

УДК 621.391

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО СОВМЕСТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И ОЦЕНКИ ПЛОЩАДИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ НА ФОНЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ШУМА\*

А. П. Трифонов, К. А. Зимовец, Ю. Э. Корчагин

*Воронежский государственный университет,  
394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1  
E-mail: trifonov@phys.vsu.ru*

Рассмотрены байесовский и максимально правдоподобный алгоритмы. Проведён сравнительный анализ их эффективности. Полученные результаты конкретизированы для изображения в форме эллипса с линейно изменяющейся интенсивностью.

*Ключевые слова:* максимально правдоподобный алгоритм, байесовский алгоритм, характеристики алгоритмов, статистическое моделирование.

**Введение.** В последнее время проблема оптимальной обработки изображений становится всё более актуальной. Это связано не только с расширением спектра задач обработки изображений, но и с ростом производительности вычислительных средств, которые позволяют реализовывать всё более сложные алгоритмы. При этом в большинстве задач требуется получить максимально достижимую эффективность алгоритмов. В [1–4] рассмотрены задачи обработки неоднородного изображения с неизвестной площадью в условиях неполной априорной информации о параметрах изображения. Оптимальное использование полной априорной информации позволяет улучшить характеристики алгоритмов совместного обнаружения и оценки площади изображений. Поэтому представляет интерес задача синтеза и анализа оптимальных алгоритмов обработки изображения при наличии полной априорной информации о параметрах изображения.

Положим, что в области  $G$  обработке доступна реализация случайного поля:

$$\xi(x, y) = \gamma_0 s(x, y; \chi_0) + n(x, y). \quad (1)$$

Здесь

$$s(x, y; \chi_0) = F(x, y)I(x, y; \chi_0) \quad (2)$$

— полезное изображение с интенсивностью  $F(x, y)$ , которое занимает область  $\Omega(\chi_0)$  площадью  $\chi_0$ . Форма области, занимаемой изображением, описывается индикатором  $I(x, y; \chi) = 1$  при  $x, y \in \Omega$  и  $I(x, y; \chi) = 0$  при  $x, y \notin \Omega$ . В (1)  $n(x, y)$  — гауссовский пространственный белый шум с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ , неизвестная площадь изображения  $\chi_0$  принимает значения из априорного интервала  $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ , а  $\gamma_0 = 1$  или  $\gamma_0 = 0$  — дискретный параметр, отражающий наличие или отсутствие полезного изображения.

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-97504, № 13-08-00735).

**Алгоритмы обработки изображений.** При анализе реализации случайного поля (1) возникает необходимость синтеза различных алгоритмов обработки изображения (2). В [1] рассмотрена задача обнаружения неоднородного изображения с неизвестной площадью, при этом в процессе синтеза алгоритма обнаружения изображения (2) не учитывалась точность оценки неизвестной площади  $\chi_0$ . Работа [2] посвящена синтезу и анализу алгоритма оценки площади  $\chi_0$  неоднородного изображения при условии, что оно всегда присутствует в принятой реализации ( $\gamma_0 \equiv 1$ ). Наиболее общий случай обработки изображения представлен в [3], где приведены синтез и анализ алгоритма совместного обнаружения и оценивания площади неоднородного изображения.

В работах [1–4] были рассмотрены алгоритмы обработки изображения (2), синтезированные по методу максимального правдоподобия. В соответствии с этим методом для обработки изображения (2) необходимо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР):

$$L(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G \xi(x, y) s(x, y; \chi) dx dy - \frac{1}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy, \quad \chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]. \quad (3)$$

Задача обнаружения изображения (2), рассмотренная в [1], заключается в формировании решения  $\hat{\gamma}$  о наличии изображения в принятой реализации (1) ( $\hat{\gamma} = 1$ ) или о его отсутствии ( $\hat{\gamma} = 0$ ). При этом алгоритм оценки параметра  $\gamma$  выглядит следующим образом:

$$\sup_{\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]} L(\chi) \underset{\hat{\gamma}=0}{\overset{\hat{\gamma}=1}{\geq}} h, \quad (4)$$

