

*П. И. Гешев, Х. Х. Муртазаев*

## РАСЧЕТ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЕ НА СТЕКАЮЩЕМ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Стекающая по вертикальной поверхности под действием силы тяжести пленка жидкости представляет собой пример активно-диссипативной среды, накачку энергии в которой обеспечивают гравитационные силы, а диссипацию — силы вязкого трения. В работах [1, 2], посвященных исследованию линейной устойчивости стекающей пленки жидкости, показано, что гладкое плоскопараллельное течение неустойчиво для сколь угодно малых чисел Рейнольдса. Обычно до значений  $Re \cong 300-400$  движение в пленке считается ламинарно-волновым [3].

Практически все теоретические исследования проводятся в приближении длинноволности, что соответствует экспериментальным данным. В [4] показано, что приближение длинноволности можно использовать до  $Re \cong 1000$  для обычных жидкостей. Это приближение позволяет упростить полную систему уравнений Навье — Стокса до системы пограничного типа. В [5] был предложен интегральный метод, в котором задается полупараболический профиль скорости. Предположение об автономности теоретически проверялось в [6]. В рамках интегрального подхода в [7, 8] выведена система из двух уравнений: на мгновенную толщину и расход жидкости для умеренных чисел Рейнольдса. С использованием этого подхода стационарно бегущие нелинейные волны 1-го семейства, по форме близкие к синусоидальным, найдены в [7, 8], сильнонелинейные решения данной системы, соответствующие волнам с пологим задним фронтом, крутым передним и капиллярной рябью перед волной, удается построить только численно [9, 10]. В [11] методом, продолжающим [8, 12], рассматривались стадии эволюции возбуждаемых и естественно возникающих волн, включая обсуждение аттракторов двух типов. Сравнение в этой работе теоретических и экспериментальных данных показало их хорошее количественное соответствие на основной части волны, однако капиллярная рябь, предсказываемая интегральным подходом, выражена сильнее и имеет большую амплитуду осцилляций по сравнению с экспериментом.

Рассмотрение нелинейной теории и определение поля скоростей для волн 1-го семейства в приближении длинноволности для стационарно бегущих волн было предпринято в [13]. Применимость различных подходов к описанию пленочных течений обсуждалась в [14], где из сравнения стационарных нелинейных решений показано, что хорошее согласие с экспериментом дают подходы, основанные на уравнениях пограничного слоя и на интегральных уравнениях, проводится их детальное сравнение. Нестационарный расчет уравнений Навье — Стокса в приближении длинноволности проведен в [15], где была просчитана начальная стадия эволюции волны до возникновения возвратного течения в самом тонком месте пленки.

Из полной системы уравнений Навье — Стокса без каких-либо приближений в [16] найдены нестационарные решения задачи методом конечных элементов. В [17] предложен численный способ нахождения решений типа стационарной бегущей волны в слоях вязкой жидкости в полной постановке методом Галеркина. Расчеты сделаны для различных значений безразмерного поверхностного натяжения, в том числе и для равного нулю.

В данной работе предлагается новый метод расчета нестационарного развития волны в рамках приближения длинноволности, основанный на псевдоспектральном методе и позволяющий рассчитать полную эволюцию волны вплоть до ее выхода на стационарный режим. Полученные путем установления стационарные решения сравнивались с решением стационарных уравнений. Для определения влияния числа Рейнольдса на харак-

теристики волны решение продолжалось по параметру в область больших чисел Рейнольдса. Проведено сравнение решений, найденных в приближении длинноволновости, с решениями полной системы уравнений из [17].

1. Постановка задачи. Вязкая несжимаемая жидкость стекает под действием силы тяжести по вертикальной плоскости. Течение принимается двумерным и периодическим с длиной волны  $\lambda$ . Ось  $x$  направим по вектору силы тяжести  $g$  (вниз), ось  $y$  — перпендикулярно стенке. Будем предполагать, что длина волны намного больше толщины пленки. Как показал Нуссельт, для стекающей пленки жидкости всегда имеется тривиальное стационарное решение с гладкой плоскопараллельной свободной поверхностью:

$$\begin{aligned} h(x) &= \text{const}, \\ u &= (gh^2/2\nu)(2y/h - y^2/h^2) = u_0(2y/h - y^2/h^2), \\ q &= gh^3/3\nu. \end{aligned}$$

Здесь  $h$  — толщина пленки;  $u$  — скорость пленки;  $u_0 = gh^2/2\nu$  — скорость на поверхности пленки;  $q$  — расход жидкости;  $\nu$  — кинематическая вязкость.

