ЛИТЕРАТУРА

1. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. **Бэтчелор Дж. К.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
3. **Davies R. M., Taylor G. I.** The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes.— «Proc. Roy. Soc.», ser. A , 1950, vol. 200, N 1062, p. 375.
4. **Walters J. K., Davidson J. F.** The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid.— «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, pt 3, p. 321.
5. **Христофоров Б. Д.** Параметры ударной волны и газового пузыря при подводном взрыве зарядов разной плотности из тэна и азида свинца.— ПМТФ, 1961, № 4, с. 118.
6. **Подводные** и подземные взрывы. М., «Мир», 1974.
7. **Taylor J.** The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes.— «Proc. Roy. Soc.», ser. A, 1950, vol. 201, N 1065, p. 192.
8. **Онуфриев А. Т.** Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести, подъем облака атомного взрыва.— ПМТФ, 1967, № 2.

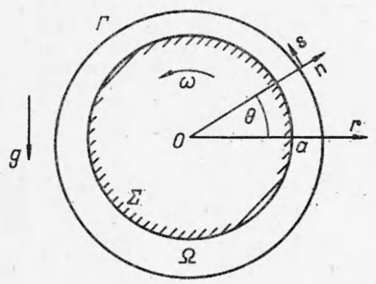
УДК 532.516

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

В. В. Пухначев

(*Новосибирск*)

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести (см. фигуру). Примем обозначения: a — радиус цилиндра; ω — постоянная угловая скорость его вращения вокруг своей оси; g — ускорение силы тяжести; ν — кинематическая вязкость жидкости; ρ — ее плотность; σ — коэффициент поверхностного натяжения. Из этих величин можно составить три независимых безразмерных комбинации: число Рейнольдса $\mathrm{Re} = a^2\omega/\nu$, число Галилея $\gamma = g/a\omega^2$ и обратное число Вебера $\beta = \sigma/\rho a^3\omega^2$.



Задача состоит в определении положительной при $t \in [0, T]$ и всех θ функции $h(\theta, t)$ и решения u, v, p системы уравнений Навье—Стокса

$$u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\theta - \frac{v^2}{r} = -p_r + \mathrm{Re}^{-1}\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} - \frac{2}{r^2}v_\theta - \frac{u}{r^2}\Big) - \gamma\sin\theta, \tag{1.1}$$

$$v_t + uv_r + \frac{v}{r}v_\theta + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r}p_\theta + \mathrm{Re}^{-1}\Big(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}u_\theta - \frac{v}{r^2}\Big) - \gamma\cos\theta,$$

$$(ru)_r + v_\theta = 0,$$

в области $1 < r < 1 + h(\theta, t)$, $|\theta| < \infty$, $0 < t < T$ так, чтобы удовлетворялись краевые условия

$$u = 0,\ v = 1 \quad \text{при } r = 1; \tag{1.2}$$

$$h_t + \frac{v}{r} h_\theta - u = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + h; \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\left(1 - \frac{1}{r^2} h_\theta^2\right)\left(v_r - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} u_\theta\right) + \\ + \frac{2}{r} h_\theta \left(u_r - \frac{u}{r} - \frac{1}{r} v_\theta\right) = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + h;\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\beta \left[(1 + h)^2 + 2h_\theta^2 - (1 + h) h_{\theta\theta}\right] \left[(1 + h)^2 + h_\theta^2\right]^{-3/2} = \\ = p - 2\,\mathrm{Re}^{-1}\left(1 + \frac{1}{r^2} h_\theta^2\right)^{-1}\left[u_r - \frac{1}{r} h_\theta \left(v_r - \frac{v}{r} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{r} u_\theta\right) + \frac{1}{r^2} h_\theta^2 \left(\frac{1}{r} v_\theta + \frac{u}{r}\right)\right] \quad \text{при} \quad r = 1 + h,\end{gathered} \tag{1.5}$$

условие периодичности h, u, v, p по θ с периодом 2π и начальные условия

$$h = h_0(\theta),\ u = u_0(r, \theta),\ v = v_0(r, \theta) \text{ при } t = 0. \tag{1.6}$$

Здесь h_0, u_0, v_0 — заданные функции, 2π-периодические по θ, причем $(ru_0)_r + v_{0,\theta} = 0$.

Все величины в соотношениях (1.1)—(1.6) являются безразмерными. За масштабы длины, времени, скорости и давления приняты выражения a, $1/\omega$, $a\omega$ и $\rho a^2\omega^2$ соответственно. Уравнения Навье — Стокса (1.1) записаны в полярной системе координат r, θ с полюсом в центре сечения цилиндра и полярной осью, перпендикулярной направлению тяжести; u обозначает радиальную, а v — окружную скорость.

