

УДК 519.63

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ И ДАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ В РАВНИННЫХ РЕЧНЫХ ВОДОХРАНИЛИЩАХ

В. И. Квон, Д. В. Квон, С. Д. Зонов, В. Б. Карамышев\*

Новосибирский филиал Института водных и экологических проблем СО РАН,  
630090 Новосибирск

\* Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

На основе двумерной (плановой) нестационарной модели с уравнениями Сен-Венана проведены расчеты течений и переноса примеси в Новосибирском водохранилище. Модель учитывает наличие множества островов. Коэффициенты горизонтального обмена (дисперсии) определяются по формуле, в которой учитывается придонная динамическая скорость. Модель численно реализована с использованием полунявной консервативной конечно-разностной TVD-схемы на разнесенной сетке и процедуры, позволяющей учесть обтекание островов. Приведены модельные примеры расчетов и результаты расчетов динамики дальнего переноса примеси вдоль Новосибирского водохранилища.

**Ключевые слова:** равнинные водохранилища, примесь, плановая модель, TVD-схемы, схемы предиктор-корректор.

**Введение.** В настоящее время двумерные (плановые) модели, основанные на уравнениях Сен-Венана с осреднением переменных модели по глубине водоема, широко применяются в гидродинамических расчетах [1, 2]. Изучаются точные решения этих уравнений [3]. В работе [4] плановые модели использовались при расчете течений и переноса примеси в приплотинной зоне Новосибирского водохранилища. Примесь поступала в расчетную область с водами основного притока реки Берди. Численно обнаружено, что ветровые циркуляции выходят за пределы расчетной области (приплотинной зоны), поэтому оставался невыясненным вопрос о влиянии точности расчета циркуляции на численное моделирование процессов переноса. В связи с этим в [5] рассмотрено течение во всем водохранилище с учетом локального переноса примеси, поступающей с водами реки Берди.

В данной работе исследуется дальний перенос примеси по длине водохранилища. В отличие от [4, 5] вычислительный алгоритм построен с использованием разностной схемы повышенной точности для моделирования дальнего переноса примеси. Следует учитывать, что формальное повышение порядка аппроксимации адвективных членов уравнений приводит к осциллирующим численным решениям в областях резких изменений градиентов. В [6] показано, что для линейного уравнения переноса не существует монотонных конечно-разностных схем с постоянными коэффициентами выше первого порядка аппроксимации. Это обусловило развитие адаптивных к решению численных алгоритмов, обеспечивающих сохранение монотонности численного решения и высокий порядок численной схемы

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-05-64384, 02-01-01029), Министерства образования Российской Федерации (грант № E02-1.0-25) и в рамках VI конкурса-экспертизы научных проектов молодых ученых РАН (грант № 99), а также грантов Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (гранты № НШ-22.2003.5, НШ-2314.2003.1).

(TVD-, TVB-, ENO-схемы и др.). Подробная процедура построения таких алгоритмов и описание их свойств приведены, например, в [7].

В настоящей работе для повышения точности схемы используется известный подход Ошера — Чакраварти [8], который в случае скалярных законов сохранения гарантирует невозрастание полной вариации (TVD-свойство) численного решения со временем. Данная методика является обобщением принципа минимальных значений производных и позволяет строить схемы третьего порядка аппроксимации на гладких плавно изменяющихся решениях. Различные модификации данного алгоритма широко используются в современных методах вычислительной аэрогидродинамики. Например, в [9] на его основе предложена простая в реализации консервативная схема предиктор-корректор для уравнений газовой динамики, позволившая получить достаточно точные численные решения разрывов сложной структуры на относительно грубых сетках. В работе [10] процедура построения TVD-схем Ошера — Чакраварти применена в схемах решения пространственных задач гидродинамики в областях реальных конфигураций, таких как проточные части гидротурбин. В настоящей работе такой подход используется при численном моделировании процессов переноса примеси вдоль равнинных водохранилищ.