В приближении длинноволновости ( $h/\lambda \ll 1$ ) из полной системы уравнений Навье — Стокса получается система погранслоного типа. Обезразмерим ее при помощи  $\langle h \rangle$  (средней толщины пленки на длине волны),  $u_0$  (нуссельтовой скорости на поверхности невозмущенной пленки с толщиной  $\langle h \rangle$ ) и  $\rho$  (плотности жидкости). Отобразим область движения на полосу  $[0, 1]$  преобразованием поперечной координаты

$$\eta = 1 - y/h(x, t).$$

В результате преобразованная система запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left\{ (1 - \eta) \frac{\partial h}{\partial t} + (1 - \eta) u \frac{\partial h}{\partial x} - v \right\} &= \text{We} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{\text{Re} h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\text{Re}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(1 - \eta)}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned}$$

где  $u$  —  $x$ -я компонента скорости;  $v$  —  $\eta$ -я компонента скорости;  $h$  — мгновенная толщина пленки;  $\text{Re} = \frac{u_0 \langle h \rangle}{\nu} = \frac{g \langle h \rangle^3}{2\nu^2}$  — число Рейнольдса;  $\text{We} =$

$= \frac{\sigma}{\rho u_0^2 \langle h \rangle} = \left( \frac{2}{\text{Re}^5} \text{Fi} \right)^{1/3}$  — число Вебера;  $\text{Fi} = \sigma^3 / \rho^3 g \nu^4$  — пленочное число;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{при } \eta = 1, \\ v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} & \quad \text{при } \eta = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \quad \text{при } \eta = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности по  $\eta$ , взяв пределы интегрирования таким образом, чтобы учесть условие прилипания для поперечной скорости:

$$v = (1 - \eta) u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_{\eta}^1 u d\eta \right).$$

Из этого уравнения и кинематического условия получим уравнение на толщину пленки

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_0^1 u d\eta \right) = 0.$$

В результате после несложных преобразований, отбрасывая использованное кинематическое граничное условие, имеем окончательную систему из двух уравнений:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_0^1 u d\eta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_0^\eta u d\eta \right) \right) = We \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{Re h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{2}{Re};$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_0^1 u d\eta \right) = 0.$$

Граничные условия следующие:

$$(1.3) \quad u = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 1;$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Для полной постановки эволюционной задачи к данной системе надо поставить начальные условия на функции  $u(x, \eta, t)$  и  $h(x, t)$ :

$$u(x, \eta, 0) = f_0(x, \eta), \quad h(x, 0) = g_0(x).$$

В силу большой нелинейности и сложности исходных уравнений их решение можно получить только численно.

**2. Метод решения.** В настоящее время не существует каких-либо универсальных методов решения нелинейных эволюционных задач, описывающих поведение возмущений в активно-диссипативных средах. В данной работе было решено применить сравнительно недавно появившиеся спектральные и псевдоспектральные методы, используемые для прямого численного моделирования турбулентных течений [18]. Правильный выбор базисных функций во многом определяет эффективность метода [19].

Будем искать решение в виде

$$h(x, t) = \sum_{n=-N}^N h_n(t) \exp\{i\alpha n x\},$$

$$u(x, \eta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=-N}^N u_{mn}(t) \exp\{i\alpha n x\} T_m(\eta),$$

где  $T_m(\eta) = \cos(m \arccos \eta)$  — полиномы Чебышева.

Полиномы Чебышева привлекательны тем, что при их применении происходит сгущение расчетных точек к стенке, что очень важно при аппроксимации сильно заполненных профилей скорости. Большим их достоинством является также то, что они непосредственно связаны с косинусами и допускают применение быстрых алгоритмов преобразований [20]. Полиномы Чебышева к расчету стационарных волновых пленочных течений успешно применены в [17]. В этой работе для формирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод Галеркина.

