УДК 541.64:539.3
DOI: 10.15372/PMTF202315270

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПУЧКА ВОЛОКОН ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ НА ОСНОВЕ ТЕРМОФЛУКТУАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ИХ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

В. В. Шевелев

МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия
E-mail: valeshevelev@yandex.ru

Предложена модель для оценки долговечности пучка одинаковых волокон в условиях хрупкого разрушения в области растягивающих напряжений, расположенной левее гриффитсова порога разрушения. Показано, что в указанной области напряжений средняя долговечность и дисперсия значений долговечности неограниченно увеличиваются при уменьшении растягивающего напряжения. Получены оценки инкубационного периода долговечности, его доверительной вероятности и нижней границы числа элементов пучка одинаковых волокон, гарантирующих требуемую долговечность пучка.

Ключевые слова: хрупкость, разрушение, долговечность, дисперсия, многоэлементная структура, пучок волокон, напряжение

Введение. Модель пучка волокон является одним из теоретических подходов к исследованию процессов разрушения материалов [1–5]. Изучению прочностных свойств пучков волокон в различных условиях нагружения посвящено большое число работ (см., например, работы [6, 7] и библиографию к ним). Это обусловлено тем, что пучки волокон имеют лучшие прочностные свойства по сравнению с прочностными свойствами монолитных материалов того же объема. Обычно материалы содержат различные дефекты структуры, которые при нагружении становятся очагами разрушения, поскольку являются областями повышенных растягивающих напряжений. Так как процесс разрушения нагруженных материалов происходит в результате термофлуктуационного разрыва связей между кинетическими единицами (атомами, молекулами) [8, 9], то в указанных областях происходит наиболее существенное уменьшение энергии активации их разрыва, что способствует развитию очагов разрушения после приложения растягивающей нагрузки. Это обусловливает значительное различие теоретической (предельной) σ_T и реальной (разрывной) σ_f прочности материалов. Например, для стали $\sigma_T \approx 20$ ГПа, $\sigma_f \approx 2{,}5$ ГПа, для стекла $\sigma_T \approx 6$ ГПа, $\sigma_f \approx 0{,}12$ ГПа.

Улучшение прочностных свойств пучка волокон вызвано тем, что в нем реализуется масштабный эффект прочности и долговечности: при уменьшении размеров изделия (элемента) из данного материала уменьшается вероятность появления в нем дефектов структуры достаточно большого размера, при нагружении способствующих развитию трещины разрушения. Таким образом, ряд изделий не будут содержать крупных дефектов структуры, являющихся источниками разрушения, или будут бездефектными, а значит, более прочными и долговечными.

В результате объединения волокон в пучок, очевидно, получится более прочное и долговечное изделие, так как в этом случае влияние на прочность и долговечность оказывает закон больших чисел, уменьшающий разброс значений долговечности материалов, имеющих многоэлементную структуру.

Анализ математических моделей разрушения монолитных (одноэлементных) материалов [10–15] показывает, что, как правило, в этих моделях используется формула С. Н. Журкова для средней долговечности τ [8]. Как показано в [16, 17], эта формула справедлива в диапазоне значений растягивающего напряжения σ, в котором частота восстановления разорванных связей между кинетическими единицами много меньше частоты их разрыва, в силу того что энергия восстановления разорванных связей больше энергии их разрыва. Эта область является областью растягивающих напряжений $\sigma > \sigma_{\mathrm{G}}$, где σ_{G} — гриффитсов порог хрупкого разрушения, определяющий среднее значение растягивающего напряжения $\sigma = \sigma_{\mathrm{G}}$, начиная с которого имеющаяся в материале наиболее опасная трещина (трещина разрушения) начинает необратимо, без восстановления разорванных связей, расти в соответствии с термофлуктуационным механизмом. Этот механизм роста переходит в атермический, безактивационный, когда растягивающее напряжение σ^* в вершине трещины разрушения становится равным $\sigma_f = U/\gamma_0$ (U, γ_0 — энергия активации и структурночувствительный коэффициент в уравнении Журкова для средней долговечности соответственно). Таким образом, область растягивающих напряжений $0 < \sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$ определяет рабочий диапазон нагружения материала. При этом величина σ_{G} является математическим ожиданием случайной величины (гриффитсова порога разрушения), функция распределения которой зависит от размеров образца используемого материала и технологии его изготовления (масштабный и технологический эффекты прочности и долговечности).

