ПМТФ, № 6, 1969

НЕКОТОРЫЕ СЕМЕЙСТВА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

М. Т. Гладышев

(*Новосибирск*)

Ниже приводятся результаты исследования точных решений уравнений двумерной неустановившейся и установившейся теории мелкой воды, основанного на групповых свойствах этих уравнений. В первой части приведены групповые свойства рассматриваемых уравнений, во второй части приведены инвариантные решения этих уравнений.

Рассмотрим уравнения двумерных неустановившихся открытых потоков жидкости (теория мелкой воды или теория длинных волн)

$$D_t z + z\operatorname{div}\ \mathbf{u} = 0, \qquad D_t\mathbf{u} + \nabla z = 0 \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u_1,\ u_2\}$ — вектор скорости в горизонтальной плоскости $(x^1,\ x^2)$, $z = gh$, g — ускорение силы тяжести, h — глубина потока, t — время. Векторный оператор ∇ есть оператор — градиент по переменным $\mathbf{x} = \{x^1,\ x^2\}$, div есть символ дивергенции по переменным $\mathbf{x}$, а оператор D_t дается формулой

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_1\frac{\partial}{\partial x^1} + u_2\frac{\partial}{\partial x^2}$$

Первое уравнение (0.1) будет уравнением неразрывности, а второе уравнение (0.1) — уравнением движения. Уравнения (0.1) как первое приближение из точных уравнений гидродинамики впервые получены Фридрихсом и Келлером в 1948 г. [1].

В ряде задач, связанных с регулированием рек, предсказанием паводков и др., для изучения течений в реках применяются нелинейные дифференциальные уравнения (0.1) с подходящими добавлениями, которые позволяют учесть изменение отметки дна речных долин и сопротивление течению, вызванное неровностью речного дна. В этом случае вместо второго уравнения (0.1) будем иметь

$$D_t\mathbf{u} + \nabla z = -\nabla z_0 - F\mathbf{u}|\mathbf{u}| \tag{0.2}$$

Здесь $z_0 = z_0(x^1,\ x^2)$ — отметка дна, $F = F(x^1\ \ x^2,\ z)$ — коэффициент трения.

1. Групповые свойства. Задача изучения групповых свойств дифференциальных уравнений состоит из нахождения наиболее широкой локальной группы Ли преобразований, допускаемой данной системой уравнений, и классификации инвариантных и частично инвариантных решений этой системы, введенных Л. В. Овсянниковым [2].

Для нахождения инфинитезимальных операторов данной системы существует известная методика, приводящая к решению определяющих уравнений для координат этих операторов [2]. Дадим сводку результатов по групповым свойствам системы (0.1), (0.2) и вытекающих из нее уравнений, которые вычислены по этой методике.

Для уравнений (0.1), (0.2) наиболее узкая группа, состоящая из одного оператора $X = \partial(\cdot)\ /\ \partial t$, будет при произвольных функциях z_0 и F. Расширение группы допускается при специальных видах z_0 и F, не интересных с физической точки зрения. Этот вопрос для одномерных уравнений (0.1), (0.2) рассматривался в [3]. Наиболее широкая группа имеет место при $z_0 = \text{const}$ и $F = 0$, т. е. для уравнений (0.1). Алгебра Ли основной группы, допускаемой системой (0.1), порождается линейно-независимыми операторами

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial u_1} \\
&X_5 = t\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial t} + x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \\
&X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \quad X_8 = t\frac{\partial}{\partial t} - u_1\frac{\partial}{\partial u_1} - \\
&\qquad\qquad - u_2\frac{\partial}{\partial u_2} - 2z\frac{\partial}{\partial z} \\
&X_9 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx^1\frac{\partial}{\partial x^1} + tx^2\frac{\partial}{\partial x^2} + (x^1 - tu_1)\frac{\partial}{\partial u_1} + (x^2 - tu_2)\frac{\partial}{\partial u_2} - 2tz\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Система трех уравнений (0.1) будет частным случаем системы четырех уравнений двумерной неустановившейся газовой динамики [2], а именно при $A = 2p$ и $p = {}^1/{}_2\rho^2$ последние переходят в уравнения (0.1) (с заменой ρ на z). В случае уравнений газовой динамики при $A = 2p$ появляется дополнительно оператор

$$X_{10} = p\frac{\partial}{\partial p} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}$$

изменяется знак в последнем члене выражения для X_8 и в выражении для X_9 появляется член — $4tp\partial(\cdot) \,/\, \partial p$.