где  $h$  — заданный порог. В случае, когда изображение постоянно присутствует в принятой реализации (1) ( $\gamma_0 \equiv 1$ ), оценка максимального правдоподобия  $\hat{\chi}$  площади  $\chi_0$  полезного изображения определяется как положение абсолютного максимума  $L(\chi)$  [2]:

$$\hat{\chi} = \arg \sup_{\chi \in [\chi_{\min}, \chi_{\max}]} L(\chi). \quad (5)$$

Если необходимо не только принять решение о наличии или отсутствии изображения, но и оценить его площадь, лучше использовать максимально правдоподобный алгоритм обработки изображения [3], который заключается в совместном применении двух решающих правил:

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & L(\tilde{\chi}) \geq h, \\ 0, & L(\tilde{\chi}) < h; \end{cases} \quad \hat{\chi} = \begin{cases} \tilde{\chi}, & L(\tilde{\chi}) \geq h, \\ 0, & L(\tilde{\chi}) < h, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\tilde{\chi} = \arg \sup L(\chi)$ . В отличие от (5) величина  $\tilde{\chi}$  определяется при произвольном значении  $\gamma_0$  в (1). Используя классический метод максимального правдоподобия, порог в алгоритмах обнаружения (4) и совместного обнаружения и оценивания (6) следует выбрать равным нулю ( $h = 0$ ).

Хорошо известен тот факт, что в классе линейных оценок алгоритм максимального правдоподобия позволяет получить эффективную оценку измеряемого параметра. В работе [5] показано, что при оценке регулярных параметров метод максимального правдоподобия асимптотически эффективен. В рассматриваемой модели изображения (2) неизвестная площадь  $\chi_0$  является разрывным параметром. В этом случае вопрос об оптимальности метода максимального правдоподобия остаётся открытым. Поэтому представляет интерес исследование алгоритмов обработки изображения, синтезированных на основе байесовского подхода.

Если известны априорная вероятность  $p_1$  наличия изображения в принятой реализации (1) и априорная плотность распределения вероятности  $W_{pr}(\chi)$  площади изображения (2), то для синтеза алгоритмов обработки изображения (2) возможно применение байесовского подхода, который позволяет минимизировать средний риск при заданной функции потерь. Таким образом он обеспечивает строгую оптимальность в рамках заданного критерия [5].

Применительно к случаю обнаружения изображения важной характеристикой алгоритма обработки является средняя вероятность ошибки обнаружения. Использование простой функции потерь, у которой стоимости правильных решений принимаются нулевыми, а стоимости ошибок первого и второго рода — одинаковыми, для синтеза байесовского алгоритма обнаружения позволяет минимизировать среднюю вероятность ошибки обнаружения, совпадающую с величиной среднего риска. Тогда алгоритм обнаружения изображения, присутствующего с вероятностью  $p_1$  в принятой реализации (1), с неизвестной площадью  $\chi_0$ , распределённой с априорной плотностью вероятности  $W_{pr}(\chi_0)$  в области  $[\chi_{\min}, \chi_{\max}]$ , имеет вид

$$L \begin{matrix} \hat{\gamma}_B = 1 \\ \geq \\ \hat{\gamma}_B = 0 \end{matrix} C, \quad (7)$$

где  $L = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} W_{pr}(\chi) \exp[L(\chi)] d\chi$ ;  $C = (1 - p_1)/p_1$ . При этом решение о наличии изображения в реализации наблюдаемых данных (1) принимается, если  $\hat{\gamma}_B = 1$ , а решение о его отсутствии — при  $\hat{\gamma}_B = 0$ . Для алгоритма оценки площади изображения (2) при условии, что изображение всегда присутствует в принятой реализации (1) ( $\gamma_0 \equiv 1$ ), одной из основных характеристик является рассеяние оценки. Применение квадратичной функции потерь

$$C(\chi, \chi_0) = (\chi - \chi_0)^2$$

для синтеза байесовского алгоритма оценки площади позволяет получить оценку с минимальным рассеянием. Также необходимо отметить, что оценка

$$\hat{\chi}_B = \frac{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \chi \exp[L(\chi)] W_{pr}(\chi) d\chi}{\int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \exp[L(\chi)] W_{pr}(\chi) d\chi}, \quad (8)$$