Условия (1.2) — это условия прилипания жидкости к поверхности вращающегося цилиндра. Равенство (1.3) означает, что свободная граница $r = 1 + h(\theta, t)$ ограничивает жидкий объем. Соотношение (1.4) выражает отсутствие касательного напряжения на свободной границе, а (1.5) — равенство нормального напряжения капиллярному давлению.

Строгое математическое исследование задач о неустановившемся движении вязкой жидкости со свободной границей, к числу которых принадлежит и задача (1.1)—(1.6), началось сравнительно недавно. В работе [1] установлена теорема об однозначной разрешимости на некотором конечном интервале времени нестационарной задачи для уравнений Навье— Стокса в предположениях, что вся граница жидкости является свободной поверхностью, а поверхностное натяжение равно нулю. Небольшое видоизменение рассуждений работы [1] позволяет распространить эту теорему на тот случай, когда граница области течения состоит из двух непересекающихся частей: свободной границы и гладкой твердой поверхности, на которой выполнено условие прилипания. Это приводит к следующему утверждению о разрешимости задачи (1.1)—(1.6) в случае $\beta = 0$.

Предположим, что функция $h_0(\theta)$ положительна, 2π-периодична и принадлежит классу Гельдера $C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а функции $u_0(r, \theta)$, $v_0(r, \theta)$ также 2π-периодичны по θ и принадлежат классу $C^{2+\alpha}$ в замкнутой области $\overline{\Omega_0} : 1 \leqslant r \leqslant 1 + h_0(\theta)$. Кроме того, предположим, что начальное поле скоростей u_0, v_0 удовлетворяет уравнению неразрывности в области Ω_0, условию прилипания (1.2) при $r = 1$ и условию отсутствия касательного напряжения (1.4) при $r = 1 + h_0$. Тогда существует такое $T > 0$, что задача (1.1)—(1.6) с $\beta = 0$ имеет единственное решение на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Вопрос о разрешимости (даже локальной) задачи (1.1)—(1.6) в случае $\beta \neq 0$ пока остается открытым.

Рассматриваемая задача имеет ряд технических приложений [2]. В этих приложениях, как правило, толщина жидкой пленки мала по сравнению с радиусом цилиндра. Приближенные уравнения, описывающие движение тонкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра при малых числах Рейнольдса, получены в работе [2].

Самостоятельный интерес представляет задача о стационарном течении тяжелой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра. Она состоит в отыскании функции $h(\theta)$ и не зависящего от t решения системы (1.1), удовлетворяющих условиям (1.2)—(1.5) и одному из следующих дополнительных условий:

$$\int\limits_1^{1+h(\theta)} v(r, \theta)\, dr = q; \tag{1.7}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta = 2\pi\bar{h} \tag{1.8}$$

с заданными положительными постоянными q, $\bar{h}$. Условие (1.8) задает среднюю толщину пленки, а условие (1.7) — расход жидкости через поперечное сечение пленки (ясно, что интеграл в левой части равенства (1.7) не зависит от θ). Условие (1.7) (или (1.8)) необходимо для выделения единственного решения из однопараметрического семейства стационарных решений задачи (1.1)—(1.5).

Теорема существования и единственности решения стационарной задачи (1.1)—(1.5), (1.7) при малых числах Галилея γ анонсирована в работе [3].

2. Теорема существования и единственности стационарного решения. Рассмотрим систему (1.1) в стационарном случае. Введя функцию тока $\psi(r, \theta)$ соотношениями

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{2.1}$$

заменим систему (1.1) одним уравнением для функции тока

$$\Delta\Delta\psi - \frac{R}{r}\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(r, \theta)} = 0, \tag{2.2}$$

где $\Delta\psi = r^{-1}(r\psi_r)_r + r^{-2}\psi_{\theta\theta}$.

Будем обозначать в стационарном случае область, занятую жидкостью, через Ω, а свободную границу — через Γ. Условия прилипания (1.2), выполненные на внутренней границе Σ области Ω вследствие (2.1) могут быть записаны в виде

$$\psi = 0, \ \partial\psi/\partial r = 1 \ \text{при} \ r = 1. \tag{2.3}$$

(Полагая $\psi = 0$ на линии тока $r = 1$, фиксируем произвол в определении функции тока.) Кинематическое условие на свободной границе (1.3) в стационарном случае и условие расхода (1.7) приводят к соотношению

$$\psi = q \ \text{при} \ r = 1 + h(\theta). \tag{2.4}$$

Динамические условия (1.4), (1.5) порождают следующие условия для функции тока на линии Г [3]:

$$\Delta\psi - 2K\partial\psi/\partial n = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + h(\theta); \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial n} + 2\frac{\partial^3\psi}{\partial s^2\partial n} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 + \beta\frac{\partial K}{\partial s} - \frac{\gamma\left[(1+h)\cos\theta + h_\theta\sin\theta\right]}{\left[(1+h)^2 + h_\theta^2\right]^{1/2}} = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + h(\theta), \tag{2.6}$$