**1. Постановка задачи.** Законы сохранения импульсов, массы и уравнения переноса примеси для турбулентного осредненного по глубине течения запишем в следующем виде [2, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha Q_1}{\partial x_\alpha} - lQ_2 &= -gH \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} HK \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} - \frac{r|Q|Q_1}{H^2}, \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha Q_2}{\partial x_\alpha} + lQ_1 &= -gH \frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} HK \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} - \frac{r|Q|Q_2}{H^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial Q_\alpha C}{\partial x_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} HD \frac{\partial C}{\partial x_\alpha} - k_C HC, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $t$  — время;  $z$  — отметка отклонения водной поверхности от ее невозмущенного состояния;  $H(t, x_1, x_2)$  — глубина водоема;  $u_1, u_2$  — составляющие скорости жидкости по осям  $x_1, x_2$  соответственно;  $l$  — параметр Кориолиса;  $r$  — коэффициент трения о дно;  $K$  — коэффициент турбулентной вязкости;  $D$  — коэффициент турбулентной диффузии вещества;  $Q_i = Hu_i$  — удельный расход;  $C$  — концентрация примеси;  $k_C$  — коэффициент распада примеси.

Наличие горизонтального турбулентного обмена (продольной дисперсии) в уравнениях импульсов (1) обусловило возможность задания граничных условий, содержащих турбулентные или полные потоки импульсов. Краевые условия для системы уравнений (1), (2) записываются в следующем виде. На твердых границах (берег) заданы условия непротекания и отсутствия турбулентных потоков импульсов и примеси:

$$Q_n = 0, \quad HK \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad HD \frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

На жидких границах, где вода вытекает из водоема, заданы расход воды и условие отсутствия турбулентных потоков импульсов и примеси:

$$Q_n = f_n(x, t), \quad HK \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad HD \frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

На жидких границах, где вода втекает в водоем, заданы расход, полный поток импульсов и полный поток примеси:

$$Q_n = f_n(x, t), \quad Q_n u_i - HK \frac{\partial u_i}{\partial n} = f_{ni}(x, t) \quad (i = 1, 2), \quad Q_n C - HD \frac{\partial C}{\partial n} = f_C(x, t). \quad (5)$$

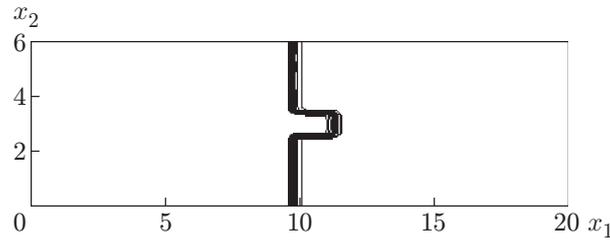


Рис. 1

В (3)–(5)  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к береговому контуру;  $Q_n$  — нормальная составляющая вектора удельного расхода;  $f_n, f_{ni}, f_C$  — заданные функции.

Помимо граничных условий (3)–(5) необходимо задать начальные распределения искомых параметров:  $Q_1 = Q_1(x_1, x_2)$ ,  $Q_2 = Q_2(x_1, x_2)$ ,  $C = C(x_1, x_2)$ ,  $z = z(x_1, x_2)$  при  $t = 0$ .

**2. Разностные уравнения.** Для численного решения сформулированной задачи используется разнесенная С-сетка Аракавы [11]. При этом разностный аналог уравнений (1), (2) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^{m+1} - Q_1^m}{\tau} &= -gH \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{z^{m+1} + z^m}{2} - \frac{r|Q|Q_1^{m+1}}{H^2} + \Lambda_1 u_1^m, \\ \frac{Q_2^{m+1} - Q_2^m}{\tau} &= -gH \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{z^{m+1} + z^m}{2} - \frac{r|Q|Q_2^{m+1}}{H^2} + \Lambda_2 u_2^m, \\ \frac{z^{m+1} - z^m}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{Q_1^{m+1} + Q_1^m}{2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{Q_2^{m+1} + Q_2^m}{2} &= 0, \\ \frac{(HC)^{m+1} - (HC)^m}{\tau} &= \Lambda_C C^m - k_C HC^{m+1}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau$  — шаг по времени;  $m$  — номер временного слоя;  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_C$  — конечно-разностные операторы для адвективных членов, а также для членов, характеризующих горизонтальный обмен и силы Кориолиса. При аппроксимации адвективных членов использована указанная выше процедура построения TVD-схем Ошера — Чакраварти.

