

AMS subject classification: 65R20, 65Q20, 45D05

Анализ сходимости многошагового метода коллокации для решения обобщенных интегральных уравнений автосвертки Вольтерра

П. Дарания, С. Пишбин, А. Эбади

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Urmia University, Urmia, Iran

E-mails: p.darania@urmia.ac.ir (Дарания П.), s.pishbin@urmia.ac.ir (Пишбин С.), azamebadi172@gmail.com (Эбади А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 16, 2023.

Дарания П., Пишбин С., Эбади А. Анализ сходимости многошагового метода коллокации для решения обобщенных интегральных уравнений автосвертки Вольтерра // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 149–160.

В этом исследовании мы вводим многошаговые методы коллокации (МШМК) для решения интегральных уравнений Вольтерра (ИУВ) типа автосвертки, такие что без увеличения вычислительных затрат порядок сходимости предлагаемых одношаговых методов коллокации будет увеличен. Анализ сходимости МШМК исследуется с использованием теорем Пеано для интерполяции, и приводятся два численных примера для демонстрации значительного преимущества МШМК.

DOI: 10.15372/SJNM20230203

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра типа автосвертки, анализ сходимости, многошаговые методы коллокации.

Darania P., Pishbin S., Ebadi A. Convergence analysis of multi-step collocation method to solve generalized auto-convolution Volterra integral equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 149–160.

In this study, we introduce multi-step collocation methods (MSCM) for solving the Volterra integral equation (VIE) of the auto-convolution type such that without increasing the computational cost, the order of convergence of the proposed one-step collocation methods will be increased. A convergence analysis of the MSCM is investigated using the Peano theorems for interpolation and, finally, two numerical examples are introduced to clarify the significant advantage of the MSCM.

Keywords: auto-convolution Volterra integral equation, Convergence analysis, Multi-step collocation methods.

1. Введение

Нелинейные ИУВ участвуют во многих процессах математического моделирования в области физических и биологических наук; здесь следует упомянуть динамику населения, распространение эпидемий [2, 3], волновые задачи, обратные задачи, связанные с распространением волн [14], и полупроводниковые устройства. ИУВ автосвертки — это нелинейные ИУВ, используемые в теории вязкоупругости [8], а также при расчете некоторых функций [7].

Обобщенное интегральное уравнение Вольтерра типа автосвертки (ОИУВА) имеет вид

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t, \tau) y(t - \tau) y(\tau) d\tau, \quad t \in I := [0, T], \quad (1.1)$$

где K и g — заданные функции, $y(t)$ — неизвестное решение.

Разрешимость основных ОИУВА при $K(t, \tau) \equiv \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ исследовалась некоторыми авторами [5] с использованием методов преобразования Лапласа. Кроме того, фон Вольферсдорф и Янно рассмотрели другие классы ОИУВА (1.1) с пространственными ядрами [9, 4]. Недавно Жанг с соавторами [6] исследовали теоремы существования и единственности, а также некоторые свойства решения ОИУВА (1.1). Они установили общие свойства сходимости кусочно-полиномиальных коллокационных решений этого уравнения.

Существует множество численных подходов к решению уравнения (1.1), таких как методы коллокации [13, 17], краевые методы коллокации [10], операционный Тау-метод [11, 12] и спектральные методы Галеркина [16]. В данной статье мы применяем многошаговые методы коллокации для решения этого типа уравнений. Структура метода аналогична одношаговому методу коллокации и такова, что порядок сходимости предлагаемых одношаговых методов коллокации увеличится без увеличения вычислительных затрат. Точнее, здесь мы получим общий класс многошаговых методов коллокации, зависящих от фиксированного числа r на предыдущих временных шагах, с целью повышения порядка классических одношаговых методов коллокации [13]. Мы построим многошаговые методы коллокации путем добавления условий интерполяции в точках предыдущего шага r . Мы докажем, что если классические одношаговые методы коллокации имеют единый порядок m при любом выборе параметров коллокации, то r -шаговые m -точечные методы коллокации имеют единый порядок $m + r$.

Ниже формулируется теорема существования и единственности уравнения (1.1), многошаговая схема коллокации приводится в пункте 2. В п. 3 мы будем изучать сходимость МШМК. Численные примеры представлены в п. 4.

2. Численный метод для ОИУВА

Здесь мы сначала сформулируем теорему существования и единственности уравнения (1.1), а затем обсудим МШМК.