Система (1.1)—(1.4) решалась псевдоспектральным методом с конечно-разностной аппроксимацией по времени. Разложение скорости велось только по четным степеням полиномов Чебышева. Тогда непосредственно выполняется граничное условие (1.4). Следует отметить, что применение спектрального разложения приводит к появлению жесткости в системе, возникающей при дискретизации исходных уравнений [21], что требует использования специальных конечно-разностных схем для интегрирования по времени [22]. Характерная особенность спектральных методов — появление ошибок ложного представления (aliasing error) [23], которые возникают из-за обрывания ряда при вычислении нелинейных членов. Это может приводить к численной неустойчивости из-за накопления ошибок при расчете эволюции волны. Бороться с этим можно двумя способами: повысить количество гармоник, что сильно увеличивает время счета, или применять фильтрацию либо сглаживание [24]. В данной работе применялся второй путь. Фильтрация или

сглаживание проводилось только по координате  $x$ , направленной по течению. Для фильтрации использовался фильтр

$$f(k) = \begin{cases} 1, & k \leq k_0, \\ \exp(-a(k - k_0)^4), & k > k_0, \end{cases}$$

где  $k$  — волновой вектор;  $a = \text{const}$ . Фильтрация скорости и толщины проводилась на каждом шаге. Гасились только устойчивые моды, которые по линейной теории устойчивости [1, 2] должны затухать. При сглаживании применялось пятиточечное выражение

$$f(x) = (-f(x - 2\Delta x) + 4f(x - \Delta x) + 10f(x) + 4f(x + \Delta x) - f(x + 2\Delta x))/16,$$

с помощью которого на основе фурье-образа можно получить фильтр, соответствующий этой операции. Проверялось, чтобы он также гасил устойчивые моды. Сглаживание производилось через некоторое число шагов по времени, подбираемое опытным путем. Если проводить его на каждом шаге, то сглаживание не дает проявиться высокочастотной части спектра, и поэтому профиль волны будет слабо отличаться от синусоидального.

С помощью такого сглаживания была просчитана основная часть решений данной работы. Решения, полученные с помощью сглаживания и фильтрации, совпадают удовлетворительно в большей части волны. Фактически введение сглаживания или фильтрации дает дополнительную диссипацию, которая позволяет гасить численные неустойчивости, возникающие из-за неточного вычисления нелинейных членов и пространственных производных. Для тестирования решения эволюционной задачи решалась стационарная задача.

Пусть решением исходной системы (1.1) — (1.4) является бегущая стационарная волна

$$h(x, t) = h(x - ct), \quad u(x, \eta, t) = u(x - ct, \eta).$$

Тогда уравнения можно переписать в виде

$$(2.1) \quad (-c + u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_0^1 u d\eta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( h \int_0^\eta u d\eta \right) \right) - \text{We} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{1}{\text{Re} h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2}{\text{Re}} = 0;$$

$$(2.2) \quad h \left( -c + \int_0^1 u d\eta \right) - A = 0, \quad \text{где } A = \text{const};$$

$$(2.3) \quad u = 0 \quad \text{при } \eta = 1.$$

Как уже отмечалось выше, граничное условие (1.4) выполняется тем, что разложение скорости ведется только по четным полиномам Чебышева. Граничное условие (2.3) будем выполнять  $\tau$ -методом [23]. Суть его в том, что коэффициент при последней гармонике определяется непосредственно из граничного условия (2.3). Так как  $T_m(1) = 1$ , то

$$\sum_{m=0}^M u_{mn} = 0.$$

Отсюда выразим последнюю моду

$$u_{Mn} = - \sum_{m=0}^{M-2} u_{mn}, \quad |n| \leq N.$$

Пусть  $\xi = x - ct$ , тогда

$$h(\xi) = \sum_{n=-N}^N h_n \exp\{i\alpha n \xi\},$$

$$u(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=-N}^N u_{mn} \exp\{i\alpha n \xi\} T_m(\eta).$$

Применение спектрального метода приводит к системе нелинейных уравнений на коэффициенты разложения  $h_n$  и  $u_{nm}$ . Получим систему уравнений типа

$$(2.4) \quad F_i(h_{-N}, \dots, h_n, \dots, h_N, \dots, u_{mn}, \dots, u_{MN}, c, A) = 0.$$

При постановке задачи фиксирована средняя толщина пленки, поэтому  $h_0$  известно. Зададим также величину  $\text{Im}(h_1)$  равной значению, определяемому из установившегося решения нестационарной задачи (это не принципиально, но удобно для дальнейшего сравнения). Отсюда получаются недостающие уравнения на  $A$  и  $c$ .