Вычислительный алгоритм включает пересчет (корректор) с  $m$ -го слоя на  $(m + 1)$ -й слой, обеспечивающий второй порядок точности по времени, при этом значения величин на половинном слое определяются как полусумма их значений на  $m$ -м слое и значений на  $(m + 1)$ -м слое, полученных на предыдущем этапе (предиктор). Уравнение для уровня водной поверхности решается с использованием итерационного метода верхней релаксации. Модель учитывает сложную конфигурацию водоема в плане и наличие множества островов.

**3. Результаты численных расчетов.** Для тестирования предложенного алгоритма численно решена задача о распространении консервативной примеси ( $k_C = 0$ ) в канале (рис. 1). Длина канала полагалась равной 20 км, ширина — 6 км, глубина — 10 м. В расчетной области строилась равномерная квадратная сетка с шагами, равными 200 м. Шаг по времени полагался равным 200 с.

Сначала был проведен расчет установившегося равномерного течения в канале со скоростью 0,5 м/с при заданных расходах  $Q_1 = 5 \text{ м}^2/\text{с}$  во входном (левая граница) и выходном (правая граница) сечениях. При этом коэффициенты турбулентной диффузии  $K$  и  $D$  полагались равными [12]:  $K = D = 6,2Hu_*$  ( $u_*$  — динамическая скорость на дне водоема). Фоновая концентрация примеси составляла 5 мкг/л. Затем моделировался локальный

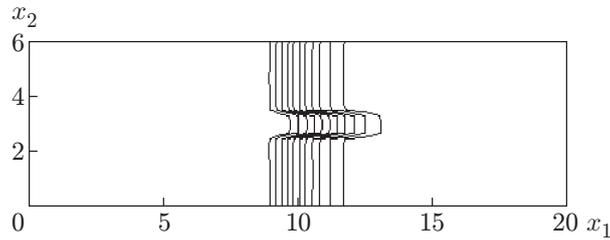


Рис. 2

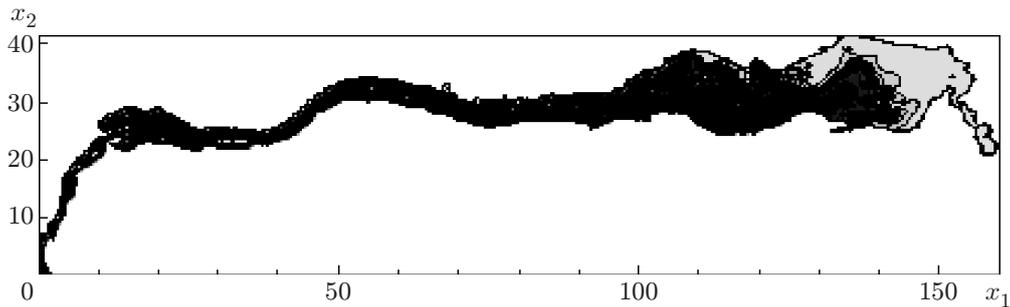


Рис. 3

сброс примеси в средней части входного сечения (полосе шириной 800 м), в которой задавалась концентрация примеси, равная 30 мкг/л. Через 2800 с это условие скачкообразно переносилось на всю область входного сечения.

На рис. 1 представлены результаты расчета распространения примеси в момент времени  $t = 22800$  с (114 шагов по времени), полученные по предложенной TVD-схеме предиктор-корректор второго порядка аппроксимации. Видны внутренние слои, ширина которых составляет три разностных интервала. Их положение соответствует точному разрывному решению задачи при отсутствии диффузионного переноса, что подтверждает консервативность схемы. Следует также отметить неосциллирующее поведение численного решения в областях с особенностями. Дальнейшее измельчение сетки не приводит к повышению точности расчета. Это свидетельствует о том, что диссипативные свойства схемы не преобладают над диффузионными свойствами модели.