При достаточно малых температурах или растягивающих напряжениях, когда характерное время процессов перестройки структуры много больше характерного времени разрыва связей, материал разрушается хрупко, как правило, в результате развития в нем трещины, наиболее опасной из числа имеющихся [9]. Процесс накопления разорванных связей в условиях хрупкого разрушения представляет собой случайные блуждания по числу разорванных и восстановленных связей в ее вершине между кинетическими единицами, определяющими разрушение. В этом случае в соответствующих моделях разрушения [16, 17] необходимо учитывать возможность восстановления в вершине трещины разорванных связей между кинетическими единицами.

Долговечность пучка волокон является не менее важной эксплуатационной характеристикой материалов, чем его прочность, но исследована в меньшей степени, по-видимому, вследствие того, что обладает "значительной статистической изменчивостью" и для ее определения необходимо использовать вероятностный подход [18]. В [18] в рамках чисто вероятностного подхода исследована долговечность пучка волокон, к которому приложена циклическая растягивающая нагрузка, но без детального рассмотрения механизма разрушения волокон в зависимости от приложенной нагрузки. При этом, насколько известно автору данной работы, долговечность пучка волокон в области напряжений, где средняя долговечность каждого элемента пучка не подчиняется формуле Журкова для средней долговечности, не изучалась.

В настоящей работе в предположении хрупкого разрушения на основе модели хрупкого разрушения [16] монолитного (одноэлементного) материала предложена математическая модель долговечности многоэлементного материала (пучка одинаковых волокон) в области растягивающих напряжений $0 < \sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$.

1. Формулировка модели. Рассмотрим ансамбль многоэлементных образцов материала, каждый из которых состоит из n_0 параллельных, не взаимодействующих между собой одинаковых цилиндрических элементов (далее элементов пучка волокон (ЭПВ)), имеющих длину l и площадь поперечного сечения s и объединенных в пучок с поперечным сечением $S = n_0 s$, нагруженный постоянным растягивающим напряжением σ, направленным вдоль ЭПВ. Каждый из одинаково нагруженных ЭПВ может разрушиться с одинаковой вероятностью при одних и тех же условиях нагружения независимо от других ЭПВ. Внешняя нагрузка σ после разрыва одного из ЭПВ распределяется равномерно среди остальных неразрушенных ЭПВ. Таким образом, после того как разрушатся n ЭПВ, напряжение на оставшихся неразрушенными $n_0 - n + 1$ элементах становится равным

$$\sigma_{el} = \frac{\sigma}{1 - (n-1)/n_0}. \tag{1}$$

В процессе накопления разрушенных ЭПВ величина σ_{el} в соответствии с (1) возрастает, и при некотором значении числа разрушенных ЭПВ, равном n_k, растягивающее напряжение на оставшихся неразрушенными ЭПВ становится равным $\sigma = \sigma_{\mathrm{G}}$, после чего они разрушаются необратимо в режиме $\sigma > \sigma_{\mathrm{G}}$, длительность которого мала по сравнению с длительностью накопления в пучке разрушенных ЭПВ в режиме $0 < \sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$.

Кинетика разрушения образца, содержащего в момент времени $t = 0$ n_0 неразрушенных ЭПВ, моделируется системой уравнений

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = (n_0 - n + 1)\omega(n_0 - n + 1)P(n-1,t) - (n_0 - n)\omega(n_0 - n)P(n,t), \qquad 1 \leqslant n \leqslant n_k - 1, \qquad t > 0; \tag{2}$$

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -n_0\omega(n_0)P(0,t), \qquad t > 0; \tag{3}$$

$$P(n_k,t) = 0, \qquad t > 0; \tag{4}$$

$$P(n,0) = \delta_{n0}, \tag{5}$$

где $P(n,t)$ — вероятность того, что в момент времени t окажутся разорванными n ЭПВ; $\omega(n_0 - n)$ — частота разрыва одного ЭПВ, после того как n ЭПВ были разрушены; $\delta_{n0} = 1$ при $n = 0$, $\delta_{n0} = 0$ при $n \neq 0$.

Условие (4) означает, что все члены ансамбля многоэлементных образцов, в каждом из которых количество разрушенных ЭПВ достигло значения $n = n_k$, находятся под действием напряжения $\sigma = \sigma_{\mathrm{G}}$. В этих условиях дальнейшее разрушение многоэлементного образца имеет, по сути, катастрофический характер вследствие увеличения нагрузки после разрушения очередного ЭПВ на еще не разрушенные ЭПВ.

2. Формулы средней долговечности и дисперсии. Система уравнений (2)–(5) может быть решена аналитически с использованием операционного метода. Применяя к уравнениям (2), (3) преобразование Лапласа — Карсона [19], с учетом начального условия (5) получаем рекуррентную формулу

$$\bar{P}(n,p) = \frac{w_0(n-1)}{p + w_0(n)}\,\bar{P}(n-1,p), \qquad n \geqslant 1; \tag{6}$$

$$\bar{P}(0,p) = \frac{p}{p + w_0(0)}, \tag{7}$$

где $\bar{P}(n,p) = p\displaystyle\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,P(n,t)\,dt$; $w_0(n) = w(n_0 - n)(n_0 - n)$.