где K — кривизна кривой Г, причем считается $K > 0$, если Г выпукла наружу жидкости. Выражение $\partial/\partial s$ означает дифференцирование по направлению касательной, а $\partial/\partial n$ — по направлению внешней нормали к Г. Положительное направление касательной к кривой Г выбирается так, чтобы окружная компонента вектора s была положительна (см. фигуру). Условие (2.5) вытекает из (1.4), (1.3) и (2.1). Для получения (2.6) нужно продифференцировать равенство (1.5) вдоль Г и исключить возникающий при этом член $\partial p/\partial s$ с помощью уравнений (1.1). К перечисленным условиям добавляется условие периодичности

$$\psi(r,\ \theta + 2\pi) \equiv \psi(r,\ \theta),\ h(\theta + 2\pi) \equiv h(\theta). \tag{2.7}$$

Окончательная формулировка стационарной задачи такова: определить положительную функцию $h(\theta)$ и решение $\psi(r,\ \theta)$ уравнения (2.2) в области $1 < r < 1 + h(\theta)$ так, чтобы удовлетворялись соотношения (2.3)—(2.7). Если $\gamma = 0$ (тяжесть отсутствует), задача имеет тривиальное решение ($\psi = (r^2 - 1)/2$, $h = \sqrt{1 + 2q} - 1 \equiv b = \mathrm{const}$), описывающее вращение жидкости как твердого тела. Можно показать, что это решение единственно. Ниже анализируются решения задачи (2.2)—(2.7), близкие к тривиальному.

Эффективное исследование этой задачи с неизвестной границей достигается переходом к новым независимым переменным θ, ψ (переменные Мизеса) и новой искомой функции $r = \zeta(\theta,\ \psi)$. Согласно (2.3), (2.4), на плоскости θ, ψ поверхности цилиндра соответствует прямая $\psi = 0$, а свободной границе — прямая $\psi = q$. Вследствие (2.2) функция ζ удовлетворяет уравнению

$$\zeta_\psi A\left(A\zeta - \frac{1}{\zeta\zeta_\psi}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(A\zeta - \frac{1}{\zeta\zeta_\psi}\right)^2\right]_\psi + \frac{\mathrm{Re}}{\zeta\zeta_\psi}\left(A\zeta - \frac{1}{\zeta\zeta_\psi}\right)_\theta = 0, \tag{2.8}$$

где A обозначает дифференциальный оператор

$$A = \frac{1}{\zeta^2\zeta_\psi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{2\zeta_\theta}{\zeta^2\zeta_\psi^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\psi} + \frac{\zeta^2 + \zeta_\theta^2}{\zeta^2\zeta_\psi^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}.$$

Условия прилипания (2.3) приводят к следующим условиям для функции ζ:

$$\zeta - 1 = 0,\ \zeta_\psi - 1 = 0 \text{ при } \psi = 0. \tag{2.9}$$

Из условий (2.5), (2.6) на свободной границе следует, что

$$A\zeta - \frac{1}{\zeta\zeta_\psi} + \frac{2\left(\zeta^2 + 2\zeta_\theta^2 - \zeta\zeta_{\theta\theta}\right)}{\zeta\zeta_\psi\left(\zeta^2 + \zeta_\theta^2\right)} = 0 \quad \text{при} \quad \psi = q; \tag{2.10}$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2}}{\zeta\zeta_\psi}\left(A\zeta-\frac{1}{\zeta\zeta_\psi}\right)_\psi+\frac{2}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2}}\left(\frac{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\epsilon^2}}{\zeta\zeta_\psi}\right)_\theta\right]_\theta+ \\
+\frac{\zeta_\theta}{\zeta\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2}}\left(A\zeta-\frac{1}{\zeta\zeta_\psi}\right)_\theta-\frac{R}{2\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2}}\left(\frac{\zeta^2+\zeta_\theta^2}{\zeta^2\zeta_\psi^2}\right)_\theta+ \\
+\frac{\beta}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\theta^2}}\left[\frac{\zeta^2+2\zeta_\theta^2-\zeta\zeta_{\theta\theta}}{\sqrt{(\zeta^2+\zeta_\theta^2)^3}}\right]_\theta-\frac{\gamma(\zeta\cos\theta+\zeta_\theta\sin\theta)}{\sqrt{\zeta^2+\zeta_\epsilon^2}}=0 \quad \text{при } \psi=q.
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

Требуется найти решение уравнения (2.8) в полосе $\Pi : 0 < \psi < 1$, удовлетворяющее условиям (2.9)—(2.11) и условию периодичности по θ с периодом 2π.