Теорема 1 [13]. *Предположим, что заданные функции в (1.1) удовлетворяют условию $g \in C^m(I)$, $K \in C^m(D)$, где $D = \{(t, \tau) \mid 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$ при $m \geq 1$. Тогда единственное решение (1.1) удовлетворяют условию $y \in C^m(I)$.*

Далее рассмотрим теорему 1, используя МШМК для (1.1). Пусть

$$I_h := \{t_n = nh, \ n = 0, 1, \dots, N \ (t_n = T)\}$$

при $h = T/N$ ($N > 0$), а также

$$X_h := \{t_{n,i} = t_n + c_i h : 0 < c_1 < \dots < c_m \leq 1 \ (0 \leq n \leq N - 1)\},$$

где $t_{n,i}$ — точки коллокации, $\{c_i\}$ — параметры коллокации. Будем считать u^n приближенным решением y в $[t_n, t_{n+1}]$ с использованием

$$u^n(t_n + \tau h) = \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k(\tau) y_{n-k} + \sum_{j=1}^m \psi_j(\tau) U_{n,j}, \quad \tau \in (0, 1], \quad U_{n,j} = u^n(t_{n,j}), \quad n = r, \dots, N-1, \quad (2.1)$$

где

$$\varphi_k(\tau) = \prod_{i=1}^m \frac{\tau - c_i}{-k - c_i} \prod_{i=0, i \neq k}^{r-1} \frac{\tau + i}{-k + i}, \quad \psi_j(\tau) = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{\tau + i}{c_j + i} \prod_{i=1, i \neq j}^m \frac{\tau - c_i}{c_j - c_i}. \quad (2.2)$$

Обратите внимание, что начальные значения $y_1, y_2, \dots, y_r$ в (2.1) можно получить с использованием подходящих классических одношаговых методов. Возьмем u такое, что уравнение коллокации

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t, \tau) u(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

удовлетворяется для $t \in X_h$. Поэтому на $[t_n, t_{n+1}]$ мы имеем

$$\begin{aligned} u^n(t_{n,i}) &= g(t_{n,i}) + \int_0^{t_{n,i}} K(t_{n,i}, \tau) u(t_{n,i} - \tau) u(\tau) d\tau \\ &= g(t_{n,i}) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} K(t_{n,i}, \tau) u^0(t_{n,i} - \tau) u^n(\tau) ds + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k,i}} K(t_{n,i}, \tau) u^{n-k}(t_{n,i} - \tau) u^k(\tau) d\tau + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_{k,i}}^{t_{k+1}} K(t_{n,i}, \tau) u^{n-k-1}(t_{n,i} - \tau) u^k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Замечание 1. Ясно, что уравнение (2.4) является нелинейным только для $u^0(t)$ ($n = 0$) и линейным для каждого $u^n(t)$ ($n = 1, \dots, N-1$). В [13] это уравнение рассматривалось отдельно в двух случаях: нелинейном и линейном. Обратите внимание, что для МШМК мы имеем $n = r, \dots, N-1$. Значит, предлагаемое уравнение является линейным.