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\bar{P}(n,p) = p\prod_{i=0}^{n-1} w_0(i)\prod_{m=0}^{n}\frac{1}{p+w_0(m)}. \tag{8}$$

Применяя к (8) теорему разложения [19], находим

$$P(n,t) = \prod_{i=0}^{n-1} w_0(i)\sum_{m=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{-w_0(m)t}}{\prod\limits_{j=0,\ j\neq m}^{m}(w_0(j)-w_0(m))}, \qquad 1 \leqslant n \leqslant n_k-1, \quad t>0. \tag{9}$$

Полученное аналитическое представление решения системы (2)–(5) неудобно для практического использования. Поэтому с помощью модели (2)–(5) найдем среднее время τ, за которое будет достигнуто значение $n = n_k$, принимаемое в качестве оценки среднего значения долговечности образца материала в виде пучка одинаковых волокон. Тогда плотность распределения вероятностей значений долговечности $\varphi(t)$ можно определить следующим образом:

$$\varphi(t) = w(n_0-n_k+1)(n_0-n_k+1)P(n_k-1,t), \qquad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Умножим обе части уравнений (2), (3) на $t\,dt$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Учитывая при этом, что

$$P(n,\infty)=0, \qquad w(n_0-n)(n_0-n)\int\limits_0^\infty P(n,t)\,dt = 1,$$

получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$\Psi_n = \Psi_{n-1}+\frac{1}{w_0(n)}, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_k-1, \qquad \Psi_n = w_0(n)\int\limits_0^\infty P(n,t)t\,dt. \tag{11}$$

Решая соотношение (11) с учетом того, что, как следует из (3), $\Psi_0 = 1/w_0(0)$, находим

$$\Psi_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{w_0(k)}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant n_k-1. \tag{12}$$

Из определения Ψ_n следует, что $\tau = \Psi_{n_k-1}$. Таким образом,

$$\tau = \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w(n_0-k)(n_0-k)}. \tag{13}$$

Аналогичным образом можно найти дисперсию значений долговечности. Для этого умножим обе части (2), (3) на $(t-\tau)^2\,dt$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. В результате получаем следующее рекуррентное соотношение для величины $D_n = w_0(n)\int\limits_0^\infty P(n,t)(t-\tau)^2\,dt$:

$$D_n = D_{n-1}+\frac{2\Psi(n)}{w_0(n)}-\frac{2\tau}{w_0(n)}, \qquad 1 \leqslant n \leqslant n_k-1; \tag{14}$$

$$D_0 = \tau^2+\frac{2\Psi(0)}{w_0(0)}-\frac{2\tau}{w_0(0)}. \tag{15}$$

Дисперсия D_τ значений долговечности материала определяется величиной

$$D_\tau = D_{n_k-1} = w_0(n_k - 1)\int\limits_0^\infty P(n_k - 1, t)(t-\tau)^2\,dt. \tag{16}$$

Решая рекуррентные соотношения (14), (15), получаем

$$D_\tau = -\tau^2 + 2\sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w(n_0-k)(n_0-k)}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{w(n_0-m)(n_0-m)}. \tag{17}$$

С учетом выражения (13) для средней долговечности τ из (17) следует

$$D_\tau = \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(k)}\Big(2\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{w_0(m)} - \sum_{m=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(m)}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(k)}\Big(\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{w_0(m)} - \sum_{m=k+1}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(m)}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(k)}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{w_0(m)} - \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(k)}\sum_{m=k}^{n_k-1}\frac{1}{w_0(m)} + \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0^2(k)} = \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w_0^2(k)}.$$

Таким образом,

$$D_\tau = \sum_{k=0}^{n_k-1}\frac{1}{w^2(n_0-k)(n_0-k)^2}. \tag{18}$$

3. Оценки средней долговечности и дисперсии при $0 < \sigma < \sigma_{\rm G}$**.** Оценим полученные выражения для средней долговечности τ (13) и дисперсии D_τ (18) в области растягивающих напряжений $0 < \sigma < \sigma_{\rm G}$, заменяя в них суммы интегралами. Учитывая, что $n_k \gg 1$, имеем

$$\tau \approx \int\limits_0^{n_k}\frac{dk}{w(n_0-k)(n_0-k)}; \tag{19}$$

$$D_\tau \approx \int\limits_0^{n_k}\frac{dk}{w^2(n_0-k)(n_0-k)^2}. \tag{20}$$

При $0 < \sigma < \sigma_{\rm G}$ средняя долговечность τ_{el} каждого ЭПВ не описывается формулой Журкова [7], а согласно [16, 17] в случае, когда трещиной разрушения является круговая дискообразная трещина, может быть представлена в виде