Обозначим через $C_p^{m+\alpha}(\overline{\Pi})$ подпространство пространства Гельдера $C^{m+\alpha}(\overline{\Pi})$, образованное 2π-периодическими функциями по θ (здесь $m \geqslant 0$ — целое, $0 < \alpha < 1$, $\overline{\Pi}$ — замыкание Π). Через $|\cdot|_{\Pi}^{(m+\alpha)}$ обозначается норма в этом пространстве. Аналогичный смысл имеют обозначения $C_p^{m+\alpha}(E)$, $|\cdot|_E^{(m+\alpha)}$, где E — вещественная прямая. Через C_0, C_1, ... будем обозначать положительные постоянные. Определим функцию $\zeta_0 = \sqrt{1+2\psi}$. Эта функция является решением задачи (2.8)—(2.11) при $\gamma = 0$.

Т е о р е м а. Для любых $q > 0$, $\mathrm{Re} \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ существует такое $\gamma_0 > 0$, что при $\gamma \in [0, \gamma_0]$ задача (2.8)—(2.11) имеет решение $\zeta \in C_p^{4+\alpha}(\overline{\Pi})$, единственное в некотором шаре $|\zeta - \zeta_0|_{\Pi}^{(4+\alpha)} \leqslant C_0$.

Для доказательства теоремы применяется метод Ньютона. Определим банахово пространство X как пространство вектор-функций $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_5\}$, где $x_1(\theta, \psi) \in C_p^\alpha(\overline{\Pi})$, $x_k(\theta) \in C_p^{6-k+\alpha}(E)$ при $k=2,\ldots,5$. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$
\|\mathbf{x}\|_X = |x_1|_{\Pi}^{(\alpha)} + \sum_{k=2}^{5} |x_k|_E^{(6-k+\alpha)}.
$$

Будем трактовать краевую задачу (2.8)—(2.11) как операторное уравнение вида

$$
\mathbf{F}(\zeta) = 0, \tag{2.12}
$$

где оператор $\mathbf{F}(\zeta)$ определен в шаре $B_c : |\zeta - \zeta_0|_{\Pi}^{(4+\alpha)} \leqslant c$ пространства $C_p^{4+\alpha}(\overline{\Pi}) = Z$ равенством $\mathbf{F}(\zeta) = \{F_1(\zeta), \ldots, F_5(\zeta)\}$ и действует в пространство X. Компоненты $F_1, \ldots, F_5$ вектора $\mathbf{F}$ представляют собой дифференциальные выражения, стоящие в левых частях уравнения (2.8), первого и второго условий (2.9) и условий (2.10), (2.11) соответственно (например, $F_3(\zeta) = \zeta_\psi - 1$ при $\psi = 0$).

Оператор $\mathbf{F}(\zeta)$ дифференцируем по Фреше в шаре $B_c (0 < c < 1)$. Обозначим через $\mathbf{F}_z'(\zeta)$ его производную Фреше в точке $z \in B_c$ и положим $\|\zeta\|_Z = |\zeta|_{\Pi}^{(4+\alpha)}$. Простые вычисления показывают, что для любых ζ_1 и ζ_2 из B_c выполнено неравенство

$$
\|\mathbf{F}_{\zeta_1}' - \mathbf{F}_{\zeta_2}'\|_X \leqslant (C_3 + \gamma C_4)\|\zeta_1 - \zeta_2\|_Z,
$$

где C_3, C_4 зависят лишь от Re, β, α и c. Очевидно также, что $\mathbf{F}(\zeta_0) = \{0, 0, 0, 0, -\gamma\cos\theta\}$ и $\|\mathbf{F}(\zeta_0)\|_X \leqslant 4\gamma$.

Для дальнейшего существенно, что линейный оператор $\mathbf{F}'_{\zeta_0}$ имеет обратный $(\mathbf{F}'_{\zeta_0})^{-1}: X \to Z$ и справедлива оценка (доказанная ниже)

$$\|(\mathbf{F}'_{\zeta_0})^{-1}\| \leqslant C_1 \tag{2.13}$$

при любых фиксированных $q > 0$, $\mathrm{Re} \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и всех γ из интервала $[0, \gamma_1]$, если $\gamma_1 > 0$ достаточно мало.

Обозначим $C_2 = C_3 + \gamma_0 C_4$ и выберем γ_0 $(0 < \gamma_0 \leqslant \gamma_1)$ настолько малым, что $16\gamma_0 C_1^2 C_2 < 1$. Тогда при $\gamma \in [0, \gamma_0]$ для уравнения (2.12) выполняются условия теоремы Канторовича о сходимости операторного метода Ньютона [4]. Согласно этой теореме, если $\delta = 16\gamma_0 C_1^2 C_2 < 1$, то уравнение (2.12) при $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$ имеет единственное решение в шаре $\|\zeta - \zeta_0\|_Z \leqslant C_0$, где $C_0 = \min[C_1(1 - \sqrt{1-\delta})/2C_2, c]$. Последовательность $\{\zeta_n\}$, в которой $\zeta_0 = \sqrt{1 + 2\psi}$ и

$$\zeta_n = \zeta_{n-1} - (\mathbf{F}'_{\zeta_0})^{-1}\, \mathbf{F}(\zeta_{n-1}) \tag{2.14}$$

для $n \geqslant 1$, сходится к этому решению.

