

проволочки. По-видимому, это связано с тем, что образующиеся продукты взрыва успевают конденсироваться на электродах, и поэтому повторного пробоя не происходит.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что при ЭВП генерируется достаточно мощное электромагнитное излучение и в микроволновом диапазоне. При повышении чувствительности радиометра возможна регистрация МКИ образующейся плазмы, что позволит определять зависимость от времени ее температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерибас А.А., Исаков В.П., Крейчман Б.М. и др. Нанесение твердосплавных покрытий электрическим взрывом проводников // ФГВ. — 1982. — № 2. — С. 110—116.
2. Бурцев В.А., Калинин Н.В., Лучинский А.В. Электрический взрыв проводников и его применение в электрофизических установках. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. Федоров В.Ф. Определение параметров лазерной плазмы по характеристикам микроволнового излучения: Тез. докл. III Межреспубликанского семинара «Физика быстропотекающих плазменных процессов». — Гродно, 1992.
4. Бурцев В.А., Калинин Н.В., Литуновский В.Н. Электрический взрыв проводников. Обзор ОК-17 / НИИЭФА им. Д.В. Ефремова. — Л.: НИИЭФА, 1977.
5. Горбачев Л.П., Соколов В.Б., Федоров В.Ф. и др. Исследование импульсных микроволновых излучений радиометрическим методом. — М., 1993. — (Препр. / МИФИ; № 014—93).

г. Москва

Поступила 6/VII 1993 г.,
в окончательном варианте — 17/III 1994 г.

УДК 539.374.662.215.2

В.А. Огородников, А.А. Садовой, Е.С. Тюнькин,
Н.М. Чулков

О ВЯЗКОСТИ АЛЮМИНИЯ И СВИНЦА В УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Многие технические задачи допускают моделирование в рамках бездиссипативных газодинамических течений. В то же время некоторые технические проблемы связаны с большими деформациями различных оболочек, при этом если характерные давления не намного превосходят предел текучести, то существенным является учет упругопластических свойств материалов, который позволяет более корректно рассчитать значения конечных деформаций и оценить разогрев оболочки, обусловленный работой диссипативных сил. Кроме того, для высокоскоростных течений, характеризующихся большой скоростью деформаций, существенными становятся диссипативные потери, обусловленные силами вязкости [1—6].

Разогрев, обусловленный вязкостью, обычно характеризуется большими неоднородностями диссипации кинетической энергии в тепловую. Наибольший локальный разогрев в последнем случае реализуется вблизи различных неоднородностей в деформируемом материале, например вблизи инородных включений, пустот, на границах зерен, плоскостей скольжения и т.д. Очевидно, что неоднородный разогрев материала, обусловленный вязкостью, уменьшает прочностные характеристики материала и тем самым может способствовать развитию деформации по определенным плоскостям и направлениям [6]. Характерными примерами последнего могут служить пробивание материала оболочки осколком или интенсивно исследуемое в последнее время сверхглубокое проникание микроскопических частиц в преграды [7]. Одновременно приведенные примеры могут иллюстрировать состо-

© В.А. Огородников, А.А. Садовой, Е.С. Тюнькин, Н.М. Чулков, 1995

яние развития механики разрушения, в рамках которой не удалось количественно описать указанные эксперименты [8—10].

Нетривиальное значение диссипативных процессов при высокоскоростных вязкопластических течениях осознавалось давно. Так, в [1, 2] исследовалась зависимость вязкости ряда материалов от сжатия и температуры за фронтом ударной волны (диапазон сжатия $\sigma \leq 2$, температура $T \sim 10^4$ °C). Вязкопластические свойства материалов исследовались также в опытах по инерционному схождению цилиндрических оболочек [3, 11, 12] (сжатие $\sigma \sim 1$, температура $T \sim 10^3$ °C). В этих экспериментах за счет использования энергии ВВ обеспечивались разгон оболочек и их последующее инерционное схождение. Причем параметры заряда ВВ и оболочек могут быть такими, чтобы вся начальная кинетическая энергия оболочки полностью трансформировалась в тепловую энергию и оболочка останавливалась на некотором радиусе.