$$\tau_{el} \approx \frac{k_{\rm B}T}{\lambda_0^3\nu_0}\,\frac{1}{4\pi\alpha_s}\Big(\frac{\sigma_f\chi}{\sigma_T-\sigma_f}\Big)^2\sqrt{\frac{k_{\rm B}T}{2\alpha_s}}\exp\Big(\frac{\pi^3\alpha_s^3E^2}{6(1-\nu^2)^2\sigma_{el}^4k_{\rm B}T}\Big). \tag{21}$$

Здесь E — модуль Юнга; $k_{\rm B}$ — постоянная Больцмана; T — температура; λ_0 — среднее расстояние между частицами материала; ν — коэффициент Пуассона; ν_0 — частота колебаний кинетических единиц; χ — фактор формы трещины разрушения; α_s — удельная свободная поверхностная энергия.

В общем случае в области $0 < \sigma < \sigma_{\rm G}$ средняя долговечность $\tau_{el}(n)$ ЭПВ после разрушения n элементов с учетом результатов [20, 21] определяется формулой

$$\tau_{el}(n) = \tau_0\, \mathrm{e}^{\gamma(1-q)^{\mu}}, \tag{22}$$

где τ_0 — предэкспоненциальный множитель; $q = n/n_0$ — доля разрушенных элементов; $0 \leqslant n \leqslant n_{k-1} = n_k - 1$; $\gamma = \Delta\Phi(\sigma)/(k_{\rm B}T)$; $\Delta\Phi(\sigma)$ — минимальная работа, необходимая для разрушения ЭПВ при напряжении σ [16] (в случае цилиндрических элементов, разрушаемых круговой дискообразной трещиной, $\mu = 4$, $\Delta\Phi(\sigma) = \pi^3\alpha_s^3 E^2/(6(1-\nu^2)^2\sigma^4)$); $\gamma \gg 1$ в области $0 < \sigma < \sigma_{\rm G}$ и $\gamma \to \infty$ при $\sigma \to 0$.

Так как частота разрушения одного ЭПВ равна $w(n) = 1/\tau_{el}(n)$, то выражение для средней долговечности (19) принимает следующий вид:

$$\tau \approx \tau_0 \int\limits_0^{q_k} \mathrm{e}^{\gamma(1-q)^{\mu}}\, \frac{dq}{1-q}, \qquad q_k = \frac{n_k}{n_0}. \tag{23}$$

Вводя переменную интегрирования $\eta = (1-q)^{\mu}$, получаем выражение для средней долговечности пучка волокон

$$\tau \approx \frac{\tau_0}{\mu} \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, \frac{d\eta}{\eta}. \tag{24}$$

Вычисляя интеграл в (24) по частям, находим

$$\tau \approx \frac{\tau_0}{\mu} \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, \frac{d\eta}{\eta} = \frac{\tau_0}{\gamma\mu}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\gamma\eta}}{\eta}\Big|_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} + \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, \frac{d\eta}{\eta^2}\Big) =$$

$$= \frac{\tau_0}{\mu\gamma}\Big(\mathrm{e}^{\gamma} - \frac{\mathrm{e}^{\gamma(1-q_k)^{\mu}}}{(1-q_k)^{\mu}} + \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, \frac{d\eta}{\eta^2}\Big). \tag{25}$$

Оценим интеграл $Q = \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, d\eta/\eta^2$, учитывая, что $\gamma \gg 1$, $q_k < 1$. Имеем

$$Q = \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, \frac{d\eta}{\eta^2} < \frac{1}{(1-q_k)^{2\mu}} \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{\gamma\eta}\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\gamma(1-q_k)^{2\mu}} \left(\mathrm{e}^{\gamma} - \mathrm{e}^{\gamma(1-q_k)^{\mu}} \right) \approx \frac{1}{\gamma}\, \mathrm{e}^{\gamma} \left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma\mu q_k}\right).$$

Таким образом, $Q = O(\mathrm{e}^{\gamma}\,(1-\mathrm{e}^{-\gamma\mu q_k})/\gamma)$.