Перепишем уравнение (2.4) в виде

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0.$$

Эта система решалась методом Ньютона

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=x^0} \Delta x_j = -F_i(x_j^0)$$

( $x_j^0$  — начальное приближение). Если  $x_j^0$  находится в области притяжения решения, то процесс сходится. Матрица Якоби вычислялась конечно-разностным методом

$$\left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=x^0} = \frac{F_i(x_1^0, \dots, x_j^0 + \Delta x_j^0, \dots, x_k^0) - F_i(x_1^0, \dots, x_k^0)}{\Delta x_j^0},$$

а сами значения функций  $F_i$  — псевдоспектральным методом.

В качестве начального приближения использовалось стационарное решение, полученное при решении эволюционной задачи. Найденные таким образом решения системы (2.1) — (2.3) продолжались по параметру в область больших чисел Рейнольдса, т. е. приращения числа Рейнольдса брались столь малыми, чтобы итерационный процесс в методе Ньютона сходился. При этом за начальное приближение при новом значении числа Рейнольдса бралось решение, полученное для предыдущего числа Рейнольдса.

**3. Результаты расчетов.** В расчетах использовались две жидкости: вода и водоглицериновая смесь. Для воды  $\nu = 1,03 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\sigma/\rho = 72,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ , для водоглицериновой смеси  $\nu = 4,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\sigma/\rho = 59 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ . При сравнении с результатами [17] здесь задавались такие же значения параметров, которые использовались и в [17].

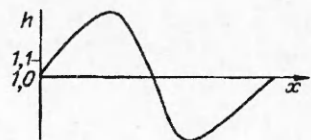
При решении эволюционной задачи в качестве начального условия выбиралось синусоидальное возмущение поверхности пленки с длиной волны  $\lambda$  и амплитудой 0,3—0,5. Начальный профиль скорости задавался полупараболическим. На начальном этапе развития волны амплитуда уменьшалась. Затем после формирования у волны достаточно крутого переднего фронта амплитуда начинала увеличиваться. Когда крутизна переднего фронта почти достигала своего максимума, возникала капиллярная рябь. После этого волна выходила на стационарный режим. В ходе расчетов вычислялось расходное число Рейнольдса  $Re_q$ , которое применяется в большинстве работ:

$$Re_q = Q/\nu$$

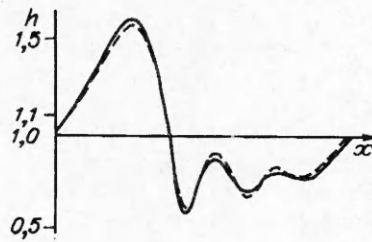
( $Q = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} dx \int_0^h u dy$  — средний расход). Как видно,  $Re_q$  не задается вначале,

а устанавливается со временем в ходе нестационарной эволюции. Поэтому рассчитанные стационарные решения нелегко сравнивать с бегущими стационарными волнами, полученными другими авторами в рамках интегральной модели, где обычно  $Re_q$  задается.

В зависимости от начальной длины волны возмущения в результате развития получают два типа волн. При малых длинах волн устанавлива-