Было установлено, что основные физические процессы, происходящие с материалами оболочек, характеризуются тем, что наблюдается неравномерный разогрев материала оболочки по толщине, причем максимальный разогрев оболочки достигается на ее внутренней границе, и неравномерность разогрева оболочки увеличивается по мере схождения ее к центру [11, 13]. При этом несколько изменяются свойства материала оболочки, такие как динамический предел текучести и коэффициент динамической вязкости.

Очевидно, что при любых высокоскоростных вязкопластических течениях в большей или меньшей степени могут наблюдаться отмеченные выше явления. Заметим, что последовательный учет диссипативных потерь при интенсивных вязкопластических течениях в разнообразных задачах физики высоких плотностей энергии сдерживается из-за отсутствия достаточно развитых феноменологических моделей и соответствующего константного обеспечения. В данной работе авторы продолжают анализировать возможности модели вязкопластической среды и, в частности, зависимость коэффициента динамической вязкости от степени сжатия вещества в ударной волне.

1. Физическая картина высокоскоростного деформирования имеет довольно сложный характер [14—16]. Для процессов с различными законами деформирования, даже в узком диапазоне скоростей деформации, коэффициент вязкости не является строго постоянным. Действительно, в зависимости от масштаба рассматриваемого явления можно иметь дело с ассоциированным течением большого числа деформируемых кристаллов или ограничиться вязким течением в пределах одного или нескольких зерен, т.е. вязкостью реальной кристаллической структуры, обусловленной динамическим торможением подвижных дислокаций.

С другой стороны, в зависимости от интенсивности импульсной нагрузки может иметь место ряд эффектов, таких как рост числа сдвигов в зернах и деление последних на более мелкие блоки. Увеличение числа действующих в зернах плоскостей скольжения и вовлечение в деформацию новых систем, не действующих при меньших давлениях, увеличение плотности подвижных дислокаций и т.п., которые способствуют увеличению количества одновременно действующих элементарных межчастичных связей, и определяют соотношение скоростей размножения и блокирования подвижных дислокаций, т.е. в общем случае должна иметь место зависимость коэффициента динамической вязкости от состояния и скорости деформирования $\eta = \eta(\dot{\epsilon}, \rho, T)$.

Из анализа известных авторам публикаций, посвященных оценкам коэффициента динамической вязкости металлов с использованием широкого спектра методик (одноосное сжатие цилиндрических образцов [17, 18], внедрение в преграду недеформируемого бойка с конической головной частью [19], схлопывание цилиндрических оболочек с помощью энергии взрыва [12, 20], соударение пластин в режиме сварки взрывом [14, 15, 21], исследование затухания амплитуды упругого предвестника [22], скоростной зависимости сопротивления деформации [23, 24], измерение ширины фрон-

Таблица 1

Металл	$\dot{\epsilon}, \text{с}^{-1}$	$p, \text{ГПа}$	$\eta, \text{кПа} \cdot \text{с}$	Источник
Алюминий	$\geq 10^3$	—	1,5	[4]
	$10^5 - 10^7$	31	$2 \pm 0,5$	[2]
		68	10 ± 4	
		105	7 ± 2	
		202	< 2	
	6,3 3,8 8,3 11,0	1,1	2,4	[19]
		1,5	4,2	
		2,0	2,3	
		4,0	2,0	
	10^3	1,0	29,6	[17]
	$4,4 \cdot 10^5$	—	0,8	[20]
	10^5	3,6	3,1	[14, 15, 21]
		5,5	8,5	
	$10^2 - 10^3$	1,0	0,4	[22]
	$1,2 \cdot 10^8$	35,0	0,075	[16]
$1,1 \cdot 10^8$	40,6	0,10		
$4 \cdot 10^4$ $6 \cdot 10^5$ $7 \cdot 10^5$	2,1	0,40	[25]	
	3,7	0,10		
	8,7	0,05		
10^7	1,1—2	0,03	[26, 27]	
Свинец	$\geq 10^3$	—	3,7	[4]
	$10^5 - 10^7$	35	$3,7 \pm 1,4$	[2]
		41	15 ± 2	
		124	< 30	
	10^5	250	< 13	
		0,1—2	5,7	[14, 15]
10^7	0,6	0,04	[26, 27]	

та ударной волны [16, 25], изучение закономерностей распространения малых возмущений [1, 2] и кинетики откольного разрушения [26, 27]), следует вывод о том, что его величина в зависимости от условий испытаний может отличаться для одних и тех же металлов в пределах нескольких порядков.