Подставляя полученные результаты в (25), с учетом $\gamma\mu q_k \gg 1$ находим

$$\tau \approx \frac{\tau_0}{\gamma\mu}\, \mathrm{e}^{\gamma} \Big(1 + O\Big(\frac{1}{\gamma}\Big)\Big). \tag{26}$$

Аналогичным образом оценим дисперсию. Из (20) следует

$$D_\tau \approx \tau_0^2 \int\limits_0^{q_k} \mathrm{e}^{2\gamma(1-q)^{\mu}}\, \frac{dq}{(1-q)^2} = \frac{\tau_0^2(\sigma)}{\mu n_0} \int\limits_{(1-q_k)^{\mu}}^{1} \mathrm{e}^{2\gamma\eta}\, \frac{d\eta}{\eta^{(\mu+1)/\mu}}.$$

Вычисляя, как и выше, интеграл по частям, получаем

$$D_\tau \approx \frac{\tau_0^2}{2\gamma\mu n_0}\Big(\frac{\mathrm{e}^{2\gamma\eta}}{\eta^{(\mu+1)/\mu}}\Big|_{(1-q_k)^\mu}^{1} + \frac{\mu+1}{\mu}\int\limits_{(1-q_k)^\mu}^{1} \mathrm{e}^{2\gamma\eta}\,\frac{d\eta}{\eta^{(2\mu+1)/\mu}}\Big) =$$

$$= \frac{\tau_0^2}{2\gamma\mu n_0}\Big(\mathrm{e}^{2\gamma} - \frac{\mathrm{e}^{2\gamma(1-q_k)^\mu}}{(1-q_k)^{\mu+1}} + \frac{\mu+1}{\mu}\int\limits_{(1-q_k)^\mu}^{1} \mathrm{e}^{2\gamma\eta}\,\frac{d\eta}{\eta^{(2\mu+1)/\mu}}\Big) \approx$$

$$\approx \frac{\tau_0^2}{2\gamma\mu n_0}\Big(\mathrm{e}^{2\gamma}\,(1 - \mathrm{e}^{-2\gamma\mu q_k}) + \frac{\mu+1}{\mu}\int\limits_{(1-q_k)^\mu}^{1} \mathrm{e}^{2\gamma\eta}\,\frac{d\eta}{\eta^{(2\mu+1)/\mu}}\Big). \qquad (27)$$

Оценивая величину

$$Q_1 = \frac{\mu+1}{\mu}\int\limits_{(1-q_k)^\mu}^{1} \mathrm{e}^{2\gamma\eta}\,\frac{d\eta}{\eta^{(2\mu+1)/\mu}},$$

имеем

$$Q_1 < \frac{\mu+1}{\mu(1-q_k)^{2\mu+1}}\int\limits_{(1-q_k)^\mu}^{1} \mathrm{e}^{2\gamma\eta}\,d\eta = \frac{\mu+1}{2\gamma\mu(1-q_k)^{2\mu+1}}\,\big(\mathrm{e}^{2\gamma\eta}\,\big|_{(1-q_k)^\mu}^{1}\big) \approx$$

$$\approx \frac{(\mu+1)\,\mathrm{e}^{2\gamma}}{2\gamma\mu}\,\big(1 - \mathrm{e}^{-2\gamma\mu q_k}\big).$$

Следовательно,

$$Q_1 = O\Big(\frac{(\mu+1)\,\mathrm{e}^{2\gamma}}{2\gamma\mu}\,\big(1 - \mathrm{e}^{-2\gamma\mu q_k}\big)\Big).$$

Подставляя полученные результаты в (27) и учитывая, как и выше, что $\gamma\mu q_k \gg 1$, находим

$$D_\tau \approx \frac{\tau_0^2}{2\gamma\mu n_0}\,\mathrm{e}^{2\gamma}\,\Big(1 + O\Big(\frac{\mu+1}{2\gamma\mu}\Big)\Big). \qquad (28)$$

4. Обсуждение результатов. Из (26), (28) следует, что в области $0 < \sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$ средняя долговечность и дисперсия долговечности неограниченно возрастают при $\sigma \to 0$. Это означает, что при $\sigma \to 0$ увеличивается разброс значений долговечности, поэтому возникает проблема прогнозирования долговечности пучка волокон, так как долговечность может отклоняться от ее среднего значения в область значений, меньших τ. Оценим вероятность $P(t < \lambda\tau)$, $\lambda \geqslant 1$.

С учетом $F(\infty) = 1$ из (9), (10) следует, что функцию распределения значений долговечности $F(t) = \int\limits_0^t \varphi(\eta)\,d\eta$ можно представить в виде

$$F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n_k-1} S(t,j), \qquad (29)$$

где

$$S(t,j) = \mathrm{e}^{-\omega_0(j)t} \Big/ \prod_{i=0,\ i\neq j}^{n_k-1}\Big(1 - \frac{\omega_0(j)}{\omega_0(i)}\Big). \qquad (30)$$