Решения уравнений (0.1) будут частично инвариантными решениями уравнений газовой динамики, когда энтропия $S = \text{const}$. Известно, что при этом возможно расширение группы. Можно показать, что группа, допускаемая уравнениями изэнтропического движения, вытекает из группы, допускаемой уравнениями неизэнтропического движения.

С учетом отмеченных отличий для уравнений (0.1) справедлива классификация инвариантных решений уравнений газовой динамики, выполненная в [4].

Помимо инвариантных решений существуют другие классы решений, которые пока исследованы мало. К ним относятся частично инвариантные решения типа простых волн и двойных волн [5–7]. При исследовании двойных волн ключевым для исследования будет уравнение [6]

$$(z - z_{u_2}{}^2) z_{u_1u_1} + 2z_{u_1}z_{u_2}z_{u_1u_2} + (z - z_{u_1}{}^2) z_{u_2u_2} + 2z - z_{u_1}{}^2 - z_{u_2}{}^2 = 0 \tag{1.2}$$

которое получается из (0.1) в предположениях

$$z = z(u_1, u_2), \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{\partial u_1}{\partial x^2} = 0$$

Вычисления группы, допускаемой уравнением (1.2), дают следующие операторы:

$$
\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad X_3 = u_2\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \\
X_4 = u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + 2z\frac{\partial}{\partial z}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Отметим, что к этому же результату приводит решение задачи групповых свойств для равносильной уравнению (1.2) квазилинейной системы

$$
\begin{gathered}
z_{u_1} - \tau = 0, \quad z_{u_2} - \sigma = 0, \quad \sigma_{u_1} - \tau_{u_2} = 0, \\
(z - \sigma^2)\tau_{u_1} + 2\tau\sigma\tau_{u_2} + (z - \tau^2)\sigma_{u_2} + 2z - \tau^2 - \sigma^2 = 0
\end{gathered}
$$

которая получается введением вспомогательных переменных τ и σ.

Используя внутренние автоморфизмы группы преобразований (1.3), построим оптимальную систему однопараметрических подгрупп

$$X_1, \quad X_3 + \alpha X_4, \quad X_4 \tag{1.4}$$

Инвариантные решения ранга 2 относительно оператора растяжения X_6 из (1.1) называются коническими течениями и имеют вид [8]

$$u_1 = x + u(x, \ y), \ u_2 = y + v(x, \ y), \quad z = h(x, y) \ (x = t^{-1}x^1, \ \ y = t^{-1}x^2) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (0.1), получим систему

$$\begin{gathered} uh_x + vh_y + h(u_x + v_y) = -2h \\ uu_x + vu_y + h_x = -u, \ uv_x + vv_y + h_y = -v \end{gathered} \tag{1.6}$$

Вычисления группы, допускаемой системой (1.6), приводят к следующим результатам:

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v} \\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2h\frac{\partial}{\partial h} \end{gathered} \tag{1.7}$$

Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы (1.7) совпадает с (1.4).

В случае установившегося движения [9] уравнения (0.1) принимают вид

$$\begin{gathered} u_1 z_{x^1} + u_2 z_{x^2} + z(u_{1x^1} + u_{2x^2}) = 0 \\ u_1 u_{1x^1} + u_2 u_{1x^2} + z_{x^1} = 0, \quad u_1 u_{2x^1} + u_2 u_{2x^2} + z_{x^2} = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

которые допускают группу

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2} \\ X_3 = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_5 = u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + 2z\frac{\partial}{\partial z} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы (1.9) дается операторами

$$X_1 + \beta X_5, \quad X_3 + \alpha X_4 + \beta X_5, \quad X_4 + \beta X_5 \tag{1.10}$$

В заключение отметим, что одномерные уравнения мелкой воды с цилиндрическими волнами

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial r} + z\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{zu}{r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \tag{1.11}$$

допускают следующую группу преобразований:

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial r}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2z\frac{\partial}{\partial z} \\ X_4 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tr\frac{\partial}{\partial r} + (r - tu)\frac{\partial}{\partial u} - 2tz\frac{\partial}{\partial z} \end{gathered} \tag{1.12}$$

2. **Приложения**. В этом пункте рассматриваются точные решения уравнений мелкой воды и вытекающих из них уравнений с использованием результатов групповых свойств, описанных в первом пункте.