полученная с использованием байесовского подхода и квадратичной функции потерь, будет, безусловно, несмещённая. В более общем случае, когда требуется не только обнаружить изображение, но и оценить его площадь, выбор функции потерь представляется достаточно сложным. Это связано с тем, что необходимо оценить сразу два параметра и сделать выбор между точностями оценки каждого. Полезным в данном случае представляется применение аддитивной функции потерь, квадратичной по оцениваемому параметру:

$$\Pi = \left\| \begin{array}{cc} 1 - C_0(1 - g_0 \hat{\chi}^2) & 1 \\ 1 & 1 - C_1(1 - g_1(\hat{\chi} - \chi)^2) \end{array} \right\|, \quad (9)$$

где  $C_0, C_1, g_0, g_1$  — некоторые константы.

Синтезированный с использованием функции потерь (9) байесовский алгоритм совместного обнаружения и оценивания площади изображения принимает вид

$$\hat{\gamma}_B = \begin{cases} 1, & d_0 \geq C, \\ 0, & d_0 < C; \end{cases} \quad \hat{\chi}_B = \begin{cases} \tilde{\chi}, & d_0 \geq C, \\ 0, & d_0 < C, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\hat{\chi} = \frac{d_1}{d_0}; \quad C = \frac{p_0 C_0}{p_1 C_1} \left( 1 - \frac{g_1}{d_0} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \left( \frac{d_1}{d_0} - \chi \right)^2 W_{pr}(\chi) \exp[L(\chi)] d\chi \right)^{-1};$$

$$d_k = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \chi^k W_{pr}(\chi) \exp[L(\chi)] d\chi.$$

Качественный анализ структуры этих алгоритмов позволяет сделать вывод о том, что алгоритмы, синтезированные на основе байесовского подхода, заметно более сложны при аппаратной или программной реализации в сравнении с алгоритмами, синтезированными с помощью метода максимального правдоподобия. Решение о необходимости применения алгоритмов (7), (8) и (10) для обработки изображений можно вынести только проанализировав количественные показатели их эффективности. Эффективность алгоритма обнаружения (4) характеризуется средней вероятностью ошибки

$$P_e = (1 - p_1)\alpha + p_1\beta, \quad (11)$$

где  $\alpha$  — вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги), а  $\beta = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \beta(\chi_0) W_{pr}(\chi_0) d\chi_0$  — безусловная вероятность ошибки 2-го рода (пропуска изображения). Точные выражения для  $\alpha$  и условной вероятности ошибки 2-го рода  $\beta(\chi_0)$  получены в [1]. Основной характеристикой, описывающей точность оценки площади, полученной с использованием алгоритма (5), является безусловное рассеяние

$$V(\hat{\chi}) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} V(\hat{\chi} | \chi) W_{pr}(\chi) d\chi. \quad (12)$$

Точное выражение для условного рассеяния  $V(\hat{\chi} | \chi_0)$  взято из работы [2]. Применительно к алгоритму совместного обнаружения и оценивания необходимо учитывать точность оценки сразу двух параметров. Точность оценки параметров  $\gamma$  и  $\chi$  характеризуется средней вероятностью ошибки (11) и безусловным рассеянием

$$V(\hat{\chi}) = p_0 V(\tilde{\chi} | 0) + p_1 \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} [V(\tilde{\chi} | \chi) + \chi^2 \beta(\chi)] W_{pr}(\chi) d\chi, \quad (13)$$

где  $V(\tilde{\chi} | 0)$  — рассеяние оценки площади при отсутствии изображения, причём для отсутствующего изображения полагалось  $\chi_0 \equiv 0$ ;  $V(\tilde{\chi} | \chi_0)$  — рассеяние оценки площади при наличии изображения. Точные выражения для  $V(\tilde{\chi} | 0)$ ,  $V(\tilde{\chi} | \chi_0)$ ,  $\alpha$ ,  $\beta(\chi_0)$  получены в [3].