На рис. 2 приведены результаты расчета той же задачи по схеме первого порядка. В отличие от рис. 1 видно полное размазывание структуры решения (на 12 разностных интервалах), что не позволяет применять данный алгоритм для расчета течений с резкими изменениями градиентов на относительно грубых сетках. Проблематично также использование этой схемы для расчета вязких течений без привлечения дополнительных алгоритмов адаптации сеток.

На основе изложенной выше модели и указанной численной схемы выполнены расчеты течения и процессов дальнего переноса примеси в Новосибирском водохранилище, поступающей в него из реки Оби во входном сечении у города Камень-на-Оби.

Крупнейшее в Западной Сибири Новосибирское водохранилище представляет собой неширокий вытянутый водоем (рис. 3) [13] протяженностью около 180 км. Основные параметры Новосибирского водохранилища следующие [14]: объем  $8,8 \text{ км}^3$ , площадь зеркала  $1070 \text{ км}^2$ , максимальная ширина 17 км, максимальная глубина 22 м, средняя глубина 8,2 м. От города Камень-на-Оби до поселка Завьялово (120 км) водохранилище имеет вид реки шириной до 5 км. От поселка Завьялово до плотины водохранилище представляет собой озеровидный плес. По левобережной затопленной пойме располагаются многочисленные

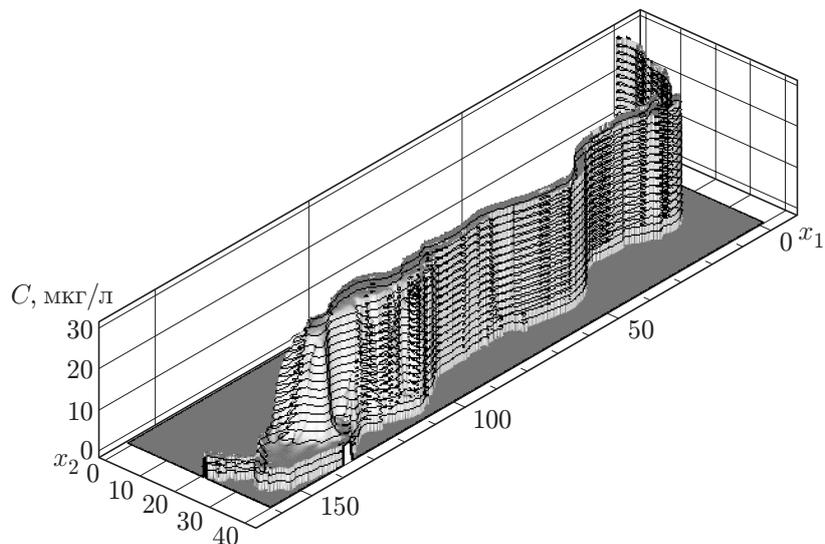


Рис. 4

острова. Объем воды в озерной части водохранилища составляет 73 % общего объема воды. Основное поступление воды в Новосибирское водохранилище (более 95 %) происходит через входной створ по реке Оби. На боковую приточность приходится менее 5 % общего объема притока. Основная часть поступившей в водохранилище воды проходит транзитом. В среднем водохранилище характеризуется семикратной сменой воды в течение года. Согласно данным 1978 г. максимальный расход воды в реке Оби (у плотины) составляет  $3060 \text{ м}^3/\text{с}$ , в реке Берди —  $169 \text{ м}^3/\text{с}$  (среднегодовой расход воды в реке Оби в 1978 г. близок к среднемноголетнему расходу) [15].

В численных расчетах шаг по времени составлял 5 мин, шаг сетки — 300 м. Расход воды в реке Оби во входном сечении (выше города Камень-на-Оби) равен  $2250 \text{ м}^3/\text{с}$ , у плотины —  $2500 \text{ м}^3/\text{с}$ , в реке Берди —  $250 \text{ м}^3/\text{с}$ .

Расчет стокового течения был начат от состояния покоя при начальной концентрации примеси, равной 5 мкг/л. Во входных сечениях (в сечении реки Оби вблизи города Камень-на-Оби, в устьях боковых притоков реки Оби, в том числе реки Берди) задавались также фоновые значения концентрации примеси, равные 5 мкг/л. Анализ результатов расчета изменения средней кинетической энергии во времени показал, что стоковое течение устанавливается в течение  $3 \div 4$  сут.