Р и с. 1



Р и с. 2 →

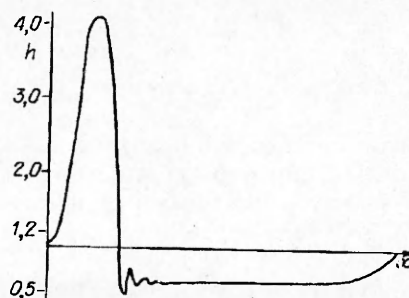
ется волна, близкая по форме к синусоиде рис. 1 ( $Re = 8,75$ ,  $We = 11,23$ ,  $\lambda = 30$ ). При больших длинах волн устанавливаются сильнонелинейные волны с крутым передним фронтом, пологим задним и капиллярной рябью впереди (рис. 2,  $Re = 15,5$ ,  $We = 42,82$ ,  $\lambda = 98$ ,  $Re_q = 10,96$ ,  $c = 2,08$ ). На рис. 2 штриховой линией показаны результаты решения стационарных уравнений (2.1) — (2.3) (для них  $Re_q = 10,97$ ,  $c = 2,10$ ), где в качестве начального приближения использованы результаты расчетов нестационарной эволюции. Видно, что соответствие очень хорошее. В этих расчетах по оси  $Ox$  было взято 64 гармоники, а по оси  $Oy$  решение аппроксимировалось полиномом восьмой степени. Последние два коэффициента при полиномах фактически обращались в нуль. Другие рассчитанные случаи нестационарного развития и их выход на стационарный режим изображены на рис. 3 ( $Re = 8,75$ ,  $We = 11,23$ ,  $\lambda = 98$ ,  $Re_q = 6,10$ ,  $c = 2,11$ ), рис. 4 ( $Re = 30$ ,  $We = 1,44$ ,  $\lambda = 98$ ,  $Re_q = 15,56$ ,  $c = 1,98$ ). На рис. 4 приведен случай больших чисел Рейнольдса. Как видно, амплитуда волны  $\approx 5$ . Таких больших амплитуд в рамках интегральной теории не наблюдалось. Следует отметить, что при использовании этого решения в качестве начального приближения при решении стационарных уравнений итерации в методе Ньютона не сошлись. По-видимому, при таких больших числах Рейнольдса не существует стационарных решений, а появляются квазистационарные образования типа изображенных на рис. 4, или волна не успевает выйти на такой режим и распадается на трехмерные волны. Для случая, как на рис. 4, профиль скорости совершенно не похож на полупараболический; в вершине волны возникли сильные вихревые течения.

Для случая, как на рис. 2, от стационарного решения методом продолжения по параметру искались новые стационарные решения. На рис. 5 ( $Re = 22$ ,  $We = 23,89$ ,  $\lambda = 98$ ,  $Re_q = 17,95$ ,  $c = 2,01$ ) изображены полученное таким образом решение, а также линии тока этого течения. Видно, что в вершине волны находится почти неподвижная (в системе отсчета, двигающейся с фазовой скоростью волны) «капля». В экспериментах также наблюдались подобные образования. Из рис. 2, 5 видно, что при увеличении  $Re$  перед задним фронтом волны возникает высокая полочка. Таких высоких полочек в рамках интегральной теории не наблюдалось. Следует отметить, что с ростом  $Re$  отличие от полупараболического профиля скорости постоянно увеличивается. Оно тем сильнее, чем больше крутизна волны.

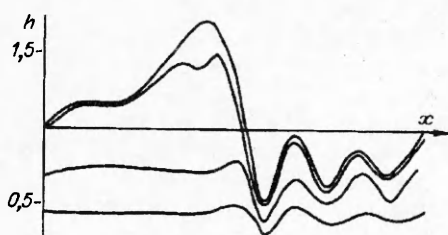
Для стационарных решений, изображенных на рис. 2, 5, приведены на рис. 6, 7 соответственно сплошной линией графики безразмерного квазистационарного трения  $\tau_k = 3\langle u \rangle / h$ , которое используется в приближен-