Необходимо отметить, что эффективность алгоритмов (4) и (6) может быть улучшена при наличии полной априорной информации. При этом структура алгоритмов остаётся неизменной. Изменяется только порог  $h$ , который в алгоритме (4) можно выбрать из условия минимума средней вероятности ошибки:

$$h_P = \arg \inf_h P_e,$$

а в алгоритме (6) — из условия минимума рассеяния оценки:

$$h_m = \arg \inf_h V(\hat{\chi}).$$

Однако в отличие от алгоритмов (4)–(6) получить характеристики алгоритмов (7), (8), (10), синтезированных с использованием байесовского подхода, аналитически не представляется возможным. Поэтому для количественного сравнения эффективности синтезированных алгоритмов необходимо провести статистическое моделирование алгоритмов (7), (8), (10).

**Результаты статистического моделирования.** Для статистического моделирования алгоритмов необходимо формировать логарифм ФОП  $L(\chi)$  (3). Подставим в выражение для  $L(\chi)$  реализацию случайного поля (1), тогда  $L(\chi)$  будет иметь вид

$$L(\chi) = \gamma_0 S(\chi, \chi_0) - Q(\chi)/2 + N(\chi). \quad (14)$$

Здесь

$$N(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G n(x, y) s(x, y; \chi) dx dy$$

— шумовая функция;

$$Q(\chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s^2(x, y; \chi) dx dy$$

— отношение сигнал/шум для изображения с площадью  $\chi$ ;

$$S(\chi_0, \chi) = \frac{2}{N_0} \iint_G s(x, y; \chi_0) s(x, y; \chi) dx dy = \min[Q(\chi), Q(\chi_0)]$$

— сигнальная функция.

Переходя в выражении (14) к нормированной переменной  $\eta = \chi/\chi_{\max}$  и учитывая, что  $N(\eta)$  — гауссовский марковский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $\langle N(\eta_1)N(\eta_2) \rangle = \min[\tilde{Q}(\eta_1), \tilde{Q}(\eta_2)]$ , где  $\tilde{Q}(\eta) \equiv Q(\eta\chi_{\max})$ , представим этот процесс в виде

$$N(\eta) = \int_0^{\tilde{Q}(\eta)} n(x) dx.$$

Здесь  $n(x)$  — гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $\langle n(x_1)n(x_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2)$ . При моделировании с шагом  $\Delta\eta$  вырабатывались отсчёты функции  $N(\eta)$ , на основе которых реализация логарифма ФОП  $L(\eta)$

аппроксимировалась ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью  $\Delta = 0,02$ . Согласно [6] дискретные отсчёты логарифма ФОП можно записать в виде

$$L(\eta_{\min} + i\Delta\eta) = \gamma_0 S(\eta_{\min} + i\Delta\eta, \eta_0) + \sum_{j=1}^i \sqrt{\tilde{Q}(\eta_{\min} + j\Delta\eta) - \tilde{Q}(\eta_{\min} + (j-1)\Delta\eta)} n_j + \sqrt{\tilde{Q}(\eta_{\min}) n_0 - \tilde{Q}(\eta_{\min} + i\Delta\eta)}/2,$$

где  $n_j$  — гауссовские независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;  $i = \overline{0, N_{\max}}$  ( $N_{\max} = \text{ent}((1 - \eta_{\min})/\Delta\eta)$ ,  $\text{ent}(\cdot)$  — целая часть числа);  $\Delta\eta = \eta_{\min}\Delta^2$ .

Полученные общие результаты были конкретизированы для изображения в форме эллипса, интенсивность которого изменяется линейно вдоль оси  $x$ . Уравнение контура, ограничивающего область  $\Omega(\chi)$ , занимаемую изображением площадью  $\chi$ , имеет вид

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = \chi. \quad (15)$$

Здесь  $ab = 1/\pi$ . Обозначив через  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$  эксцентриситет эллипса (15), интенсивность изображения запишем как

$$F(x, y) = \frac{4F_H}{\sqrt{(1-q)^2 + 4(1+q)^2}} \left[ \frac{(1-q)\sqrt{\pi}(1-\varepsilon^2)^{1/4}}{2\sqrt{\chi_{\max}}} x + \frac{1+q}{2} \right], \quad (16)$$