В табл. 1 приведены экспериментальные данные, взятые из цитируемых выше источников, для алюминия и свинца как наиболее исследованных металлов в широком диапазоне изменения сжатия, которые подтверждают этот вывод.

К сожалению, в силу существующих ограничений экспериментальных методов не всегда удается явно выделить зависимость η только от кинематических параметров, например от скорости деформации $\dot{\epsilon}$, или только от термодинамических параметров, например давления и температуры. Тем не менее в ударно-волновых экспериментах эти параметры взаимосвязаны. Так, для слабой ударной волны с шириной фронта λ с учетом законов

сохранения имеет место связь $\dot{\epsilon} = \frac{u}{\lambda} = \frac{\sigma - 1}{\sigma} \frac{c_0}{\lambda}$. В случае сильной ударной волны при линейной зависимости $D = c_0 + bu$ скорость деформации опреде-

ляется выражением $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma - 1}{b - \sigma(b - 1)} \frac{c_0}{\lambda}$, где $\sigma = \rho/\rho_0$; ρ_0, ρ — плотность вещества перед и за фронтом ударной волны; D, u — скорость фронта ударной волны и массовая скорость вещества за фронтом при давлении p .

Так как температура T за фронтом ударной волны также однозначно определяется интенсивностью волны при известном уравнении состояния исследуемого материала и в расчетах реальных систем в рамках упруговязкопластических моделей среды [3] удобно оперировать независимыми тер-

динамическими переменными, то авторы применяли экспериментальные результаты [2], полученные в единой методической постановке при $\dot{\epsilon} = 10^5 - 10^7 \text{ с}^{-1}$, для анализа зависимости коэффициента вязкости за фронтом ударной волны в виде $\eta = \eta(\sigma, T)$. При экстраполяции зависимости $\eta = \eta(\sigma, T)$ к сжатию $\sigma = 1$ использованы данные [4], полученные при $\dot{\epsilon} \geq 10^3 \text{ с}^{-1}$. Близкими к ним являются и результаты [14, 15, 21] для алюминия и свинца при $\sigma = 1,04$ и $\dot{\epsilon} = 10^5 \text{ с}^{-1}$.

2. В рамках вязкопластической модели сплошной среды при высокоскоростных течениях необходимо знать изменение динамического предела текучести с температурой и сжатием. Наиболее естественно представить эту зависимость как функцию типа [3]

$$Y(\sigma, T) = Y_0 \exp(E_a(\sigma)/T)$$

(Y_0 — предел текучести, E_a — энергия активации).

Для коэффициента вязкости известно несколько аппроксимаций, авторы отдают предпочтение данным [2, 10], где зависимость коэффициента вязкости от температуры и степени сжатия твердого тела за фронтом ударной волны полагалась в виде (формула Френкеля — Эйринга)

$$(2.1) \quad \eta(\sigma, T) = \eta_0 \sigma \exp(E_a(\sigma)/T),$$

причем авторами [1] для работы, связанной с вязким движением при образовании вакансий, из качественных соображений получено

$$f(\sigma) = E_a(\sigma) = A + B\sigma^m.$$

Однако проведенные численные расчеты не позволили найти приемлемые с физической точки зрения значения постоянных A и B . Так, для алюминия с $\sigma \leq 1,13$ энергия активации становится отрицательной. Более подробный анализ сжимаемости различных твердых материалов и данных ударно-волновых экспериментов показал [28], что зависимость энергии активации от сжатия может быть более сложной, чем предложено в [1].

Очевидно, что по физическому смыслу

$$E_a(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma > 1,$$

$E_a(\sigma)$ является монотонной растущей функцией.

Обращая зависимость (2.1)

$$(2.2) \quad f(\sigma) = T(\ln \eta / \sigma - \ln \eta_0),$$

вычисляя значения f в точках (σ, T, η) при каком-то фиксированном η_0 (масштабный множитель) и варьируя η_i в пределах экспериментальной погрешности, можно заметить, что функция $f(\sigma)$ имеет вид ступеньки, что позволяет искать ее аналитическое представление в форме

$$f(\sigma) = A + B \operatorname{th} [C(\sigma - D)]$$

с ограничением $A > B$, $\sigma \in [1, 2]$.