Вставляя (2.1) в (2.4) и используя подходящую замену переменных, имеем

$$\begin{aligned} U_{n,i} &= g(t_{n,i}) + h \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_n + \tau h) u^0((c_i - \tau)h) (\varphi_k(\tau) y_{n-k}) d\tau + \\ &\quad h \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_n + \tau h) u^0((c_i - \tau)h) (\psi_j(\tau) U_{n,j}) d\tau + \\ &\quad h \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau) y_{n-k}) u^0(\tau h) d\tau + \\ &\quad h \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, \tau h) (\psi_j(c_i - \tau) U_{n,j}) u^0(\tau h) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h \sum_{l=1}^{r-2} \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau) y_{n-l-k}) u^l(t_l + \tau h) d\tau \\
& h \sum_{l=1}^{r-2} \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(c_i - \tau) U_{n-l,j}) u^l(t_l + \tau h) d\tau \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r+1} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{p=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau) y_{n-l-k}) (\varphi_p(\tau) y_{l-p}) d\tau + \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r+1} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau) y_{n-l-k}) (\psi_j(\tau) U_{l,j}) d\tau + \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r+1} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(c_i - \tau) U_{n-l,j}) (\varphi_k(\tau) y_{l-k}) d\tau \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r+1} \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(c_i - \tau) U_{n-l,j}) (\psi_q(\tau) U_{l,q}) d\tau + \\
& h \sum_{l=n-r+2}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (u^{n-l}(t_{n-l} + (c_i - \tau)h)) (\varphi_k(\tau) y_{l-k}) d\tau + \\
& h \sum_{l=n-r+2}^{n-1} \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (u^{n-l}(t_{n-l} + (c_i - \tau)h)) (\psi_j(\tau) U_{l,j}) d\tau + \\
& h \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{k=0}^{r-1} \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(1 + c_i - \tau) y_{n-l-1-k}) u^l(t_l + \tau h) d\tau + \\
& h \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{j=1}^m \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(1 + c_i - \tau) U_{n-l-1,j}) u^l(t_l + \tau h) d\tau + \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{p=0}^{r-1} \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(1 + c_i - \tau) y_{n-l-1-k}) (\varphi_p(\tau) y_{l-p}) d\tau + \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=1}^m \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(1 + c_i - \tau) y_{n-l-1-k}) (\psi_j(\tau) U_{l,j}) d\tau + \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{r-1} \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(1 + c_i - \tau) U_{n-l-1,j}) (\varphi_k(\tau) y_{l-k}) d\tau + \\
& h \sum_{l=r-1}^{n-r} \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^m \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(1 + c_i - \tau) U_{n-l-1,j}) (\psi_q(\tau) U_{l,q}) d\tau + \\
& h \sum_{l=n-r+1}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (u^{n-l-1}(t_{n-l} + (c_i - \tau)h)) (\varphi_k(\tau) y_{l-k}) d\tau + \\
& h \sum_{l=n-r+1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (u^{n-l-1}(t_{n-l} + (c_i - \tau)h)) (\psi_j(\tau) U_{l,j}) d\tau. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Перепишем приведенное выше уравнение в матричном виде:

$$\begin{aligned}
 [I - h\bar{B}_n]U_n = G_n + h\tilde{B}_n Y_n + h \sum_{l=1}^{r-2} [\tilde{B}_n^{(l)} Y_{n-l} + \bar{B}_n^{(l)} U_{n-l}] + \\
 h \sum_{l=r-1}^{n-r+1} [(\tilde{C}_n^{(l)} + \bar{C}_n^{(l)}) Y_{n-l} + (\tilde{D}_n^{(l)} + \bar{D}_n^{(l)}) U_{n-l}] + \\
 h \sum_{l=n-r+2}^{n-1} [\tilde{E}_n^{(l)} Y_l + \bar{E}_n^{(l)} U_l] + \\
 h \sum_{l=0}^{r-2} [(\tilde{B}_n^{(l)}) Y_{n-l-1} + (\bar{B}_n^{(l)}) U_{n-l-1}] + \\
 h \sum_{l=r-1}^{n-r} [(\tilde{C}_n^{(l)} + \bar{C}_n^{(l)}) Y_{n-l-1} + (\tilde{D}_n^{(l)} + \bar{D}_n^{(l)}) U_{n-l-1}] + \\
 \sum_{l=n-r+1}^{n-1} [(\tilde{E}_n^{(l)}) Y_l + (\bar{E}_n^{(l)}) U_l], \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Y_l &:= (y_l, \dots, y_{l-r+1})^\top, \quad U_l := (U_{l,1}, \dots, U_{l,m})^\top, \quad G_n := (g(t_{n,1}), \dots, g(t_{n,m}))^\top, \\
 (\tilde{B}_n)_{i,k} &:= \int_0^{c_i} [K(t_{n,i}, t_n + \tau h) u^0((c_i - \tau)h) \varphi_k(\tau) + K(t_{n,i}, \tau h) \varphi_k(c_i - \tau) u^0(\tau h)] d\tau \\
 &\quad (i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r-1), \\
 (\bar{B}_n)_{i,j} &:= \int_0^{c_i} [K(t_{n,i}, t_n + \tau h) u^0((c_i - \tau)h) \psi_j(\tau) + K(t_{n,i}, \tau h) (\psi_j(c_i - \tau)) u^0(\tau h)] d\tau \\
 &\quad (i, j = 1, \dots, m), \\
 (\tilde{B}_n^{(l)})_{i,k} &:= \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau)) u^l(t_l + \tau h) d\tau \\
 &\quad (i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r-1), \\
 (\bar{B}_n^{(l)})_{i,j} &:= \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(c_i - \tau)) u^l(t_l + \tau h) d\tau \quad (i, j = 1, \dots, m), \\
 (\tilde{C}_n^{(l)})_{i,k} &:= \sum_{p=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau)) \varphi_p(\tau) y_{l-p} d\tau \\
 &\quad (i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r-1), \\
 (\bar{C}_n^{(l)})_{i,k} &:= \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(c_i - \tau)) \psi_j(\tau) U_{l,j} d\tau \\
 &\quad (i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, r-1), \\
 (\tilde{D}_n^{(l)})_{i,j} &:= \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(c_i - \tau)) (\varphi_k(\tau)) y_{l-k} d\tau \quad (i, j = 1, \dots, m), \\
 (\bar{D}_n^{(l)})_{i,j} &:= \sum_{q=1}^m \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\psi_j(c_i - \tau)) (\psi_q(\tau) U_{l,q}) d\tau \quad (i, j = 1, \dots, m),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{E}_n^{(l)})_{i,k} &:= \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (u^{n-l}(t_{n-l} + (c_i - \tau)h)) \varphi_k(\tau) d\tau \\
&\quad (i = 1, \dots, m, k = 0, \dots, r-1), \\
(\bar{E}_n^{(l)})_{i,j} &:= \int_0^{c_i} K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (u^{n-l}(t_{n-l} + (c_i - \tau)h)) \psi_j(\tau) d\tau \quad (i, j = 1, \dots, m).
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
(\tilde{B}_n^{(l)})_{i,k} &:= \int_{c_i}^1 K(t_{n,i}, t_l + \tau h) (\varphi_k(1 + c_i - \tau)) u^l(t_l + \tau h) d\tau \\
&\quad (i = 1, \dots, m, k = 0, \dots, r-1),
\end{aligned}$$