А. Примеры инвариантных решений уравнений (*0.1*), (*0.2*). Знание основной группы и оптимальных систем одно- и двухпараметрических подгрупп позволяет найти инвариантные решения соответственно ранга 2 и 1. Оптимальная система однопараметрических подгрупп группы (1.1) содержит 13 операторов [4], и соответственно имеем 13 инвариантных решений ранга 2. Исходные величины будут функциями двух аргументов, значения которых разные для разных подгрупп. Оптимальная система двухпараметрических подгрупп группы (1.1) дает 30 инвариантных решений ранга 1, когда исходные величины зависят от одного аргумента. Решение получающихся при этом систем уравнений в обоих случаях можно искать, используя численные методы.

Отметим несколько примеров инвариантных решений для системы (0.1), (0.2), записывающихся в явном виде. Эти решения имеют самостоятельный интерес, а также могут быть использованы для проверки численных методов.

Начнем с инвариантных решений ранга 1.

а) Рассмотрим инвариантное решение, соответствующее подгруппе $H = \langle X_7, X_1 - X_6 + X_8 \rangle$. Оно имеет вид

$$u_r = rU, \quad u_\theta = rV, \quad z = r^2 H, \quad \lambda = re^t \tag{2.1}$$

Здесь r, θ — полярные координаты в плоскости x^1, x^2, а u_r, u_θ — проекции скорости на оси полярных координат.

Будем рассматривать движение воды над дном, уравнение которого $z_0 = -{}^1/_2 r^2$, без учета трения ($F = 0$).

Подставляя (2.1) в уравнения (0.1), (0.2), записанные в полярных координатах, найдем одно из решений

$$U = 1, \ V = 0, \qquad H = A\lambda^{-2}$$

где A — любое положительное число.

Это дает решение такой краевой задачи. В начальный момент $t = 0$ задано $u_r = r$, $u_\theta = 0$, $z = A$ $(0 \leqslant r \leqslant a)$, граничное условие при $r = a$ $(t > 0)$ имеет вид $u_r = a$. Решение имеет вид

$$u_r = r, \quad u_\theta = 0, \quad z = A \exp(-2t) \quad (0 \leqslant r \leqslant a, \ t \geqslant 0)$$

Дно не оголяется, хотя глубина со временем убывает до нуля.

б) Для подгруппы $H = \langle X_6 - X_8, X_1 + X_9 \rangle$ имеем инвариантное решение

$$u_r = \frac{r(t+U)}{1+t^2}, \quad u_\theta = \frac{rV}{1+t^2}, \quad z = \frac{r^2 H}{(1+t^2)^2}, \quad \lambda = \theta \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в уравнения (0.1), найдем одно из решений

$$U = 0, \quad V = A, \quad H = {}^1/_2 (A^2 - 1) \quad (A = \mathrm{const}, \ A^2 > 1)$$

Поставим следующую задачу: найти решение, если в начальный момент $t = 0$, $u_r = 0$, $u_\theta = Ar$, $z = {}^1/_2 (A^2 - 1) r^2 (0 \leqslant r \leqslant a)$ и при

$$r = a(t > 0) \ \ u_r = at(1 + t^2)^{-1}$$

Решение имеет вид

$$u_r = \frac{rt}{1+t^2}, \quad u_\theta = \frac{Ar}{1+t^2}, \quad z = \frac{(A^2-1) r^2}{2(1+t^2)^2} \quad (0 \leqslant r \leqslant a, \ t \geqslant 0)$$

в) Для пары $\langle X_6, X_7 \rangle$ имеем

$$u_r = U, \quad u_\theta = V, \quad z = H, \quad \lambda = rt^{-1} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (0.1), найдем частное решение

$$U = {}^1/_2 \lambda, \quad V = A\lambda, \quad H = {}^1/_8 (4A^2 + 1)\lambda^2$$