Исследовалась также динамика распространения примеси в водохранилище при ее поступлении с водами реки Оби через входное сечение у города Камень-на-Оби с постоянной концентрацией 30 мкг/л. На рис. 3, 4 приведены изолинии и распределение концентрации примеси через 24 дня после начала ее поступления в водохранилище. На рис. 3, 4 видно, что концентрация не меняется на всем протяжении водного пространства от города Камень-на-Оби до середины озерной части водохранилища, а передний фронт имеет небольшую ширину. В аналогичных расчетах по схеме первого порядка размазывание фронта составляет более 20 км. Распределение примеси по длине водохранилища имеет структуру прерывной “волны”. Примесь продвигается вдоль водохранилища, сохраняя постоянную концентрацию за фронтом “волны”. На речном участке примесь распределена равномерно по ширине, а в озерной части неравномерное ее распределение с большей концентрацией вблизи правого берега обусловлено характером течения, которое локализуется вдоль старого русла реки Оби. Анализ динамики продвижения примеси показал, что при катастрофическом поступлении загрязнения в водохранилище через входное сечение у города Камень-на-Оби оно достигнет приплотинной зоны примерно через 1 мес.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Остапенко В. В.** Численное моделирование волновых течений, вызванных сходом берегового оползня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 109–117.
2. **Климович В. И., Прокофьев В. А.** Численное исследование заносимости морских водозаборных сооружений на основе решения плановой задачи гидродинамики открытого потока и транспортных наносов // Изв. Всерос. науч.-исслед. ин-та гидротехники им. Б. Е. Веденеева. Гидравлика гидротехнических сооружений. 2002. Т. 240. С. 134–145.
3. **Остапенко В. В.** О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 62–74.
4. **Зонов С. Д., Квон Д. В., Квон В. И.** Численное моделирование процессов переноса примеси в прибрежной зоне водохранилища // Экологический анализ региона (теория, методы, практика). Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. С. 212–220.
5. **Зонов С. Д., Квон Д. В., Квон В. И.** Численное моделирование турбулентных течений и процессов переноса тепла и примеси в равнинных речных водохранилищах // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7. С. 21–27; Вестн. Казах. гос. нац. ун-та. 2002. № 4. С. 21–27. Совмест. вып. Ч. 3.
6. **Годунов С. К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. № 47. С. 271–306.
7. **Карамышев В. Б.** Монотонные схемы и их приложения в газовой динамике. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1994.
8. **Osher S., Chakravarthy S. R.** High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 21. P. 955–984.
9. **Karamyshev V. B., Kovenya V. M.** A predictor-corrector-type schemes for solving nonstationary gas dynamics problems // Russ. J. Theor. Appl. Mech. 1991. V. 1, N 3. P. 199–212.
10. **Kovenya V., Cherny S., Sharov S., et al.** On some approaches to solve CFD problems // Comput. Fluids. 2001. V. 30, N 7/8. P. 903–916.
11. **Backhaus J. O.** A semi-implicit scheme for the shallow water equations for application to shelf sea modelling // Continent. Shelf Res. 1983. V. 2, N 4. P. 243–254.
12. **Elder J. W.** The dispersion of marked fluids in turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1959. V. 5, N 4. P. 544–660.
13. **Карта Новосибирского водохранилища /** Сост. Министерство речного флота РСФСР. Обское бассейновое управление пути. Новосибирск, 1978.
14. **Подлипский Ю. И.** К вопросу организации и некоторые итоги комплексных исследований Новосибирского водохранилища // Тр. Зап.-Сиб. регион. науч.-исслед. ин-та. Вып. 70. Комплексные исследования Новосибирского водохранилища. М.: Гидрометеиздат, 1985. С. 3–16.
15. **Государственный водный кадастр:** Ежегодные данные о режиме и ресурсах поверхностных вод суши. Новосибирск, 1980. Т. 6, вып. 0-3.

*Поступила в редакцию 17/IV 2003 г.*