Так как согласно (1), (21), (22) частота $\omega_0(n) = (n_0 - n)/\tau_{el}(n)$ возрастает с увеличением n, то сумма в правой части (29) является знакочередующейся и ее абсолютная величина не превышает значения первого из отбрасываемых членов. Члены этой суммы убывают по абсолютной величине. Действительно,

$$\Big|\frac{S(t,j+1)}{S(t,j)}\Big| = \left| \frac{\mathrm{e}^{-(\omega_0(j+1)-\omega_0(j))t}\prod\limits_{m=0}^{j-1}\Big(1-\dfrac{\omega_0(j)}{\omega_0(m)}\Big)\prod\limits_{l=j+1}^{n_k-1}\Big(1-\dfrac{\omega_0(j)}{\omega_0(l)}\Big)}{\prod\limits_{i=0}^{j}\Big(1-\dfrac{\omega_0(j+1)}{\omega_0(i)}\Big)\prod\limits_{k=j+2}^{n_k-1}\Big(1-\dfrac{\omega_0(j+1)}{\omega_0(k)}\Big)} \right|$$

С учетом $\omega_0(j+1) > \omega_0(j)$ получаем

$$\Big|\frac{S(t,j+1)}{S(t,j)}\Big| < \left| \frac{\mathrm{e}^{-(\omega_0(j+1)-\omega_0(j))t}\prod\limits_{m=0}^{j-1}\Big(1-\dfrac{\omega_0(j)}{\omega_0(m)}\Big)\prod\limits_{l=j+1}^{n_k-1}\Big(\dfrac{\omega_0(j)}{\omega_0(l)}-1\Big)}{\Big(1-\dfrac{\omega_0(j+1)}{\omega_0(j)}\Big)\prod\limits_{i=0}^{j-1}\Big(1-\dfrac{\omega_0(j)}{\omega_0(i)}\Big)\prod\limits_{k=j+2}^{n_k-1}\Big(\dfrac{\omega_0(j+1)}{\omega_0(k)}-1\Big)} \right|,$$

или

$$\Big|\frac{S(t,j+1)}{S(t,j)}\Big| < \mathrm{e}^{-(\omega_0(j+1)-\omega_0(j))t}\,\Big|\frac{\omega_0(j)/\omega_0(j+1)-1}{1-\omega_0(j+1)/\omega_0(j)}\Big| = \frac{\omega_0(j)\,\mathrm{e}^{-(\omega_0(j+1)-\omega_0(j))t}}{\omega_0(j+1)}.$$

Следовательно, $|S(t,j+1)| < |S(t,j)|$ и

$$S(t,j+1) = O\Big(S(t,j)\,\frac{\omega_0(j)\,\mathrm{e}^{-(\omega_0(j+1)-\omega_0(j))t}}{\omega_0(j+1)}\Big). \tag{31}$$

С учетом (31) имеем

$$F(\lambda\tau) = 1 - S(\lambda\tau,0)\big(1 + O(\omega_0(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda(\omega_0(1)-\omega_0(0))\tau}/\omega_0(1))\big). \tag{32}$$

Оценим величины, входящие в (32). Найдем $S(\lambda\tau,0)$. Согласно (30)

$$S(\lambda\tau,0) = \mathrm{e}^{-\lambda\omega_0(0)\tau} \Big/ \prod_{i=1}^{n_k-1}\Big(1-\frac{\omega_0(0)}{\omega_0(i)}\Big).$$

Далее оценим входящие в $S(\lambda\tau,0)$ величины. Согласно (22), (26) имеем

$$\omega_0(0)\lambda\tau = \frac{n_0\,\mathrm{e}^{-\gamma}}{\tau_0}\,\frac{\lambda\tau_0\,\mathrm{e}^{\gamma}}{\gamma\mu} = \frac{\lambda n_0}{\gamma\mu},$$

$$S_1 = \prod_{i=1}^{n_k-1}\Big(1-\frac{\omega_0(0)}{\omega_0(i)}\Big) = \prod_{i=1}^{n_k-1}\big(1-\mathrm{e}^{-\gamma+\gamma(1-q_i)^{\mu}}\big) < \prod_{i=1}^{n_k-1}\big(1-\mathrm{e}^{-\mu\gamma i/n_0}\big),$$

где $q_i = i/n_0$. Так как $\mu\gamma i/n_0 \gg 1$, то

$$S_1 \approx \exp\Big(\sum_{i=1}^{n_k-1}\ln\big(1-\mathrm{e}^{-\mu\gamma i/n_0}\big)\Big) \approx \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n_k-1}\mathrm{e}^{-\mu\gamma i/n_0}\Big) \approx \exp\big(-\mathrm{e}^{-\mu\gamma/n_0}\big).$$

Таким образом,

$$S(\lambda\tau,0) \approx \exp\Big(-\frac{\lambda n_0}{\mu\gamma}\Big)\exp\big(-\mathrm{e}^{-\mu\gamma/n_0}\big).$$

При $\gamma \to \infty$ $S(\lambda\tau, 0) \to 1$. Таким образом, при $\gamma/n_0 \gg 1$ $S(\lambda\tau, 0) \approx 1$.