Пусть в начальный момент $t = 1$ $(0 \leqslant r \leqslant a)$ заданы условия

$$u_r = {}^1/_2 r, \quad u_\theta = Ar, \quad z = {}^1/_8 (4A^2 + 1) r^2$$

а на границе $r = a(t > 1)$ $u_r = {}^1/_2\, at^{-1}$. Решение такой задачи дается выражениями

$$u_r = \frac{r}{2t}, \quad u_\theta = \frac{Ar}{t}, \quad z = \frac{4A^2+1}{8}\frac{r^2}{t^2} \quad (0 \leqslant r \leqslant a,\ t \geqslant 1)$$

Это решение качественно напоминает предыдущее.

г) На подгруппе $H = \langle X_7,\ X_1 + X_9 \rangle$ имеем инвариантное решение

$$u_r = \frac{rt}{1+t^2} + \frac{U}{r}, \quad u_\theta = \frac{V}{r}, \quad z = \frac{H}{1+t^2}, \quad \lambda = \frac{r}{\sqrt{1+t^2}} \tag{2.4}$$

Рассмотрим случай, когда дно задано уравнением

$$z_0 = {}^1/_2\, Ar^{-2} \ (A < 0)$$

Трение не рассматриваем ($F = 0$). Подставляя (2.4) в уравнения (0.1), (0.2), находим частное решение

$$U = 0, \quad V = 0, \quad H = -{}^1/_2\, A\lambda^{-2} - {}^1/_2\lambda^2 + 2b^2$$

Пусть в начальный момент

$$t = 0 \ (a \leqslant r \leqslant \sqrt{2}[1 + (1 - {}^1/_2\, A\,/\,b^4)^{1/2}]^{1/2}\, b, \ \ 0 < a < \sqrt{2}\,b)$$

задано состояние

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad z = 2b^2 - {}^1/_2 r^{-2}(A + r^4)$$

а на границе $r = a(t > 0)$

$$u_r = \frac{at}{1+t^2}, \qquad z = \frac{2b^2}{1+t^2} - \frac{1}{2a^2}\left(A + \frac{a^4}{(1+t^2)^2}\right)$$

Решение такой задачи дается выражениями

$$u_r = \frac{rt}{1+t^2}, \quad u_\theta = 0, \quad z = \frac{2b^2}{1+t^2} - \frac{1}{2r^2}\left(A + \frac{r^4}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$a \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\,[1 + (1 - {}^1/_2 A\,/\,b^4)^{1/2}]^{1/2}(1 + t^2)^{1/2} b, \qquad t \geqslant 0$$

Граница жидкости ($z = 0$) движется по закону

$$r = \sqrt{2}[1 + (1 - {}^1/_2 A\,/\,b^4)^{1/2}]^{1/2}\, b(1 + t^2)^{1/2}$$

При $t \to \infty$ уровень стремится к горизонтальному положению.

Частный случай этого решения, а именно, когда $A = 0$ (горизонтальное дно), исследован в [4].

В предыдущих решениях трение не учитывалось, приведем пример с учетом трения.

д) На подгруппе $H = \langle X_7,\ X_6 + X_8 \rangle$ получаем инвариантное решение

$$u_r = r^{-1}U, \quad u_\theta = r^{-1}V, \quad z = r^{-2}H, \quad \lambda = r^{-2}t \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай, когда

$$z_0 = -\frac{A}{2r^2}\ (A > 0), \qquad F - \frac{A}{2r^3 z}$$

Поставляя (2.5) в уравнения (0.1), (0.2), найдем одно из решений

$$U = {}^1/_2\, \lambda^{-1}, \ V = 0, \ H = {}^1/_2 A$$

Поставим задачу: найти решение, если в начальный момент $t = 1$ ($a \leqslant r \leqslant b$) задано

$$u_r = {}^1/_2\, r, \quad u_\theta = 0, \quad z = {}^1/_2 r^{-2} A$$

и на границах имеем

$$u_r = {}^1/_2\, at^{-1}, \ z = {}^1/_2\, Aa^{-2} \text{ при } r = a(t > 1)$$

$$u_r = {}^1/_2\, bt^{-1} \text{ при } r = b\ (t > 1)$$

Решение этой задачи дается выражениями

$$u_r = {}^1/_2 t^{-1} r,\ u_\theta = 0, \quad z = {}^1/_2\, A r^{-2} \quad (a \leqslant r \leqslant b,\ t \geqslant 1)$$

Интересно отметить, что отметка уровня постоянна, так как $z + z_0 \equiv 0$, т. е. в любое время свободная поверхность горизонтальна и неизменна.