и матрицы $(\bar{B}_n^{(l)})_{i,j}, (\tilde{C}_n^{(l)})_{i,k}, \dots, (\bar{E}_n^{(l)})_{i,j}$ известны.

Теперь мы можем получить приближенное решение (1.1), подставив U_n в качестве решения полученной линейной системы в (2.1).

3. Анализ сходимости

Для анализа сходимости сначала вспомним следующую лемму:

Лемма 1 [1]. Пусть $y \in \mathbb{R}$, $H \in C^p$, $p = m + r$. Тогда точное решение интегрального уравнения

$$y(t) = g(t) + \int_0^t H(t, \tau) y(\tau) d\tau, \quad t \in I := [0, T], \quad (3.1)$$

при любом выборе параметров коллокации $\{c_j \mid c_1 = 0, c_m = 1, c_i \neq c_j\}$ удовлетворяет

$$y(t_n + \tau h) = \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k(\tau) y(t_{n-k}) + \sum_{j=1}^m \psi_j(\tau) y(t_{n,i}) + h^p R_{m,r,n}(\tau), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}
R_{m,r,n}(\tau) &= \int_{-r+1}^1 K_{m,r}(\tau, v) y^{(p)}(t_n + v h) dv, \\
K_{m,r}(\tau, v) &= \frac{1}{(p-1)!} \left\{ (\tau - v)_+^{p-1} - \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k(\tau) (-k - v)_+^{p-1} - \sum_{j=1}^m \psi_j(\tau) (c_j - v)_+^{p-1} \right\}
\end{aligned}$$

и $\varphi_k(\tau), \psi_j(\tau)$ известны.

Для достижения нашей цели рассмотрим уравнение (3.1) и для сокращения записи определим:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) &= K(t_{n,i}, t_l + \tau h) u(t_{n-l} + (c_i - \tau)h) + \\
&\quad K(t_{n,i}, t_{n-l} + (c_i - \tau)h) u(t_{n-l} + (c_i - \tau)h), \quad l = 0, 1, \dots, n, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$(F_n^{(l)})_{ik} = \begin{cases} \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) \varphi_k(\tau) d\tau, & l = r, r+1, \dots, n-1, \\ \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) \varphi_k(\tau) d\tau, & l = n, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$(B_n^{(l)})_{ij} = \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) \psi_j(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

$$(B_n)_{ij} = \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) \psi_j(\tau) d\tau, \quad (3.6)$$

$$(\bar{\rho}_n^{(l)})_i = \begin{cases} \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) q_l(\tau) d\tau, & l = 0, \dots, r-1, \\ \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) R_{m,r,l}(\tau) d\tau, & l = r, r+1, \dots, n-1, \\ \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) R_{m,r,n}(\tau) d\tau, & l = n. \end{cases} \quad (3.7)$$