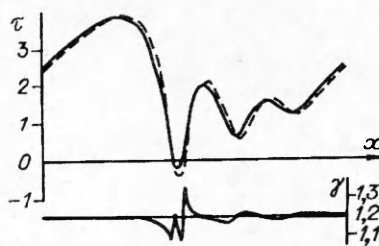
Р и с. 3



Р и с. 4 →



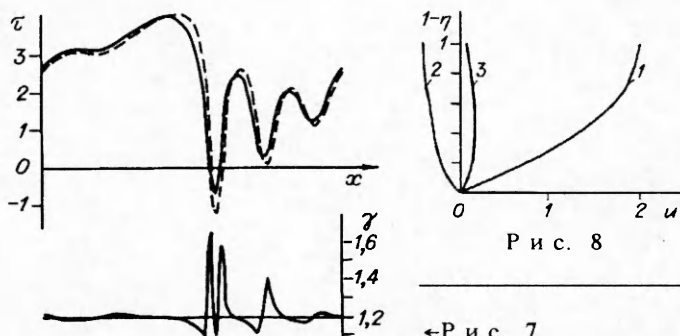
Р и с. 5



Р и с. 6

ных расчетах течения пленки [7, 8], а штриховой — истинное трение  $\tau = (\partial u / \partial \eta)|_{\eta=1}$ . На этих же графиках (внизу) показан интегральный форм-параметр  $\gamma(x) = \langle u^2 \rangle / \langle u \rangle^2$ . На основной части волны  $\gamma$  близко к 1,2, но на участке резкого изменения толщины пленки  $\gamma$  сначала уменьшается, что свидетельствует о более заполненных профилях скорости, чем полупараболические, а затем увеличивается, что соответствует линейным профилям. Пульсации в области минимальной толщины можно объяснить тем, что значения скорости в этой области малы и отрицательны. Зона отрицательных скоростей появилась и в расчетах [15]. В наших расчетах для сильно-нелинейных волновых режимов с развитой капиллярной рябью скорость в области минимальной толщины пленки всегда была отрицательной по всему сечению. Это явление кажется неожиданным и, очевидно, обусловлено силами поверхностного натяжения. Подробное обсуждение таких зон было проведено в [14]. На этих же графиках видно, что с возрастанием  $Re$  увеличивается отличие от полупараболического профиля скорости. На рис. 8 изображен профиль скорости для случая, приведенного на рис. 5 (кривая 1 соответствует профилю скорости в участке максимальной толщины пленки, 2 — в минимуме толщины, 3 — вблизи минимума на участке резкого падения толщины пленки). На кривой 3 виден характерный для достаточно больших чисел Рейнольдса перегиб профиля скорости.

В [14] прямо сравнивается стационарное решение, полученное в рамках приближения длинноволности методом полос, с решением по интегральной теории и с экспериментом. Поэтому интересно сравнить решения пограничной системы уравнений, которая решалась в настоящей работе, с решениями полной системы уравнений Навье — Стокса. В [17] такая система уже исследовалась, причем большинство решений приведено для малых значений безразмерного поверхностного натяжения, когда поперечная компонента скорости имеет существенное значение и пограничное приближение вызывает сомнение. На рис. 9 сравниваются эти стационарные решения при  $Re = 3,27$ ,  $Fi^{1/3} = 50$ . Профили 1—3 отвечают волнам при  $\alpha = 0,864$ ;  $0,643$ ;  $0,437$  ( $\alpha$  — отношение волнового числа к нейтральному волновому числу по линейной теории устойчивости), сплошные линии — решения в приближении длинноволности, а штриховые — решения, найденные в [17]. Стационарные решения системы (1.1)—(1.4) получали в ходе нестационарной эволюции, а затем уточняли решением стационарных уравнений (2.1)—(2.3), используя насчитанное в процессе эволюции решение как начальное



← Р и с. 7

Р и с. 8

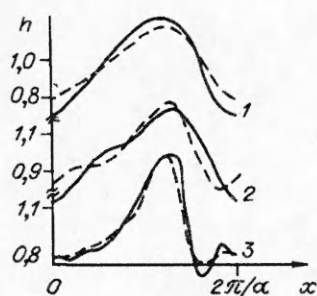


Рис. 9

приближение в методе Ньютона. На графике видно, что решения близки друг к другу, но все же отличие достаточно существенное при этих значениях параметров.

В заключение отметим следующее. Создана численная схема, которая в длинноволновом приближении позволила рассчитать нестационарную эволюцию гладких начальных возмущений вплоть до их выхода на стационарный режим. Качественно основные стадии эволюции волны соответствуют рассчитанным в [11], где была использована интегральная модель [7, 8]. Можно

утверждать, что полученные стационарно бегущие волны устойчивы, так как они устанавливаются в ходе нестационарного развития.

С использованием в качестве начального приближения решения нестационарной задачи из стационарных уравнений методом Ньютона получены решения типа бегущей стационарной волны. Методом продолжения по параметру они численно продолжены в область больших чисел Рейнольдса. Найдено новое семейство решений с высокой полочкой перед задним фронтом волны.

Подтверждено существование узкой зоны отрицательных скоростей, появляющихся также в рамках интегральной теории, но не обнаруженных пока экспериментально.

Полученные решения сравниваются с решениями полной системы уравнений. Из сравнения видно, что при малых значениях безразмерного поверхностного натяжения приближение длинноволности может существенно изменить вид решения.