где параметр  $F_H$  характеризует амплитуду интенсивности, параметр  $q = \frac{F(-a_{\max}, 0)}{F(a_{\max}, 0)}$  — наклон интенсивности изображения, а параметр  $a_{\max}$  определяет большую полуось эллипса при его максимальной площади  $\chi_{\max}$ . Функция (16), описывающая интенсивность изображения, нормирована так, чтобы энергия изображения с максимальной площадью  $E_{\max} = \iint_{\Omega(\chi_{\max})} F^2(x, y) dx dy = F_H^2 \chi_{\max}$  не зависела от наклона интенсивности изображения.

Эта независимость даёт возможность сравнивать эффективность алгоритмов обработки изображений с различными наклонами интенсивности. Подставляя (16) в выражение для  $\tilde{Q}(\eta)$ , находим отношение сигнал/шум:

$$\tilde{Q}(\eta) = z_H^2 \left[ \frac{(1-q)^2}{16} \eta^2 + \frac{(1+q)^2}{4} \eta \right] / \left[ \frac{(1-q)^2}{16} + \frac{(1+q)^2}{4} \right], \quad (17)$$

где  $\eta = \chi/\chi_{\max}$  — нормированная площадь,  $\eta \in [1/g; 1]$ ;  $g = \chi_{\max}/\chi_{\min}$  — динамический диапазон изменения неизвестной площади;  $z_H^2 = 2F_H^2 \chi_{\max}/N_0 = 2E_{\max}/N_0$  — отношение сигнал/шум для однородного изображения с интенсивностью  $F_H$  и площадью  $\chi_{\max}$ .

В процессе моделирования априорная плотность вероятности  $W_{pr}(\chi)$  неизвестной площади полагалась равномерной:

$$W_{pr}(\chi) = \begin{cases} 1/(\chi_{\max} - \chi_{\min}), & \chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}, \\ 0, & \chi < \chi_{\min}, \chi > \chi_{\max}. \end{cases}$$

Поэтому при наличии изображения ( $\gamma_0 = 1$ ) истинное значение нормированной площади  $\eta_0$  выбиралось случайным, распределённым равномерно на интервале  $[1/g; 1]$ . Параметр