Теорема 2. Пусть заданная функция в (1.1) удовлетворяет $g \in C^p(I)$, $K \in C^p(D)$. Тогда при любом выборе $\{c_i \mid 0 < c_1 < \dots < c_m \leq 1\}$ существует $h > 0$, такое что

$$\|y - u^n\|_\infty \leq Ch^p,$$

где $C = (c_i, y^{(p)})$ — конечная постоянная.

Доказательство. Используя уравнения (2.1) и (3.2) для $\tau \in [0, 1]$, имеем

$$\varepsilon_h(t_n + \tau h) = \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k(\tau) \varepsilon_{n-k} + \sum_{j=1}^m \psi_j(\tau) \varepsilon_{n,j} + h^p R_{m,r,n}(\tau), \quad n \geq r, \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_{n-k} := y(t_{n-k}) - u(t_{n-k})$, $\varepsilon_{n,i} := y(t_{n,i}) - u(t_{n,i})$. Кроме того,

$$\varepsilon_{n,i} = \int_0^{t_{n,i}} K(t_{n,i}, \tau) [u(t_{n,i} - \tau)u(\tau) - u_h(t_{n,i} - \tau)u_h(\tau)] d\tau. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) после некоторых вычислений можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_{n,i} = h \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) \varepsilon_h^n(t_n + \tau h) d\tau + h \sum_{l=0}^{n-1} \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) \varepsilon_h^l(t_l + \tau h) d\tau, \quad (3.10)$$

где $\hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h)$ задано в (3.3). Вспомнив уравнения (3.2) и (3.10), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,i} = & h \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) \varphi_k(\tau) \varepsilon_{n-k}(\tau) d\tau + h \sum_{j=1}^m \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) \psi_j(\tau) \varepsilon_{n,j}(\tau) d\tau + \\ & h^{p+1} \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_n + \tau h) R_{m,r,n}(\tau) d\tau + h \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) \varphi_k(\tau) \varepsilon_{l-k}(\tau) d\tau + \\ & h \sum_{j=1}^m \int_0^1 \hat{K}_l(t_{n,i}, t_l + \tau h) \psi_j(\tau) \varepsilon_{l,j}(\tau) d\tau + h^{p+1} \sum_{l=0}^{n-1} \int_0^{c_i} \hat{K}_n(t_{n,i}, t_l + \tau h) R_{m,r,l}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из предположения о начальной ошибке имеем

$$\varepsilon(t_l + \tau h) = h^p q_l(\tau), \quad l = 0, \dots, r-1, \quad \tau \in [0, 1], \quad (3.12)$$

при $\|q_l\|_\infty \leq C_1$, не зависящем от h . Подставив выражения (3.8) и (3.12) в уравнение (3.11), мы получим

$$\begin{bmatrix} I - hB_n & -hF_n^{(n)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_n^{(2)} \\ \epsilon_n^{(1)} \end{bmatrix} = h \sum_{l=r}^{n-1} \begin{bmatrix} B_n^{(l)} & F_n^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_l^{(2)} \\ \epsilon_l^{(1)} \end{bmatrix} + h^{p+1} \sum_{l=0}^n \tilde{\rho}_n^{(l)}, \quad n \geq r, \quad (3.13)$$

где $\epsilon_l^{(1)} = (\varepsilon_{l-r+1}, \dots, \varepsilon_l)^\top \in \mathbb{R}^r$, $\epsilon_l^{(2)} = (\varepsilon_{l,1}, \dots, \varepsilon_{l,m})^\top \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\rho}_n^{(l)} \in \mathbb{R}^m$, $F_n^{(l)} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $B_n, B_n^{(l)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ определены в (3.4)–(3.7).