Остается доказать обратимость оператора $\mathbf{F}'_{\zeta_0}$ и получить оценку (2.13). Рассмотрим линейное уравнение

$$\mathbf{F}'_{\zeta_0}(\zeta) = \mathbf{x}, \tag{2.15}$$

где $\mathbf{x}$ — произвольный элемент пространства X. В результате замены переменных $r = \sqrt{1 + 2\psi}$, $\zeta = \varphi/r$ соответствующая (2.15) однородная задача для $\varphi(r, \theta)$ преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\Delta\Delta\varphi - \mathrm{Re}\,\Delta\varphi_\theta = 0 \text{ при } 1 < r < 1 + b = \sqrt{1 + 2q}, \\
\varphi = \varphi_r = 0 \text{ при } r = 1, \\
\Delta\varphi - \frac{2}{r^2}\varphi_{\theta\theta} - \frac{2}{r}\varphi_r = 0 \quad \text{при } r = 1 + b, \\
(\Delta\varphi)_r + \frac{2}{r^2}\left(\varphi_r - \frac{\varphi}{r}\right)_{\theta\theta} - \mathrm{Re}\left(\varphi_r - \frac{\varphi}{r}\right) + \frac{\beta}{r^4}(\varphi_{\theta\theta} + \varphi)_\theta + \\
+ \frac{\gamma}{r^2}(\varphi_\theta \sin\theta + \varphi\cos\theta) = 0 \quad \text{при } r = 1 + b, \\
\varphi(r, \theta + 2\pi) = \varphi(r, \theta).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Покажем, что при достаточно малых γ эта задача имеет лишь тривиальное решение. Решение задачи (2.16) удовлетворяет тождеству

$$\int_1^{1+b}\int_0^{2\pi}\left[\left(\varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{r}\varphi_{r\theta} - \frac{1}{r^2}\varphi_\theta\right)^2\right] r\,dr\,d\theta = \tag{2.17}$$

$$= -\frac{\gamma}{4(1+b)^2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(1+b, \theta)\cos\theta\, d\theta,$$

которое получается путем умножения первого из соотношений (2.16) на функцию φ и интегрирования результирующего равенства по кольцу $1 < r < 1 + b$ с использованием краевых условий. В силу неравенства

Корна для двумерных соленоидальных векторных полей [5] и теоремы Соболева о следах из (2.17) вытекает, что $\varphi = 0$, если $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1$ и γ_1 достаточно мало.

Граничные операторы в (2.16) удовлетворяют условию дополнительности [6] по отношению к оператору $\Delta\Delta - \mathrm{Re}\Delta\partial/\partial\theta$. Поэтому отсутствие нетривиальных решений однородной задачи (2.16) влечет однозначную разрешимость соответствующей неоднородной задачи, а вместе с ней и уравнения (2.15) при любом $\mathbf{x} \in X$. Неравенство (2.13) следует из априорных оценок работы [6]. Доказательство теоремы закончено.

Отметим, что при $\gamma \to 0$ решение задачи (2.1)—(2.11) допускает оценку

$$|\zeta - \sqrt{1+2\psi}|_{\Pi}^{(4+\alpha)} = O(\gamma). \tag{2.18}$$

Эта оценка обеспечивает (при достаточно малых γ) однолистность отображения полосы Π на область течения $1 < r < 1 + h(\theta)$, $\theta \in E$. Решению $\zeta \in C^{4+\alpha}(\overline{\Pi})$ задачи (2.8)—(2.11) соответствует решение $\psi \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega})$, $h \in C^{4+\alpha}(E)$ плоской стационарной задачи о пленке.

Асимптотика решения задачи (2.8)—(2.11) при малых γ может быть уточнена. Согласно (2.14), второй член ζ_1 рекуррентной последовательности $\{\zeta_n\}$ при $\gamma \to 0$ допускает представление

$$\zeta_1 = \sqrt{1+2\psi}\,[1 + \gamma(1+2\psi)^{-1}\varphi(\sqrt{1+2\psi},\,\theta)] + O(\gamma^2).$$

Здесь $\varphi(r, \theta)$ — решение линейной задачи (2.16), в которой второе краевое условие при $r = 1 + b$ заменено следующим:

$$(\Delta\varphi)_r + \frac{2}{r^2}\left(\varphi_r - \frac{\varphi}{r}\right)_{\theta\theta} - \mathrm{Re}\left(\varphi_r - \frac{\varphi}{r}\right)_\theta +$$
$$+ \frac{\beta}{r^4}(\varphi_{\theta\theta} + \varphi)_\theta = -\cos\theta \quad \text{при} \quad r = 1 + b.$$

Имеет место оценка

$$|\zeta - \zeta_1|_{\Pi}^{(4+\alpha)} = O(\gamma^2) \quad \text{при} \quad \gamma \to 0. \tag{2.19}$$

Для получения соотношений (2.18), (2.19) достаточно воспользоваться оценкой погрешности модифицированного метода Ньютона [4]. Соотношение (2.19) дает оценку близости линейного приближения ζ_1 к решению ζ задачи (2.8)—(2.11) при малых γ.