Перейдем к инвариантным решениям ранга 2. Оператору $X_1 + X_4$ соответствует инвариантное решение вида

$$u_1 = t + U, \quad u_2 = V, \quad z = H, \quad \lambda = {}^1/_2 t^2 - x^1, \quad \mu = x^2 \tag{2.6}$$

Рассмотрим случай, когда дно будет наклонной плоскостью

$$z_0 = -ix^1 - jx^2 \quad (i \neq 1,\ j \neq 0)$$

Трением пренебрегаем.

Подставляя (2.6) в уравнения (0.1), (0.2), получим систему в частных производных с двумя независимыми переменными, коэффициенты которой не зависят от λ и μ. Поэтому эта система допускает решение типа простых волн, т. е.

$$U = U(\theta), \quad V = V(\theta), \quad H = H(\theta) \quad (\theta = \theta_0 + a_1\lambda + a_2\mu)$$

Одно из решений типа простых волн имеет вид

$$U = 0, \quad V = 0, \quad H = (1 - i)a^{-1}\theta \quad (a = \text{const}, \quad a \neq 0)$$

Это дает решение такой задачи: в начальный момент $t = 0$ жидкость находится в покое и уровень ее свободной поверхности совпадает с плоскостью

$$z = (1 - i)a^{-1}\theta_0 - (1 - i)x^1 + jx^2$$

Дальше (при $t > 0$) движение жидкости описывается выражениями

$$u_1 = t, \quad u_2 = 0, \quad z = (1 - i)a^{-1}\theta_0 + (1 - i)({}^1/_2 t^2 - x^1) + jx^2$$

Граница жидкости ($z = 0$) движется со скоростью

$$| 1 - i \,|\, [(1 - i)^2 + j^2]^{-1/2}\, t$$

и свободная поверхность перемещается параллельно самой себе.

Рассмотрим оператор $X_1 + X_9$. Ему соответствует инвариантное решение вида

$$u_1 = \frac{tx^1}{1 + t^2} + \frac{U}{x^1}, \quad u_2 = \frac{tx^2}{1 + t^2} + \frac{V}{x^2}, \quad z = \frac{H}{1 + t^2}, \quad \lambda = \frac{x^1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$\mu = \frac{x^2}{\sqrt{1 + t^2}} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в уравнения (0.1), получим систему, частное решение которой имеет вид

$$U = 0, \quad V = 0, \quad H = {}^1/_2\,(a^2 - \lambda^2 - \mu^2)$$

Это есть решение, найденное в [4] и отмеченное выше, которое имеет вид

$$u_r = \frac{tr}{1 + t^2}, \quad u_\theta = 0, \quad z = \frac{1}{2(1 + t^2)}\left(a^2 - \frac{r^2}{1 + t^2}\right) \tag{2.8}$$

$$(0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{1 + t^2},\ t \geqslant 0)$$

Таким образом, наиболее простые инвариантные решения, которые удалось найти, описываются одномерными уравнениями мелкой воды с цилиндрическими волнами (1.11).

Знание основной группы (1.12) дает возможность находить инвариантные решения ранга 1 системы (1.11). Например, оператору $\alpha X_2 - (\alpha - 1) \times \times X_3$ отвечает автомодельное решение

$$u = rt^{-1}U, \quad z = r^2t^{-2}H, \quad \lambda = rt^{-\alpha}$$

а решение (2.8) отвечает оператору $X_1 + X_4$ из группы (1.12).