Выражение (3.8) при $l-1$ вместо n и $\tau = 1$ может быть приведено к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_l^{(2)} \\ \epsilon_l^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{l-1}^{(2)} \\ \epsilon_{l-1}^{(1)} \end{bmatrix} + h^p \tilde{\rho}_{m,r,l-1}, \quad (3.14)$$

где A задается следующим образом:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0_{r-1,1} & I_{r-1} \\ \hline \varphi_{r-1}(1) & \varphi_{r-2}(1), \dots, \varphi_0(1) \end{array} \right],$$

и

$$S = \begin{bmatrix} 0_{r-1,m} \\ \psi^T(1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\rho}_{m,r,j} = \begin{bmatrix} 0_{r-1,1} \\ R_{m,r,j}(1) \end{bmatrix}, \quad \psi(1) = [\psi_0(1), \dots, \psi_m(1)]^\top.$$

Следовательно, матричная форма уравнений (3.13) и (3.14) такова:

$$\begin{bmatrix} I - hB_n & -hF_n^{(n)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_n^{(2)} \\ \epsilon_n^{(1)} \end{bmatrix} = h \sum_{l=r}^{n-1} \begin{bmatrix} B_n^{(l)} & F_n^{(l)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_l^{(2)} \\ \epsilon_l^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{n-1}^{(2)} \\ \epsilon_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} + h^{p+1} \sum_{l=0}^n \tilde{\rho}_n^{(l)} + h^p \tilde{\rho}_{m,r,n-1}, \quad n \geq r. \quad (3.15)$$

Все элементы матрицы B_n ограничены, поскольку ядра $\hat{K}_n$ непрерывны в своих областях. При использовании леммы Неймана обратная матрица $I_m - hB_n$ существует всякий раз, когда $h\|B_n\| < 1$, и это верно, когда h достаточно мало. Другими словами, имеется $\bar{h} > 0$ такое, что для любой сетки Π_N при $h < \bar{h}$ каждая матрица $I_m - hB_n$ имеет равномерно ограниченную обратную матрицу. Таким образом, в уравнении (3.15) мы имеем

$$\begin{bmatrix} I - hB_n & -hF_n^{(n)} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - hB_n)^{-1} & h(I - hB_n)^{-1}F_n^{(n)} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Тогда уравнение (3.15) принимает вид

$$\begin{bmatrix} \epsilon_n^{(2)} \\ \epsilon_n^{(1)} \end{bmatrix} = h \sum_{l=r}^{n-1} \begin{bmatrix} (I - hB_n)^{-1}B_n^{(l)} & (I - hB_n)^{-1}F_n^{(l)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_l^{(2)} \\ \epsilon_l^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h(I - hB_n)^{-1}F_n^{(n)}S & h(I - hB_n)^{-1}F_n^{(n)}A \\ S & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{n-1}^{(2)} \\ \epsilon_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} + O(h^p), \quad n \geq r. \quad (3.17)$$

Теперь из анализа ошибки метода коллокаций для ИУВ [7] получим

$$\|\epsilon_n^{(l)}\|_1 = O(h^p), \quad l = 1, 2.$$

Таким образом, исходя из уравнения (3.8), существует постоянная C такая, что

$$\|u - u_h\|_\infty = \sup_{t \in I} |\epsilon(t)| \leq \max_{0 \leq n \leq N-1} \left(\|\epsilon_n^{(1)}\|_1 + \|\epsilon_n^{(2)}\|_1 \right) + h^p K_{m,r} M_{m,r} \leq Ch^p,$$

где

$$K_{m,r} := \max_{\tau \in [0,1]} \int_0^{1-r} |K_{m,r}(\tau, v)| dv, \quad M_{m,r} := \|y^{(p)}\|_\infty. \quad \square$$

4. Численные примеры

Здесь мы решаем два примера с помощью МШМК. Все вычисления выполнены с использованием программного обеспечения Mathematica. Мы берем начальные значения из известных точных решений.

Пример 1 [13]. Рассмотрим ОИУВА следующего вида:

$$u(t) = \beta t e^{-\gamma t} \beta^2 e^{-\gamma t} (t + t \cos t - 2 \sin t) - \int_0^t K(t, \tau) u(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 1],$$

при $K(t, \tau) = \cos(t - \tau)$ и точном решении $u(t) = \beta t e^{-\gamma t}$.

Пример 2. Рассмотрим ОИУВА следующего вида:

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t, \tau) u(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 1],$$

где $K(t, \tau) = -(t^2 + \tau^2)$. Предположим, что точное решение имеет вид $u(t) = t \cos t - 2t + 4$. Тогда мы можем получить $g(t)$.