Численные значения параметров η_0, A, B, C, D определяются из условия минимума функции (метод наименьших квадратов):

$$\Phi(\eta_0, A, B, C, D) = \sum_i (\eta_p(\sigma_i, T_i) - \eta_s(\sigma_i, T_i))^2$$

(η_p, η_s — расчетное и экспериментальное значение коэффициента вязкости соответственно). Для начальных значений параметров A, B, C, D и тем самым задания примерной области их изменения могут быть предложены следующие зависимости: $A - B = f(\sigma_1)$ (асимптотика функции $f(\sigma)$ слева), $A + B = f(\sigma_2)$ (асимптотика функции $f(\sigma)$ справа), $D = \sigma_3$ (значение σ , отвечающее середине резкого подъема функции $f(\sigma)$), $f'(D) = BC$ (наклон кривой $f = f(\sigma)$ в точке D), где $f(\sigma_1), f(\sigma_2), f(\sigma_3)$ определены (2.2).

Таблица 2

Металл	ρ , ГПа	σ	T, К	η_a	η_p	η_0	A	B	C	D
				кПа·с						
Алюминий	—	1	293	1,5	1,5					
	31	1,26	630	$2 \pm 0,5$	2,8					
	68	1,42	1600	10 ± 4	12,6	0,91	3360	3218	8,82	1,41
	105	1,56	3500	7 ± 2	8,2					
	202	1,83	10 100	< 2	3,2					
Свинец	—	1	293	3,7	3,7					
	35	1,36	1400	$3,7 \pm 1,4$	4,8					
	41	1,38	1700	15 ± 2	12,7	0,66	3799	3295	34,29	1,37
	124	1,65	7000	< 30	3,0					
	250	2,06	20 000	< 13	1,9					

При нахождении параметров η_0 , A, B, C, D был использован метод Бокса [29]. В табл. 2 приведены параметры, полученные в результате таких расчетов, характеризующие зависимость коэффициентов вязкости от температуры и сжатия, а также дано сравнение расчетных и экспериментальных значений коэффициентов вязкости свинца и алюминия для состояния за фронтом ударной волны.

На рис. 1, 2 представлены зависимости изменения эффективной энергии активации и коэффициента вязкости за фронтом ударной волны для рассматриваемых металлов соответственно.

3. Достигнутое удовлетворительное описание экспериментальных данных по динамической вязкости алюминия и свинца все же является предварительным, так как экспериментальные данные имеют достаточно большую погрешность и количество экспериментальных точек невелико. Анализ расчетных данных указывает на возможность плавления металла за фронтом ударной волны (рис. 1), а нетривиальная зависимость коэффициента вязкости от интенсивности ударной волны (рис. 2), по-видимому, может быть качественно интерпретирована конкуренцией процессов, связанных с сжатием материала и тепловыми процессами.

Заметим, что полученные результаты качественно согласуются с результатами работ [24, 30], где для алюминия при $\dot{\epsilon}_n > 10^5 \text{ с}^{-1}$ наблюдались локальное увеличение вязкости и последующее ее уменьшение. Качественно аналогичный вид имеют также зависимости динамического предела текучести [31] и откольной прочности [32] от сжатия материала за фронтом ударной волны. Хотя коэффициенты вязкости алюминия и свинца найдены для состояния за фронтом ударной волны, тем не менее с учетом данных [4,

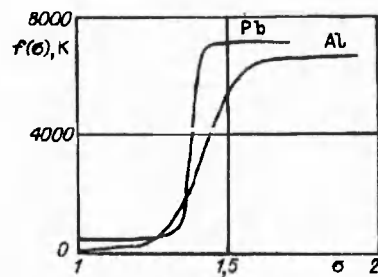
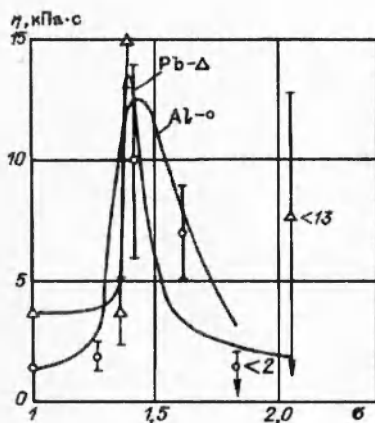


Рис. 2

Рис. 1

14, 15, 21] можно надеяться, что эти зависимости будут с определенной точностью справедливы при экстраполяции на состояния вне ударной волны.