Показано, что при умеренных числах Рейнольдса (для воды  $Re \leq 20$ ) приближение полупараболичности выполняется с хорошей точностью. Основное отличие приходится на участки максимальной крутизны и кривизны волны и увеличивается с ростом  $Re$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin G. B. Wave formation in laminar flow down on inclined plane // J. Fluid Mech.— 1957.— V. 2.— P. 554—574.
2. Yin Ch.-S. Stability of liquid flow down on inclined plane // Phys. Fluids.— 1963.— V. 6, N 3.
3. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. 3. Опытное изучение волнового режима // ЖЭТФ.— 1949.— Т. 19, № 2.
4. Крылов В. С., Воротилин В. П., Левич В. Г. К теории волнового движения тонких пленок жидкости // ТОХТ.— 1969.— Т. 3, № 47.
5. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ.— 1948.— Т. 18, № 1.
6. Verbente C. D., Ruckenstein E. Hydrodynamics of wave flow // AIChE J.— 1968.— V. 14, N 5.
7. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1967.— № 1.
8. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1968.— № 2.
9. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // ПММ.— 1984.— Т. 48, № 4.
10. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Волновые режимы в стекающих пленках жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью: Сб. науч. тр.— Новосибирск, 1985.
11. Демехин Е. А., Токарев Г. Ю., Шкадов В. Я. Двумерные нестационарные волны на вертикальной пленке жидкости // ТОХТ.— 1987.— Т. 21, № 2.
12. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1981.— № 3.
13. Шкадов В. Я., Холпанов Л. П., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М. К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости // ТОХТ.— 1970.— Т. 4, № 6.
14. Демехин Е. А., Каплан М. А., Шкадов В. Я. О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 6.



15. Гешев П. И., Ездин Б. С. Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью: Сб. науч. тр.— Новосибирск, 1985.
16. Bach P., Villadsen J. Simulation of the vertical flow of a thin, wavy film using a finite-element method // Int. J. Heat Mass Transfer.— 1984.— V. 27, N 6.
17. Демехин Е. А., Каплан М. А. Построение точных численных решений типа стационарной бегущей волны в тонких слоях вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 3.
18. Orszag S. A., Patterson G. S. Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence // Phys. Rev. Lett.— 1972.— V. 28, N 1.
19. Orszag S. A., Israeli M. Numerical simulation of viscous incompressible flows // Ann. Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, Calif., 1974.— V. 6.— P. 281.
20. Гапонов В. А. Пакет подпрограмм быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов.— Новосибирск, 1976.— (Препр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т теплофизики; № 14—76).
21. Gottlieb D., Lustman L. The Dufort-Frankel Chebyshev method for parabolic initial boundary value problems // Computers and Fluids.— 1983.— V. 11, N 2.
22. Gear C. W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations.— Englewood Cliffs; N. Y.: Prentice-Hall, 1971.
23. Шуман У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.
24. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости.— Л.: Гидрометеиздат, 1986.

г. Новосибирск

Поступила 17/XI 1992 г.,  
в окончательном варианте — 16/II 1993 г.

УДК 532.526.2

Н. Н. Пилюгин, Р. Ф. Талипов, С. В. Утюжников

### О ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА

В последнее время практический интерес представляет исследование характеристик поля течения и теплообмена около затупленных тел при наличии существенной неравномерности набегающего сверхзвукового потока. В [1] рассматриваются результаты экспериментального и теоретического исследования сопротивления, теплообмена и газодинамической картины течения около пары тел, одно из которых находится в сверхзвуковом потоке за другим телом. Экспериментальные результаты в [1] получены при относительно небольшом расстоянии между телами (не более двадцати калибров). В случае же большого взаимного удаления тел (на расстояние в несколько сотен калибров) исследование проводится с использованием теоретических методов [2—6]. В [2, 3] получены асимптотические решения задачи обтекания затупленного тела неравномерным потоком типа следа при умеренных ( $Re_\infty < 10^3$ ) и больших ( $Re_\infty > 10^3$ ) числах Рейнольдса. В [1, 4—6] в результате численного решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя (в предположении, что ударная волна эквидистантна поверхности тела) получены зависимости для коэффициентов теплообмена, трения и критерия безотрывного обтекания от параметров задачи.

При равномерном набегающем потоке метод тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) приводит к результатам, удовлетворительно согласующимся с расчетами по более точным методам [7, 8]. В случае обтекания затупленного тела неравномерным сверхзвуковым потоком типа дальнего следа вопрос о применимости метода ТВУС [4—6] и асимптотических формул [2, 3] исследован недостаточно.

© Н. Н. Пилюгин, Р. Ф. Талипов, С. В. Утюжников, 1994