Б. Простые волны. Такие волны представляют собой частично инвариантные решения ранга 1 [5]. В этом случае

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi), \quad z = z(\xi), \quad \xi = \xi(x^1, \ x^2, \ t) \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + u_1\frac{\partial\xi}{\partial x^1} + u_2\frac{\partial\xi}{\partial x^2}$$

а) Пусть

$$d\xi \,/\, dt = 0 \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) означает, что поверхности уровня простой волны будут контактными характеристиками. Из (0.1) с учетом (2.9), (2.10) получаем

$$z = \mathrm{const}, \quad \mathbf{u}^{\cdot} \nabla\xi = 0$$

Это случай вырожденной простой волны.

б) Перейдем к рассмотрению невырожденной простой волны

$$d\xi \,/\, dt \neq 0$$

Легко показать, что невырожденная простая волна есть безвихревое движение. Действительно, умножив второе уравнение (0.1) с учетом (2.9) векторно на $\mathbf{u}^{\cdot}$, получим

$$\mathbf{u}^{\cdot} \times \nabla\xi = 0 \tag{2.11}$$

Исключение из уравнений (0.1) $\mathbf{u}^{\cdot}$ приводит к соотношению

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = c^2 \,|\nabla\xi|^2 \qquad (c^2 = z) \tag{2.12}$$

Это уравнение показывает, что поверхности уровня невырожденной простой волны $\xi = \mathrm{const}$ будут звуковыми характеристиками (термин заимствован из газовой динамики). Исключение $\mathbf{u}^{\cdot}\nabla\xi$ приводит к соотношению

$$z\,(\mathbf{u}^{\cdot})^2 = (z^{\cdot})^2 \tag{2.13}$$

Из (2.11) также следует, что нормаль к поверхности $\xi = \mathrm{const}$ имеет одно и то же направление для всех ее точек. Поэтому каждая поверхность уровня простой волны есть плоскость в пространстве $E_3(x^1, \ x^2, \ t)$.

Отсюда имеем

$$u_1^{\cdot}\, x^1 + u_2^{\cdot}\, x^2 - (qq^{\cdot} + z^{\cdot})t = P(\xi) \quad (q = |\mathbf{u}|) \tag{2.14}$$

Здесь $P(\xi)$ — произвольная функция. Полное описание невырожденных простых волн дается уравнениями (2.13) и (2.14). Таким образом, простые волны уравнений (0.1) изучены до конца.

В. Двойные волны. Это есть частично инвариантные решения ранга 2. Понятие двойной волны впервые введено в [6], а его групповая природа описана в [7]. В этом случае

$$u = u(\xi, \ \eta), \quad z = z(\xi, \ \eta), \quad \xi = \xi(x^1, \ x^2, \ t), \ \eta = \eta\ (x^1, \ x^2, \ t) \tag{2.15}$$

Функции ξ и η называются параметрами двойной волны. Они могут быть выбраны неединственным образом. Будем считать неизвестные u_1 и u_2 независимыми и выберем их в качестве параметров ξ и η. Тогда из системы (0.1) при условии потенциальности течения получаем уравнение (1.2), допускающее группу (1.3).

Для удобства записи инвариантных решений перейдем в уравнении (1.2) к полярным координатам

$$q = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg}\,(u_2 / u_1)$$

Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$(z - q^{-2}z_\theta^2)z_{qq} + 2q^{-2}z_q\, z_\theta\, z_{q\theta} + q^{-2}(z - z_q^2)z_{\theta\theta} - q^{-1}z_q^3 - 2q^{-3}z_q\, z_\theta^2 - \\ - z_q^2 - q^{-2}z_\theta^2 + q^{-1}zz_q + 2z = 0 \qquad (2.16)$$

а допускаемые операторы (1.3) будут такими

$$X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\sin\theta}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad X_2 = \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\cos\theta}{q}\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$X_3 = -\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad X_4 = q\frac{\partial}{\partial q} + 2z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (2.17)$$

Используя найденные оптимальные подгруппы (1.4), легко выписать соответствующие им существенно различные инвариантные решения.