Представляется целесообразным дальнейшее проведение экспериментальных исследований как в методическом плане, так и для уточнения вида зависимости $\eta = \eta(\sigma, T)$, в том числе с использованием других металлов.

Авторы выражают благодарность Т.А. Моховой и Г.А. Тонковой за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахаров А.Д., Зайдель Р.М., Минеев В.Н., Олейник В.Г. Экспериментальное исследование устойчивости ударной волны и механических свойств веществ при высоких давлениях и температурах // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159, № 4. — С. 1019—1022.
2. Минеев В.Н., Савинов Г.В. Вязкость и температура плавления алюминия, свинца и хлористого натрия при ударном сжатии // ЖЭТФ. — 1967. — Т. 52, вып. 3. — С. 629—636.
3. Огородников В.А., Садовой А.А., Софронов В.Н., Тюнькин Е.С. Экспериментально-теоретическое исследование сжатия цилиндрических оболочек взрывом с учетом диссипативных процессов // 5-е Всесоюзное совещание по детонации. — Красноярск, 1991. — Т. 2. — С. 209—213.
4. Степанов Г.В. Упругопластическое деформирование и разрушение материалов при импульсных нагружениях. — Киев: Наук. думка, 1991.
5. Баженов А.В., Глушак Б.Л., Новиков С.А. Сопротивление материалов пластической деформации при высокоскоростном деформировании в ударных волнах. — М.: ВНИИЭФ, 1990.
6. Садовой А.А. Диссипативные процессы при вязкопластических течениях // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. — 1989. — Вып. 1. — С. 19—22.
7. Черный Г.Г. Механизм аномально низкого сопротивления движения тел в твердых средах // Тр. МИАН. — 1989. — С. 40—47.
8. Иванов А.Г. Локальный и интегральный энергетические подходы в проблеме разрушения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. — Горький: ГГУ, 1990. — Вып. 46. — С. 4—20.
9. Чечин Э.В. Систематизация конструкционных материалов по уровню деформационного упрочнения и разработка энергетического метода определения допускаемых напряжений и законов прочности // Пробл. прочности. — 1992. — № 2. — С. 48—53.
10. Финкель Б.М. Физика разрушения. — М.: Металлургия, 1972.
11. Мапошкин Н.И., Тришин Ю.А. О некоторых эффектах, возникающих при взрывном обжатии вязкой цилиндрической оболочки // ПМТФ. — 1978. — № 3. — С. 99—112.
12. Мапошкин Н.И., Тришин Ю.А. Взрывное испарение вещества вязкой цилиндрической оболочки при ее схлопывании к центру // Письма в ЖТФ. — 1977. — Т. 3, вып. 10. — С. 455—458.
13. Садовой А.А., Чулков Н.М. Инерционное схлопывание цилиндрических и сферических оболочек из несжимаемых вязкопластических материалов // ВАНТ. Сер. Методы и программы численного решения задач математической физики. — 1986. — Вып. 2. — С. 50—58.
14. Захаренко И.Д., Мали В.И. Вязкость металлов при сварке взрывом // Горение и взрыв. — М.: Наука, 1972. — С. 575—578.
15. Дерибас А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом. — Новосибирск, 1980.
16. Chhabildas L.C., Asay J.R. Rise-time measurements of shock transitions in aluminum, copper and steel // J. Appl. Phys. — 1979. — V. 50, N 4. — P. 2749—2756.
17. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела // Учен. зап. МГУ. Механика. — 1940. — Вып. 39. — С. 3—81.
18. Ильюшин А.А. Об испытании образцов при больших скоростях // Инж. сб. — 1941. — Т. 1, № 1. — С. 13—26.
19. Степанов Г.В., Ващенко А.П. Определение коэффициента вязкости алюминиевого сплава Д-16 при внедрении конуса // Пробл. прочности. — 1984. — № 10. — С. 109—113.
20. Трунов В.Л. Вязкость цилиндрических оболочек, обжимаемых продуктами детонации // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1979. — Вып. 42. — С. 69—79.
21. Годунов С.К., Дерибас А.А., Захаренко И.Д., Мали В.И. Исследование вязкости металлов при высокоскоростных соударениях // ФГВ. — 1971. — № 1. — С. 135—141.
22. Степанов Г.В. Коэффициент вязкости металлических материалов при высокоскоростном деформировании в упругопластических волнах // Детонация. Критические явления. Физико-химические превращения в ударных волнах. — Черногоровка: ОПХФ АН СССР, 1978. — С. 106—111.
23. Канель Г.И. Вязкоупругие свойства металлов в ударной волне // Там же. — С. 101—105.
24. Stepanov G.V., Kharchenko V.V. Dynamic plasticity of metals at strain Rates of $10^5 \dots 10^7 \text{ s}^{-1}$ // High Energy Rate Fabrication: 10th Intern. Conf., Ljubljana, Yugosl., Sept. 1989.
25. Альтшулер Л.В., Чекин Б.С. Структура ударных волн и определяющие уравнения металлов // ПМТФ. — 1987. — № 6. — С. 119—128.

