$$\left( \sqrt{\frac{\Delta}{l_{nk}^*}} \right)^2 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_{m2}} \sqrt{\frac{\Delta}{l_{nk}^*}} + \frac{\pi}{\varepsilon + 1} \frac{a\varepsilon_{m2}}{l_{nk}^*} \frac{G}{2\sigma_{m2}} = 0.$$

При вычислении корней последнего уравнения поступаем следующим образом. Пусть

$$\frac{8}{\pi(\varepsilon + 1)} \frac{a\varepsilon_{m2}}{l_{nk}^*} \frac{\sigma_{m2}}{\sigma_\infty^*} \frac{G}{\sigma_\infty^*} \ll 1.$$

Тогда, пренебрегая квадратом этой величины по сравнению с единицей, для наименьшего корня квадратного уравнения получим явное выражение

$$\sqrt{\frac{\Delta}{l_{nk}^*}} = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon + 1} \frac{a\varepsilon_{m2}}{l_{nk}^*} \frac{G}{\sigma_\infty^*}.$$

Окончательно выражения для критических длин трещин отрыва записываются в явном виде:

— для необходимого критерия ( $\Delta = 0$ )

$$\frac{2l_{nk}^0}{r_1} = \left( \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_\infty^0} - \frac{n}{k} \right) \frac{2k^2}{n}, \quad \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_\infty^0} = \frac{\sqrt{n}}{k} \sqrt{\frac{2l_{nk}^0}{r_1} + \frac{n}{k}}; \quad (11)$$

— для достаточного критерия ( $\Delta \neq 0$ )

$$\frac{2l_{nk}^*}{r_1} = \left( \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_\infty^*} - \frac{n}{k} \right) \frac{2k^2}{n} \left( 1 - \frac{2\sigma_{m2}}{\pi\sigma_\infty^*} \sqrt{\frac{\Delta}{l_{nk}^*}} \right)^{-2}, \quad \sqrt{\frac{\Delta}{l_{nk}^*}} = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon + 1} \frac{a\varepsilon_{m2}}{l_{nk}^*} \frac{G}{\sigma_\infty^*}, \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_{m1}}{\sigma_\infty^*} = \frac{\sqrt{n}}{k} \sqrt{\frac{2l_{nk}^*}{r_1} \left( 1 - \frac{2\sigma_{m2}}{\pi\sigma_\infty^*} \sqrt{\frac{\Delta}{l_{nk}^*}} \right)} + \frac{n}{k}.$$

Для критических параметров  $K_I^0, K_I^*, l_{nk}^0, l_{nk}^*$  в полученных соотношениях (10)–(12) возможен предельный переход, когда КИНЫ и длины трещин стремятся к нулю (в классических соотношениях аналогичный предельный переход не имеет смысла).

Критические длины трещин  $l_{nk}^0, l_{nk}^*$  значительно различаются при одном и том же значении  $\sigma_\infty$ . Это различие может быть весьма существенным:

$$\frac{l_{nk}^*}{l_{nk}^0} = \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi(\varepsilon + 1)} \frac{\sigma_m^{(2)}}{\sigma_\infty} \frac{a\varepsilon_{m2}}{l_{nk}^*} \frac{G}{\sigma_\infty} \right)^{-2}. \quad (13)$$

Критические значения напряжений  $\sigma_{\infty}^0, \sigma_{\infty}^*$  для трещин фиксированной длины  $l_{nk}$  являются оценками начала и окончания разрушения; эти критические значения напряжений различаются в несколько раз. Безусловно, все оценки для критических параметров  $K_I^0, K_I^*, l_{nk}^0, l_{nk}^*, \sigma_{\infty}^0, \sigma_{\infty}^*$  можно получить численно, если воспользоваться вторым неравенством в (7) и исходными соотношениями (8)–(10) (когда решение существует).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При армировании высокопрочными предварительно растянутыми волокнами необходимо рассматривать другие задачи, так как трещина в матрице может не раскрываться при малом уровне нагружения.