Замечание 1. Решение задачи (2.8)—(2.11) (значит, и исходной задачи (2.2)—(2.7)) непрерывно зависит от параметра β в любом конечном интервале его изменения. В частности, допускается, что $\beta = 0$ (нулевое поверхностное натяжение).

Замечание 2. Используя оценки решений эллиптических уравнений [6], можно показать, что решение $\zeta(\psi, \theta) \in C_p^{4+\alpha}(\overline{\Pi})$ задачи (2.8)—(2.11) фактически принадлежит классу $C^\infty(\overline{\Pi})$. Это означает, что соответствующее ему поле скоростей и свободная граница также бесконечно дифференцируемы.

Замечание 3. При постановке плоской стационарной задачи о пленке можно было бы задавать не расход q, а среднюю толщину пленки $\overline{h}$. Ввиду соотношений $h(\theta) = \zeta(\theta, q) - 1$ и (2.18) при малых γ между этими величинами имеется взаимно однозначное соответствие

$$\overline{h} = \sqrt{1+2q} - 1 + O(\gamma).$$

3. Уравнения движения тонкой пленки. Предположим, что начальное значение функции h имеет вид $h_0 = \varepsilon H_0(\theta)$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Параметр ε имеет смысл отношения характерной (например, средней) толщины пленки к радиусу цилиндра. Исходным пунктом вывода уравнений тонкой пленки является представление

$$h = \varepsilon H,\ r = 1 + \varepsilon y,\ u = \varepsilon U,\ v = V \tag{3.1}$$

и предположение о том, что величины H, U, V, а также их производные по t, θ и новой независимой переменной y остаются конечными при $\varepsilon \to 0$. Подстановка (3.1) в первые два уравнения (1.1) и условие (1.5) приводит к равенствам

$$\begin{gathered} -V^2 + O(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} P_y + \frac{1}{\mathrm{Re}\beta}[U_{yy} + O(\varepsilon)] - \gamma\sin\theta, \\ V_t + UV_y + VV_\theta + O(\varepsilon) = -[1 + O(\varepsilon)]\, P_\theta + \\ + \frac{1}{\mathrm{Re}\varepsilon^2}[V_{yy} + O(\varepsilon)] - \gamma\cos\theta \quad \text{при} \quad 0 < y < H(\theta, t); \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} -\beta\varepsilon[H_{\theta\theta} + H + O(\varepsilon)] = P - 2\mathrm{Re}^{-1}[U_y + \\ + O(\varepsilon)] \ \text{при} \ y = H(\theta, t), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $P = p - \beta$. При получении равенства (3.3) учтено, что ввиду (1.4) $V_y(H, \theta, t) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Определим $P(y, \theta, t)$ путем интегрирования первого уравнения (3.2) по y с использованием условия (3.3) и подставим результат во второе уравнение (3.2). Получим соотношение

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}\varepsilon^2[V_t + UV_y + VV_\theta + O(\varepsilon)] = V_{yy} + O(\varepsilon) + \\ + \beta\mathrm{Re}\varepsilon^3[H_{\theta\theta\theta} + H_\theta + O(\varepsilon)] - \gamma\mathrm{Re}\varepsilon^2[\cos\theta + O(\varepsilon)] \end{gathered} \tag{3.4}$$

при $\varepsilon \to 0$. Введем обозначения

$$\mathrm{Re}\varepsilon^2 = \varkappa,\ \beta\mathrm{Re}\varepsilon^3 = \chi,\ \gamma\mathrm{Re}\varepsilon^2 = \mu.$$

Постулируем, что в процессе предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ величины $\varkappa$, χ и μ стремятся к конечным значениям. Физически это предположение означает, что в уравнении (3.4) силы инерции, вязкости, капиллярности и тяжести при малых ε имеют одинаковый порядок. Переходя к пределу в (3.4) при $\varepsilon \to 0$, получаем уравнение

$$\varkappa(V_t + UV_y + VV_\theta) = V_{yy} - \mu\cos\theta + \chi(H_{\theta\theta} + H_\theta)\,. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.1) в последнее уравнение системы (1.1) и в условия (1.2)—(1.4) и устремляя ε к нулю, приходим к соотношениям

$$U_y + V_\theta = 0; \tag{3.6}$$

$$U = 0,\ V = 1 \ \text{при} \ y = 0; \tag{3.7}$$

$$H_t + VH_\theta - U = 0 \ \text{при} \ y = H; \tag{3.8}$$

$$V_y = 0 \ \text{при} \ y = H. \tag{3.9}$$

Отметим, что указанное в (3.1) соотношение порядков величин u и v при

$\varepsilon \to 0$ единственное, при котором предельное уравнение неразрывности (3.6) является нетривиальным.