26. Barbee T.W., Seaman L. et al. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // J. Materials. — 1972. — V. 7, N 3.
27. Голубев В.К. О расширении пор в пластических металлах при отколе // ПМТФ. — 1983. — № 6. — С. 159—165.
28. Садовой А.А., Чулков Н.М., Феодоритов В.П. Восстановление параметров уравнения состояния по экспериментальным данным // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 1991. — Вып. 1. — С. 61—65.
29. Voh M.J. New method of constrained optimization and comparison with other methods // Computer J. — 1965. — V. 8, N 1. — P. 42—52.
30. Степанов Г.В., Харченко В.В. Особенности деформирования металлов при скоростях деформаций выше 10^4 с^{-1} // Пробл. прочности. — 1985. — № 8. — С. 59—64.
31. Батьков Ю.В., Глушак Б.Л., Новиков С.А. Прочность алюминия, меди и стали за фронтом УВ // ФГВ. — 1989. — № 5. — С. 126—132.
32. Огородников В.А., Иванов А.Г., Тюнькин Е.С. и др. Зависимость откольной прочности металлов от амплитуды ударно-волновой нагрузки // ФГВ. — 1992. — № 1. — С. 94—98.

г. Арзамас-16

Поступила 3/VI 1993 г.,
в окончательном варианте — 4/II 1994 г.

УДК 532.592.2 + 517.958

В.М. Тешуков

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена математическая модель длинноволновой аппроксимации для движения слоя завихренной идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей над ровным дном. В смешанной эйлерово-лагранжевой системе координат уравнения движения представлены в виде системы законов сохранения массы, полного импульса и завихренности. Эта система законов сохранения положена в основу определения разрывных решений интегродифференциальных уравнений теории длинных волн. Исследованы свойства соотношений на гидравлическом прыжке. Показано, что в зависимости от параметров набегающего потока могут возникать два различных типа прыжка. Установлено, что для любого сдвигового сверхкритического течения перед прыжком соотношения на разрыве позволяют определить параметры течения за фронтом прыжка. Рассмотрен пример стационарного решения, зависящего от параметра, на котором иллюстрируется переход от одного типа прыжка к другому.

Уравнения длинных волн для завихренной жидкости рассматривались в ряде работ. В [1, 2] получены бесконечные серии законов сохранения, в [3] построены точные стационарные решения, описывающие течения с критическим слоем. В [4, 5] построены частные решения типа простых волн. В [6] выяснены условия гиперболичности уравнений движения.

1. Формулировка математической модели. Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \rho(u_T + uu_x + vv_y) + p_x = 0, \\
 & \epsilon^2 \rho(v_T + uv_x + vv_y) + p_y = -\rho g, \quad 0 \leq Y \leq h(X, T), \\
 & u_x + v_y = 0, \\
 & h_T + u(X, h, T)h_x = v(X, h, T), \quad p(X, h, T) = p_0 = \text{const}, \\
 & v(X, 0, T) = 0, \quad u(X, Y, 0) = u_0(X, Y), \quad h(X, 0) = h_0(X),
 \end{aligned}$$