Оценим величину $S_2 = \omega_0(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda(\omega_0(1)-\omega_0(0))\tau}/\omega_0(1)$. Имеем

$$S_2 = \frac{\omega_0(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda(\omega_0(1)-\omega_0(0))\tau}}{\omega_0(1)} = \frac{n_0}{n_0-1}\exp\Big(-\gamma+\gamma\Big(1-\frac{1}{n_0}\Big)^{\mu}\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{\lambda n_0}{\mu\gamma}\Big(\Big(1-\frac{1}{n_0}\Big)\exp\Big(\gamma-\gamma\Big(1-\frac{1}{n_0}\Big)^{\mu}\Big)-1\Big)\Big).$$

Учитывая, что $n_0 \gg 1$ и $\gamma/n_0 \gg 1$, получаем

$$S_2 \approx \exp\Big(-\frac{\mu\gamma}{n_0}\Big)\exp\Big(-\frac{\lambda n_0}{\mu\gamma}\exp\Big(\frac{\mu\gamma}{n_0}\Big)\Big).$$

Из этого выражения для S_2 следует, что при $\gamma \to \infty$ $S_2 \to 0$. Таким образом, в области $0 < \sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$

$$P(t < \lambda\tau) = F(\lambda\tau) \approx 1 - \exp\Big(-\frac{\lambda n_0}{\mu\gamma}\Big)\exp\Big(-\exp\Big(-\frac{\mu\gamma}{n_0}\Big)\Big)\times$$
$$\times\Big(1+O\Big(\exp\Big(-\frac{\mu\gamma}{n_0}\Big)\exp\Big(-\frac{\lambda n_0}{\mu\gamma}\exp\Big(\frac{\mu\gamma}{n_0}\Big)\Big)\Big)\Big).$$

Отсюда при $\mu\gamma/n_0 \gg 1$ получаем

$$P(t < \lambda\tau) = F(\lambda\tau) \approx 1 - \exp\Big(-\frac{\lambda n_0}{\mu\gamma}\Big). \qquad (33)$$

Из (33) следует, что при $\lambda n_0/(\mu\gamma) = 1$ $P(t < \lambda\tau) \approx 0$. При $\lambda n_0/(\mu\gamma) \approx 0{,}01$ имеем $\lambda \approx 0{,}01\mu\gamma/n_0$. Величину $0{,}01\tau\mu\gamma/n_0$ с вероятностью $\mathrm{e}^{-0{,}01} \approx 0{,}99$ можно принять в качестве оценки нижней границы долговечности пучка (инкубационный период долговечности).

Оценим величину n_0, необходимую для реализации условия $0 < \sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$. В работе [16] показано, что

$$\sigma_{\mathrm{G}} \approx \frac{\sigma_f\chi}{\sigma_T}\sqrt{\frac{\pi\alpha_s E}{2\lambda_0(1-\nu^2)}}. \qquad (34)$$

Если f — разрывная нагрузка на пучок волокон, а f_f — разрывная нагрузка на элемент пучка, то $\sigma = f/S$, $\sigma_f = f_f/s$. Так как $S/s = n_0$, то с учетом (34) условие $\sigma < \sigma_{\mathrm{G}}$ преобразуется к виду

$$\frac{f}{S} < \frac{f_f\chi}{s\sigma_T}\sqrt{\frac{\pi\alpha_s E}{2\lambda_0(1-\nu^2)}}\,,$$

или

$$f < \frac{n_0 f_f\chi}{\sigma_T}\sqrt{\frac{\pi\alpha_s E}{2\lambda_0(1-\nu^2)}}\,.$$

Из полученного неравенства находим условие, определяющее необходимое число элементов в пучке одинаковых волокон:

$$n_0 > \frac{f\sigma_T}{f_f\chi}\sqrt{\frac{2\lambda_0(1-\nu^2)}{\pi\alpha_s E}}\,. \qquad (35)$$

Все величины, входящие в правую часть (35), можно определить в экспериментальных исследованиях.

Заключение. В работе получены выражения для средней долговечности и дисперсии значений долговечности пучка одинаковых волокон. Показано, что в области напряжений, где зависимость логарифма долговечности ЭПВ при хрупком разрушении является нелинейной, средняя долговечность и дисперсия значений долговечности пучка волокон неограниченно увеличиваются при уменьшении растягивающего напряжения. При этом дисперсия значений долговечности пучка волокон убывает обратно пропорционально числу элементов пучка.