К краевым условиям (3.7)—(3.9) для системы (3.5), (3.6) следует добавить условие периодичности U, V и H по θ с периодом 2π и начальные условия

$$H = H_0(\theta) \text{ при } t = 0; \tag{3.10}$$

$$V = V_0(y,\ \theta) \text{ при } t = 0, \tag{3.11}$$

где H_0, V_0 — заданные функции (последняя определена в области $0 < y < H_0(\theta)$). Вследствие (3.6), (3.7) задание V при $t = 0$ однозначно определяет и начальное значение функции U. Заметим, что для согласования начального условия (1.6) для функции v с представлением (3.1) необходимо предположить, что $V_0 = \lim v_0(1 + \varepsilon y,\ \theta)$ при $\varepsilon \to 0$.

Соотношения (3.5)—(3.11) образуют краевую задачу, решение которой интерпретируется как движение в тонком слое жидкости на поверхности вращающегося цилиндра. Задача (3.5)—(3.11) достаточно сложна ввиду ее нелинейности, вырожденности уравнений (3.5), (3.6) и наличия неизвестной границы. Ограничимся построением формального асимптотического решения этой задачи при $\varkappa \to 0$. Параметры χ и μ могут принимать любые неотрицательные значения, включая нуль.

Положим в уравнении (3.5) $\varkappa = 0$. Дважды интегрируя полученное уравнение по y с учетом условий (3.7), (3.9), находим

$$V = (y^2/2 - yH)[\mu\cos\theta - \chi(H_{\theta\theta} + H)_\theta] + 1. \tag{3.12}$$

Из (3.6), (3.7) и (3.12) получается выражение для U

$$U = \frac{y^2}{2}\left(H - \frac{y}{3}\right)[\mu\cos\theta - \chi(H_{\theta\theta} + H)_\theta]_\theta + \\ + \frac{y^2}{2} H_\theta [\mu\cos\theta - \chi(H_{\theta\theta} + H)_\theta]. \tag{3.13}$$

Подставляя (3.12), (3.13) в равенство (3.8), приходим к дифференциальному уравнению для функции $H(\theta, t)$

$$H_t + \left(H - \frac{\mu}{3} H^3 \cos\theta\right)_\theta + \frac{\chi}{3}[H^3(H_{\theta\theta\theta} + H_\theta)]_\theta = 0. \tag{3.14}$$

Равенство (3.10) задает начальное условие для этого уравнения.

Пусть $\chi > 0$. Линеаризация уравнения (3.14) на любом положительном решении приводит к уравнению, параболическому по Петровскому [7]. Применение априорных оценок решений таких уравнений [7] в сочетании с методом последовательных приближений позволяет доказать следующее утверждение о локальной разрешимости задачи (3.14), (3.10) при $\chi > 0$.

Предположим, что функция $H_0(\theta)$ положительна, 2π-периодична и принадлежит классу Гельдера $C^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует $T > 0$ такое, что задача (3.14), (3.10) имеет единственное решение на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ в классе положительных функций, 2π-периодических по θ. Это решение бесконечно дифференцируемо при $0 < t \leqslant T$.

Так как функция H пропорциональна толщине пленки, то только неотрицательные решения задачи (3.14), (3.10) имеют физический смысл. Положительность H означает, что пленка покрывает поверхность цилиндра целиком. Было бы интересно доказать существование решения задачи (3.14), (3.10) в целом в классе неотрицательных функций, а также выяснить, может ли решение этой задачи с $H_0 > 0$ обращаться в нуль при $t > 0$.

Если $\chi = 0$, уравнение (3.14) превращается в уравнение первого порядка

$$H_t + \left(H - \frac{\mu}{3} H^3 \cos\theta\right)_\theta = 0, \tag{3.15}$$

полученное и исследованное в работе [2]. При $\mu \neq 0$ для любой гладкой функции H_0 задача Коши (3.15), (3.10) имеет гладкое решение на некотором конечном интервале времени. Однако в процессе эволюции возможно образование разрывов функции H.