Укажем порядки безразмерных параметров  $\Delta/l_{nk}^*, \sigma_{m2}/\sigma_{\infty}^*, a\varepsilon_{m2}/l_{nk}^*, G/\sigma_{\infty}^*$ , когда выполнены все принятые выше допущения и имеют место соотношения (12). В отношении  $G/\sigma_{\infty}^*$  переходим к модулю Юнга  $E$ , используя равенство  $G = E/[2(1 + \nu)]$  (оценки “теоретической” прочности через модуль Юнга известны:  $\sigma_{m1} = (0,1 \div 0,2)E$  (см. обзор [18])). Если  $a\varepsilon_{m2}/l_{nk}^* \sim 10^{-2}$ , то  $\Delta/l_{nk}^* \approx 0,06$  при  $\sigma_{m2}/\sigma_{\infty} \sim 10$ ,  $\Delta/l_{nk}^* \approx 0,2$  при  $\sigma_{m2}/\sigma_{\infty} \sim 10^2$ ,  $\Delta/l_{nk}^* \approx 0,6$  при  $\sigma_{m2}/\sigma_{\infty} \sim 10^3$ . Очевидно, что при  $\sigma_{m2}/\sigma_{\infty} \sim 1$  критические длины трещин  $l_{nk}^0, l_{nk}^*$  могут различаться на один порядок (см. (13)).

Оценим глубину ловушки для распространяющихся трещин (см. рис. 5). Имеем очевидное соотношение  $2l_{nk}^* = 2l_{nk}^0 + 2\Delta$ . Ограничимся простым случаем  $n = k = 1$ . Тогда, принимая во внимание соотношения (10), (11) и пренебрегая второстепенными членами  $\Delta/l_{11}^0 \ll 1, \sqrt{2l_{11}^0/r_1} \gg 1$ , получим

$$\frac{\sigma_{\infty}^*}{\sigma_{\infty}^0} \simeq \left( 1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi(\varepsilon + 1)} \frac{\sigma_{m2}}{\sigma_{\infty}^*} \frac{a\varepsilon_{m2}}{l_{11}^0} \frac{G}{\sigma_{\infty}^*} \right)^{-1}.$$

Значения критических напряжений по необходимому и достаточному критериям  $\sigma_{\infty}^*$  и  $\sigma_{\infty}^0$  могут существенно различаться (в несколько раз) в некотором диапазоне безразмерных параметров, входящих в последнее соотношение.

Трещиностойкость керамик можно существенно повысить [15, 16], если ввести в их состав высокодеформативные добавки.

Нетрудно установить связь между значениями критических напряжений по необходимому и достаточному критериям В. В. Новожилова [2] и локальными минимумами и максимумами при продвижении трещины в модели Р. Томсона [19].

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
2. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
3. **Корнев В. М.** Иерархия критериев прочности структурированных хрупких сред. Сателлитное зарождение микротрещин // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 177–187.
4. **Корнев В. М.** Многомасштабные критерии сдвиговой прочности блочных хрупких сред. Сателлитное зарождение микропор // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2000. Т. 40, № 5. С. 7–16.
5. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
6. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
7. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.



8. Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А. Основы экспериментальной механики разрушения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
9. Назаров С. А., Полякова О. Р. Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Тр. Моск. мат. о-ва. 1996. Т. 57. С. 16–74.
10. Корнев В. М., Кургузов В. Д. Достаточный дискретно-интегральный критерий прочности при отрыве // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 161–170.
11. Корнев В. М., Адищев В. В. Достаточные критерии роста макротрещин нормального отрыва в среде регулярной структуры // Изв. вузов. Стр-во. 1999. № 12. С. 9-14.
12. Морозов Н. Ф., Поникаров Н. В. Математические модели в механике разрушения // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: К 60-летию со дня рождения проф. Г. И. Быковцева. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 97–104.
13. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Краевые задачи континуальной механики разрушения / РАН. Урал. отд-ние. Ин-т механики сплошных сред. Препр. Пермь, 1992.
14. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З. Основы механики разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т.; Т. 1).
15. Lipkin D. M. Effect of interfacial adhesion on plastic dissipation in metal — ceramic fracture // Fifth Intern. conf. on the fundamentals of fracture (ICFF-V), Gaithersburg, Aug. 18–21, 1997. La Jolla: Inst. for mech. and mater., 1997. Rep. N 97-13. P. 135.
16. Ma Q. Subcritical crack growth along interfaces in interconnect structures // Ibid. P. 139.
17. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т.; Т. 2).
18. Макмиллан Н. Идеальная прочность твердых тел // Атомистика разрушения: Сб. ст. 1983–1985 гг. / Сост. А. Ю. Ишлинский. М.: Мир, 1987. С. 35–103.
19. Томсон Р. Физика разрушения // Там же. С. 104–144.

*Поступила в редакцию 27/VI 2001 г.*

---