Получена оценка инкубационного периода долговечности и его доверительной вероятности. Показано, что вероятность разрушения многоэлементного образца (пучка волокон) за время, меньшее, чем средняя долговечность, практически равна нулю, несмотря на неограниченное увеличение дисперсии значений долговечности при уменьшении растягивающего напряжения.

Получена оценка нижней границы числа элементов пучка волокон, гарантирующая реализацию требуемой долговечности пучка, что позволяет определять число элементов в пучке волокон при их конструировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Daniels H. E.** The statistical theory of the strength of bundles threads. 1 // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1945. V. 183. P. 405–435.
2. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
3. **Hansen A.** The fiber bundle model: modeling failure in materials / A. Hansen, P. C. Hemmer, S. Pradhan. Weinheim: Wiley-VCH, 2015.
4. **Swolfs Y., Gorbatikh L., Romanov V., et al.** Stress concentrations in an impregnated fibre bundle with random fibre packing // Composites Sci. Technol. 2013. V. 74. P. 113–120.
5. **Цой В. Э., Шерматов Д., Абдуллаев Х. М. и др.** Применение пучковой технологии в длинномерных витых изделиях // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2018. Т. 61, № 6. С. 562–566.
6. **Pradhan S., Hansen A., Chakrabarti B. K.** Failure processes in elastic fiber bundles // Rev. Modern Phys. 2010. V. 82. P. 499–555.
7. **Mishnaevsky L., Brondsted P.** Micromechanical modeling of damage and fracture of unidirectional fiber reinforced composites: A review // Comput. Materials Sci. 2009. V. 44. P. 1351–1359.
8. **Журков С. Н.** Кинетическая концепция прочности твердых тел // Изв. АН СССР. Сер. Неорган. материалы. 1967. Т. 3, № 10. С. 1767–1770.
9. **Карташов Э. М.** Разрушение пленок и волокон. Структурно-статистические аспекты. Изд. 2-е, испр. и доп. / Э. М. Карташов, Б. Цой, В. В. Шевелев. М.: Ленанд, 2015.
10. **Гиляров В. Л.** Кинетическая концепция прочности и самоорганизованная критичность в процессе разрушения материалов // Физика твердого тела. 2005. Т. 47, вып. 5. С. 808–811.
11. **Глебовский П. А., Петров Ю. В.** Кинетическая трактовка структурно-временного критерия разрушения // Физика твердого тела. 2004. Т. 46, вып. 6. С. 1021–1024.
12. **Хон Ю. А., Макаров П. В.** К теории формирования крупных трещин в хрупких твердых телах // Физика твердого тела. 2021. Т. 63, вып. 7. С. 923–927.
13. **Дамаскинская Е. Е., Пантелеев И. А., Корост Д. В., Дамаскинский К. А.** Структурно-энергетические закономерности накопления повреждений при деформировании гетерогенного материала // Физика твердого тела. 2021. Т. 63, вып. 1. С. 103–106.

14. **Бойко Ю. М., Марихин В. А., Москалюк О. А., Мясникова Л. П.** Особенности статистических распределений прочностей моно- и полифиламентных ультраориентированных высокопрочных волокон сверхвысокомолекулярного полиэтилена // Физика твердого тела. 2020. Т. 62, вып. 4. С. 590–596.
15. **Дамаскинская Е. Е., Гиляров В. Л., Пантелеев И. А. и др.** Статистические закономерности формирования магистральной трещины в структурно-неоднородном материале при различных условиях деформирования // Физика твердого тела. 2018. Т. 60, вып. 9. С. 1775–1801.
16. **Шевелев В. В.** Структурно-кинетическая вероятностная модель разрушения и долговечность хрупких материалов // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 4. С. 161–168.
17. **Шевелев В. В.** Критерий разрушения и долговечность материалов при хрупком разрушении // Деформация и разрушение материалов. 2020. № 3. С. 9–15.
18. **Онищенко Д. А.** Формирование детерминистической кривой усталости в стохастической модели пучка волокон // Докл. АН. 2001. Т. 377, № 6. С. 772–775.
19. **Диткин В. А.** Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. М.: Наука, 1974.
20. **Шевелев В. В., Карташов Э. М.** К статистической кинетике хрупкого разрушения материалов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 6. С. 1425–1429.
21. **Шевелев В. В., Карташов Э. М.** Некоторые статистические аспекты хрупкого разрушения и долговечности полимеров. Материалы с трещинами // Высокомолекуляр. соединения. 1997. Т. 39Б, № 2. С. 371–381.

Поступила в редакцию 1/III 2023 г.,
после доработки — 18/VI 2023 г.
Принята к публикации 26/VI 2023 г.