Определив функцию $H(\theta, t)|_{\varkappa=0}$ как решение задачи (3.14), (3.10) и подставив результат в формулы (3.12), (3.13), найдем решение задачи (3.5)—(3.10) при $\varkappa = 0$. Построенная таким образом функция $V(y, \theta, t)|_{\varkappa=0}$, вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию (3.11). Чтобы ликвидировать возникающую невязку, введем в рассмотрение функцию $\xi(y, \theta, \tau, t)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{gathered} \xi_\tau = \xi_{yy} \text{ при } 0 < y < H(\theta, t)|_{\varkappa=0}, \\ \xi = 0 \text{ при } y = 0, \ \xi_y = 0 \text{ при } y = H(\theta, t)|_{\varkappa=0}, \\ \xi = V_0(y, \theta) - V(y, \theta, 0)|_{\varkappa=0} \text{ при } \tau = 0. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь $\tau = \varkappa^{-1}t$— «быстрое время». Предполагаем, что $V_0 = 1$ при $y = 0$ и $V_{0,y} = 0$ при $y = H_0(\theta)$.

Решение задачи (3.16) экспоненциально убывает вместе со всеми производными при $\tau \to \infty$. Поэтому функция $\xi(y, \theta, t/\varkappa, t)$ при $\varkappa \to 0$ будет функцией типа погранслоя. Непосредственная проверка показывает, что функции H, U, V, определенные равенствами

$$H = H(\theta, t)|_{\varkappa=0}, \quad V = V(y, \theta, t)|_{\varkappa=0} + \xi(y, \theta, t/\varkappa, t),$$

$$U = U(y, \theta, t)|_{\varkappa=0} - \int_0^y \xi_\theta(x, \theta, t/\varkappa, t)\, dx,$$

удовлетворяют соотношениям (3.6), (3.7), (3.10), (3.11), а при подстановке их в соотношения (3.5), (3.8), (3.9) величина погрешности при $\varkappa \to 0$ и любом t, $0 < t \leqslant T$, имеет порядок $O(\varkappa)$. Это дает основание называть тройку функций H, U, V формальным асимптотическим решением задачи (3.5)—(3.11) при $\varkappa \to 0$. Можно построить функции H, U, V, удовлетворяющие равенствам (3.5)—(3.11) с точностью $O(\varkappa^n)$ при $\varkappa \to 0$, где n — любое натуральное число (этот момент в работе не рассматривается).

Заметим, что при фиксированных значениях Re и β величины $\varkappa$ и χ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Однако предельная задача для уравнений тонкой пленки при $\varkappa = \chi = 0$ обладает по крайней мере двумя дефектами: в ее решении возможно появление сильных разрывов; для предельных уравнений нельзя задавать произвольное начальное поле скоростей.

Поскольку χ пропорционально коэффициенту поверхностного натяжения, из предыдущего рассмотрения следует, что влияние капиллярности предотвращает возникновение «ударных волн» в тонкой пленке. Параболическое уравнение (3.14) является физически естественной регуляризацией гиперболического уравнения (3.15), к которому сводится предельная задача, а параметр χ является параметром регуляризации.

С другой стороны, учет инерционного члена $\varkappa V_t$ в уравнении (3.5) позволяет решать задачу (3.5)—(3.11) при произвольных начальных данных. Однако при малых $\varkappa$ информация о начальном поле скоростей (но не о начальном профиле пленки) в процессе движения быстро забывается.

Автор выражает благодарность доктору Г. К. Моффату, работа которого [2] явилась стимулом для написания данной работы.

Поступила 17 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солонников В. А.** Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975, с. 182—197.
2. **Moffat H. K.** Syrup rings on a rotating roller. Preprint of Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics of Cambridge University. Cambridge, 1975, p. 1—27.
3. **Пухначев В. В.** Переменные Мизеса в задачах со свободной границей для уравнений Навье — Стокса.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 2, с. 298—301.
4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
5. **Солонников В. А., Щадилов В. Е.** Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье — Стокса.— «Труды МИ АН СССР», 1973, т. 125, с. 196—210.
6. **Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.** Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. М., ИЛ, 1962.
7. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. П.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.

УДК 532.526

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ГРАДИЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРЕДОТРЫВНЫХ ОБЛАСТЯХ И НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Н. Долгов, В. М. Шулемович

(*Новосибирск*)

Существующие конечно-разностные методы расчета турбулентного пограничного слоя, в которых для замыкания системы уравнений используются различные модификации турбулентной вязкости (длины пути смешения), приводят для сильно неравновесных (близких к отрыву) течений к большим отличиям расчетных и экспериментальных данных [1—3]. Одной из причин наблюдаемых расхождений, по-видимому, является тот факт, что существующие модели турбулентной вязкости содержат недостаточную информацию о предыстории течения. В частности, соотношение для турбулентной вязкости во внешней части пограничного слоя [2] или, например, зависимость, используемая в [4],

$$(1)\quad \mu_т = \rho(\lambda y_e)^2|\partial u/\partial y|$$

в явном виде, совсем не зависят от предыстории. Величина λ в (1) постоянна и обычно принимается равной 0,09.