Используем МШМК при $m = 2$, $r = 3$, взяв $c_1 = 0.7$ и $c_2 = 1$. Предположим, что $\beta = \gamma = 1$ в примере 1. Максимальные ошибки и порядки сходимости для различных значений N приведены в таблицах 1 и 2. Численные результаты с использованием МШМК сравниваются с численными результатами, приведенными в [13].

Таблица 1. Абсолютные ошибки и порядок сходимости для примера 1

N	Максимальные ошибки	Порядки	Используемое время, с	Максимальные ошибки [13]	Порядки [13]	Используемое время [13], с
4	1.07×10^{-7}	2.88	0.328	2.31×10^{-3}	1.94	0.375
8	1.45×10^{-8}	4.41	0.484	6.02×10^{-4}	1.97	0.546
16	6.79×10^{-10}	4.77	0.811	1.52×10^{-4}	1.99	1.937

Таблица 2. Абсолютные ошибки и порядок сходимости для примера 2

N	Максимальные ошибки	Порядки	Используемое время, с	Максимальные ошибки [13]	Порядки [13]	Используемое время [13], с
4	3.76×10^{-6}	5.67	0.343	1.87×10^{-3}	1.26	0.734
8	7.38×10^{-8}	5.35	0.468	7.80×10^{-4}	1.53	1.059
16	1.81×10^{-9}	5.12	0.861	2.69×10^{-4}	1.72	1.374

Замечание 2. Подобно ИУВ второго рода, которые исследуются в [1], сверхсходимость МШМК для уравнения (1.1) при $m = 2$, $r = 3$ может быть получена, если взять параметры коллокации $c_1 = \frac{21}{38}$ и $c_2 = 1$. В примерах 1 и 2 мы рассматриваем эти параметры коллокации; результаты приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Абсолютные ошибки и порядок сверхсходимости для примера 1

N	Максимальные ошибки	Порядки	Максимальные ошибки [13]	Порядки [13]
4	4.4×10^{-8}	5.07	1.44×10^{-3}	1.973
8	1.3×10^{-9}	5.71	3.67×10^{-4}	1.993
16	2.48×10^{-11}	5.86	9.22×10^{-5}	1.998

Таблица 4. Абсолютные ошибки и порядок сверхсходимости для примера 2

N	Максимальные ошибки	Порядки	Максимальные ошибки [13]	Порядки [13]
4	2.68×10^{-6}	6.07	3.07×10^{-3}	1.45
8	3.98×10^{-8}	6.14	1.12×10^{-3}	1.57
16	5.65×10^{-10}	6.06	3.75×10^{-4}	1.76

На рис. 1 и 2 представлены графики функций ошибки многошаговой коллокации в узлах сетки при $N = 32$ для примеров 1 и 2 соответственно.