а) Можно построить инвариантное решение, отвечающее оператору $X_3 = -\partial(\cdot) / \partial\theta$. Оно имеет вид $z = z(q)$. В этом случае вместо (2.16) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$qzz'' - z'^3 - qz'^2 + zz' + 2qz = 0 \qquad (2.18)$$

Уравнение (2.18) допускает понижение порядка. Подстановки

$$z(q) = q^2\eta(\xi), \xi = ln q, \quad p(\eta) = \eta'(\xi)$$

приводят к уравнению

$$pp' - p^3 - (1 - 6\eta)p^2 + 3(1 - \eta - 4\eta^2)p - 8\eta^3 - 2\eta^2 + 4\eta = 0$$

б) Оператору

$$X_4 = q\frac{\partial}{\partial q} + 2z\frac{\partial}{\partial z}$$

отвечает инвариантное решение вида

$$z = q^2H(\theta) \qquad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.16), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$H(1-4H)H'' + (2H - 1)H'^2 - 8H^3 + 2H = 0$$

которое имеет решение

$$\theta = \pm\int\frac{\sqrt{1-4H}\,dH}{\sqrt{H(CH - 16H^2 - 4)}}$$

в) Для оператора

$$X_3 + \alpha X_4 = \alpha q\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial\theta} + 2\alpha z\frac{\partial}{\partial z}$$

имеем

$$z = q^2H(\lambda), \qquad \lambda = qe^{\alpha\theta}$$

г) Для оператора $X_1 = \partial(\cdot) / \partial u_1$ имеем инвариантное решение вида $z = z(u_2)$. Подставляя в (1.2), получим уравнение $zz'' - z'^2 + 2z = 0$, которое имеет решение

$$u_2 = \pm\int\frac{dz}{\sqrt{z(C - 2\ln z)}}$$

Аналогичное решение имеем для оператора $X_2 = \partial(\cdot) / \partial u_2$.

Примерами двойных волн служат одномерные движения с плоскими волнами и двумерные установившиеся движения. Полной классификации двойных волн до настоящего времени не получено.

Г. Конические течения. Одним классом частных решений уравнений (0.1) будут конические течения — частный случай двойных волн. Система (0.1) допускает (см. (1.1)) оператор растяжения

$$X_6 = t\frac{\partial}{\partial t} + x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2}$$

Инвариантные решения ранга 2 относительно этого оператора и называются коническими течениями. Инвариантами этого оператора будут величины $x = t^{-1}x^1$, $y = t^{-1}x^2$, поэтому конические течения имеют вид (1.5). Конические течения имеют место всегда, когда область течения ограничена прямыми линиями, сходящимися в одной точке, которые в дальнейшем перемещаются с постоянной скоростью и остаются обтекаемыми стенками. В качестве примеров можно отметить следующие случаи.

а) Задача об угловом поршне, когда в момент $t = 0$ вся стенка начинает двигаться от жидкости с постоянной скоростью.

б) Прерывная волна в момент $t = 0$ подошла к вершине клина.

Конические течения описываются системой (1.6). Система (1.6) будет замечательной в том смысле, что это есть уравнения двумерного установившегося движения (1.8) с некоторыми силами и источниками. Но система (1.6) более сложная, чем система (1.8), а даже уравнения (1.8) мало изучены [9].Отыскание инвариантных решений системы (1.6) будет сводиться к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим инвариантные решения ранга 1 системы (1.6), операторы основной группы которой даются (1.7), а оптимальная система однопараметрических подгрупп дается (1.4).

а) Оператору $X_1 = \partial(\cdot)/\partial x$ соответствует инвариантное решение вида $u = U(y)$, $v = V(y)$, $h = H(y)$, которое будет одномерным.

После определения $V(y)$ из уравнения

$$(V' + 1)(3V'^2 + 8V' + 4) = CV^2$$

$U(y)$ и $H(y)$ находятся по формулам

$$U(y) = \exp\left(-\int\frac{dy}{V(y)}\right), \qquad H(y) = \frac{V^2(V'+1)}{V'+2}$$

Аналогичное решение имеет место для $X_2 = \partial(\cdot)/\partial y$.

б) Для оператора X_4, который в полярных координатах имеет вид

$$r\frac{\partial}{\partial r} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2h\frac{\partial}{\partial h}$$

имеем

$$u = rU(\theta), \quad v = rV(\theta), \quad h = r^2H(\theta)$$

в) Для оператора X_3 в полярных координатах

$$-\frac{\partial}{\partial\theta} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$$

имеем

$$u = V\sin(U-\theta), \; v = V\cos(U-\theta), \quad h = H, \;\; \lambda = r$$

г) Для оператора $X_3 + \alpha X_4$ в полярных координатах

$$\alpha r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial\theta} + (\alpha u + v)\frac{\partial}{\partial u} + (\alpha v - u)\frac{\partial}{\partial v} + 2\alpha h\frac{\partial}{\partial h}$$

имеем

$$u = rV\sin(U-\theta), \quad v = rV\cos(U-\theta), \quad h = r^2H, \;\; \lambda = re^{\alpha\theta}$$

Д. Установившееся движение. В случае установившегося движения исходными будут уравнения (1.8), операторы группы которых даются формулами (1.9), оптимальная система однопараметрических подгрупп дается операторами (1.10).

Отметим инвариантные решения.

а) Для оператора

$$X_1+\beta X_5=\frac{\partial}{\partial x^1}+\beta u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\beta u_2\frac{\partial}{\partial u_2}+2\beta z\frac{\partial}{\partial z}$$

имеем

$$u_1=e^{\beta x^1}U(x^2),\qquad u_2=e^{\beta x^1}V(x^2),\qquad z=e^{2\beta x^1}H(x^2)$$

б) Для оператора $X_4+\beta X_5$ имеем

$$u_1=e^{\beta\theta}V\sin(U-\theta),\quad u_2=e^{\beta\theta}V\cos(U-\theta),\quad z=e^{2\beta\theta}H,\quad \lambda=r$$

в) Для оператора $X_3+\alpha X_4+\beta X_5$ в полярных координатах

$$r\frac{\partial}{\partial r}-\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}+(\beta u_1+\alpha u_2)\frac{\partial}{\partial u_1}+(\beta u_2-\alpha u_1)\frac{\partial}{\partial u_2}+2\beta z\frac{\partial}{\partial z}$$

имеем

$$u_1=r^\beta V\sin(U-\theta),\quad u_2=r^\beta V\cos(U-\theta),\quad z=r^{2\beta}H,\quad \lambda=r^\alpha e^\theta$$

г) Для оператора X_3 имеем

$$u_1=U(\lambda),\quad u_2=V(\lambda),\quad z=H(\lambda),\quad \lambda=x^1/x^2$$

Получаем постоянное решение $u_1=A$, $u_2=B$, $z=C$.

В качестве примера рассмотрим инвариантное решение, отвечающее X_4 из (1.9). Оно имеет вид

$$u_r=U(r),\quad u_\theta=V(r),\quad z=H(r)\tag{2.20}$$

Будем рассматривать движение воды по дну, заданному в форме $z_0=z_0(r)$, без учета трения ($F=0$). Подставляя (2.20) в уравнения (0.1), (0.2), записанные в полярных координатах, найдем одно из решений

$$U=0,\quad V=V(r),\quad H=\int r^{-1}V^2dr-z_0$$

где $V(r)$ — произвольная функция.

Отсюда видно, что отметка свободной поверхности $H+z_0$ при этом круговом движении не зависит от z_0, т. е. движение полностью определяется заданием $V(r)$, а z_0 влияет только на глубину.

Можно рассмотреть частично инвариантные решения уравнений установившегося движения — простые волны, которые подробно исследованы в [5]. Описание всех невырожденных простых волн для установившегося движения следует из соотношений (2.13) и (2.14) для неустановившегося движения. Свойства характеристик и простых волн для установившихся сверхкритических движений жидкости те же, что имеют место в случае одномерных неустановившихся движений с плоскими волнами.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и Н. Х. Ибрагимова за ценные указания при выполнении данной работы.

Поступила 3 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. Гладышев М. Т. Групповая классификация дифференциальных уравнений, описывающих одномерное неустановившееся движение жидкости. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 5.
4. Ибрагимов Н. Х. Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа. ПМТФ, 1966, № 4.
5. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Новосибирск, Новосиб. гос. ун-т, 1967.
6. Погодин Ю. Я., Сучков В. А., Яненко Н. Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
7. Овсянников Л. В. Инвариантно-групповые решения уравнений гидродинамики. Тр. II Всес. съезда по теорет. и прикл. механ., М., «Наука», 1965, вып. 2.
8. Тешуков В. М. К задаче об угловом поршне. ПМТФ, 1969, № 3.
9. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. М., «Энергия», 1967.