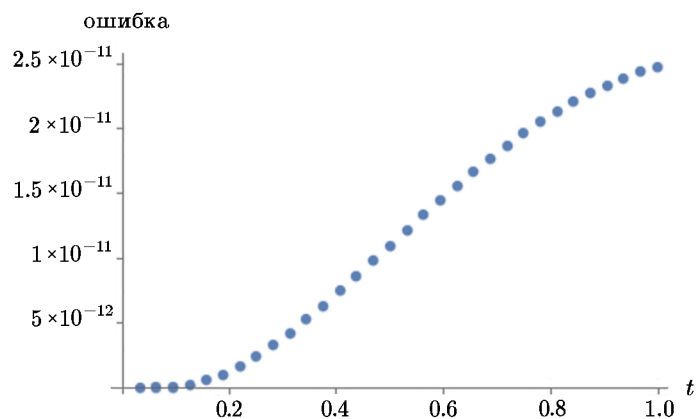


Рис. 1. Функция ошибки в точках сетки для примера 1

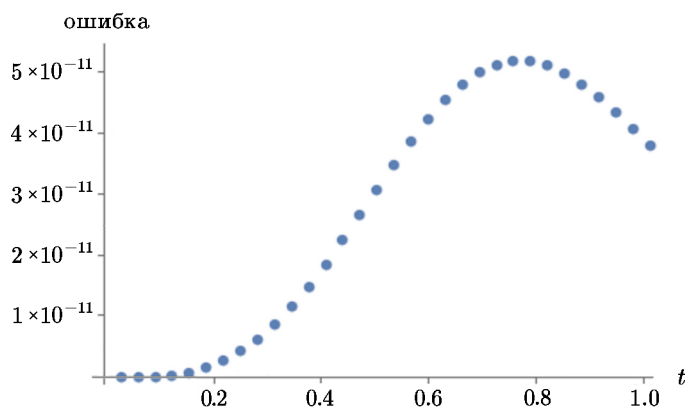


Рис. 2. Функция ошибки в точках сетки для примера 2

5. Выводы

В статье предложен метод многошаговой коллокации и свойства сходимости решений многошаговой коллокации для интегрального уравнения Вольтерра типа автосвертки. Кроме того, мы показали, что этот метод приводит к эффективному и точному численному методу аппроксимации ОИУВА. Сходимость многошагового метода коллокаций точнее, чем сходимость метода коллокаций. Эти результаты подтверждаются некоторыми численными экспериментами.

Литература

1. **Conte D. and Paternoster B.** Multistep collocation methods for Volterra integral equations // Appl. Numer. Math. — 2009. — Vol. 59. — P. 1721–1736.
2. **Brauer F.** On a nonlinear integral equation for population growth problems // SIAM J. Math. Anal. — 1972. — Vol. 6. — P. 312–317.
3. **Brauer F. and Castillo-Chavez C.** Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. — New York: Springer-Verlag, 2001.
4. **Janno J. and von Wolfersdorf L.** Regularization of a class of nonlinear Volterra equations of a convolution type // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 1995. — Vol. 3. — P. 249–257.
5. **Beck J.V., Backwell B., and St. Clair C.R.** Inverse Heat Conduction: Inverse Problems. — New York: Wiley-Interscience, 1985.
6. **Berrut J.-P., Hosseini S., and Klein G.** The linear barycentric rational quadrature method for Volterra integral equations // SIAM J. Sci. Comput. — 2014. — Vol. 36, № 1. — P. A105–A123.
7. **von Wolfersdorf L.** Autoconvolution equations and special functions // Integral Transforms Spec. Funct. — 2010. — Vol. 21. — P. 295–306.
8. **von Wolfersdorf L.** Einige Klassen Quadratischer Integralgleichungen // Sitz. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Naturwiss. Klasse. — 2000. — Band. 128.2.
9. **von Wolfersdorf L.** A class of multi-dimensional nonlinear Volterra equations of convolution type // Demonstratio Math. — 1995. — Vol. 28. — P. 807–820.
10. **Ling L. and Junjie M.** Collocation boundary value methods for auto-convolution Volterra integral equations // Appl. Numer. Math. — 2022. — Vol. 177. — P. 1–17.
11. **Namazi Nezamabadi M. and Pishbin S.** Generalized auto-convolution Volterra integral equations: numerical treatments // J. Mathematics. — 2022. — Vol. 2022. — Article № 4867066. — URL: <https://doi.org/10.1155/2022/4867066>.
12. **Li M. and Huang C.** The linear barycentric rational quadrature method for auto-convolution Volterra integral equations // J. Sci. Comput. — 2019. — Vol. 78. — P. 549–564.
13. **Zhang R., Liang H., and Brunner H.** Analysis of collocation methods for generalized auto-convolution Volterra integral equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2016. — Vol. 54, № 2. — P. 899–920.
14. **Kabanikhin S.I. and Lorenzi A.** Identification Problems of Wave Phenomena: Theory and Numerics. — Utrecht: VSP, 1999.
15. **Guan Q., Zhang R., and Zou Y.** Analysis of collocation solutions for nonstandard Volterra integral equations // IMA J. Numer. Anal. — 2011. — Vol. 32, № 4. — P. 1755–1785.

16. **Ziqing X., Xianjuan L., and Tang T.** Convergence analysis of spectral Galerkin methods for Volterra type integral equations // J. Sci. Comput. — 2012. — Vol. 53. — P. 414–434. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10915-012-9577-8>.
17. **Li Y., Yang Z., and Liang H.** Analysis of collocation methods for a class of third-kind auto-convolution Volterra integral equations // Math. Comput. Simul. — 2022. — Vol. 199. — P. 341–358.

Поступила в редакцию 20 мая 2022 г.

После исправления 21 ноября 2022 г.

Принята к печати 30 января 2023 г.