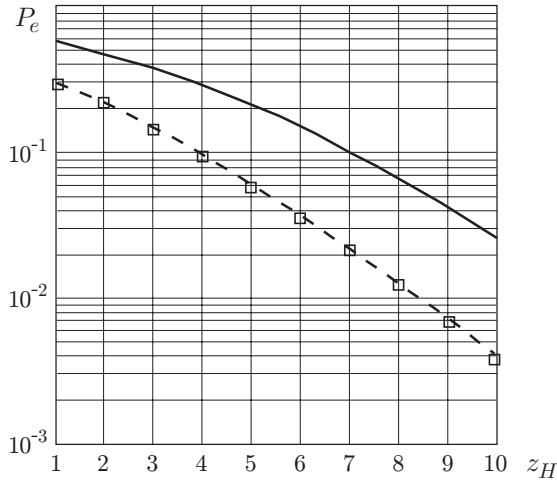


Рис. 1

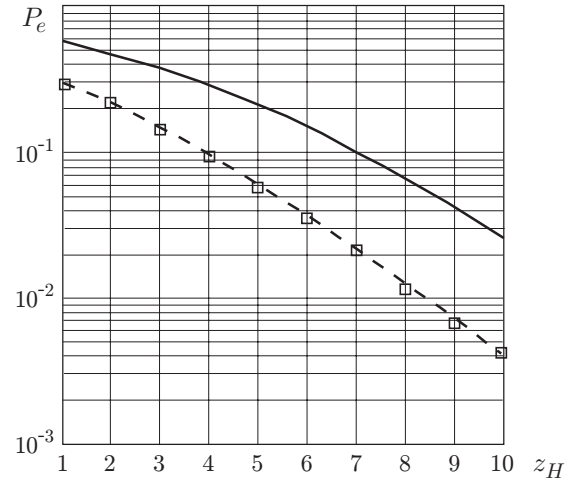


Рис. 2

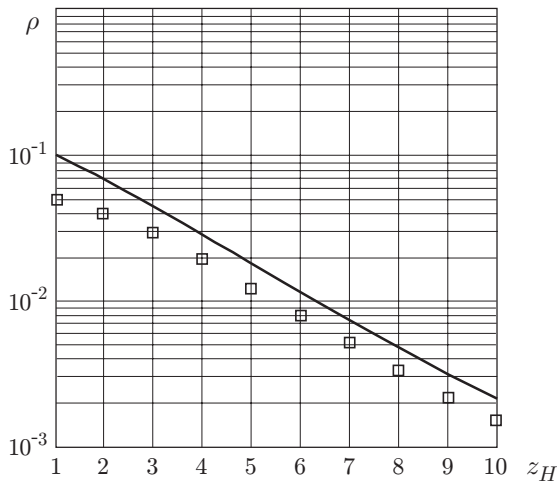


Рис. 3

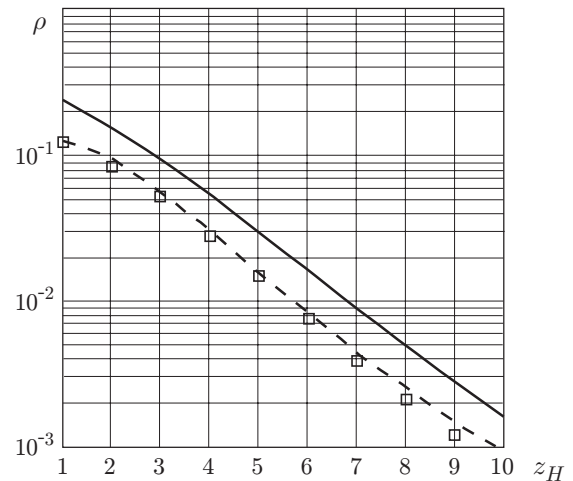


Рис. 4

$\gamma_0$  также выбирался случайным, принимающим значения 0 и 1 с вероятностями  $(1 - p_1)$  и  $p_1$  соответственно. В процессе моделирования было реализовано  $5 \cdot 10^4$  циклов испытаний для каждого  $z_H$ .

На рис. 1–4 представлены характеристики эффективности алгоритмов обработки неоднородного изображения, имеющего форму эллипса (15), с линейно изменяющейся интенсивностью ( $q = 10$ ) в зависимости от отношения сигнал/шум  $z_H$ . Динамический диапазон изменения площади выбран  $g = 5$ . Зависимости средней вероятности ошибки  $P_e$  (11) от отношения сигнал/шум  $z_H$  для алгоритмов обнаружения приведены на рис. 1, а для алгоритмов совместного обнаружения и оценивания — на рис. 2. Зависимости нормированного рассеяния  $\rho = V(\hat{\chi})/\chi_{\max}^2$  (12) и (13) от отношения сигнал/шум  $z_H$  для алгоритмов оценки показаны на рис. 3, а для алгоритмов совместного обнаружения и оценки — на рис. 4. Сплошными кривыми на рисунках представлены классические алгоритмы максимального правдоподобия ( $h = 0$ ), штриховыми — алгоритмы максимального правдоподобия с оптимизированным порогом, а квадратами — результаты моделирования байесовских алгоритмов.

**Заключение.** При одинаковом объеме априорной информации и равномерном априорном распределении неизвестной площади характеристики байесовских и максимального

правдоподобных алгоритмов обнаружения и совместного обнаружения и оценивания практически совпадают. Следовательно, вместо относительно сложных байесовских алгоритмов можно использовать более простые максимально правдоподобные с оптимизированным порогом. При оценке площади неоднородного изображения, когда изображение всегда присутствует в принятой реализации, применение байесовского подхода позволяет получить выигрыш в точности оценки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Эффективность обнаружения неоднородного изображения на фоне шума // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 19–27.
2. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Оценка площади неоднородного изображения на фоне пространственного шума // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 2003. № 10. С. 3–14.
3. **Трифонов А. П., Зимовец К. А.** Совместное обнаружение неоднородного изображения и оценка его площади на фоне шума // Автометрия. 2004. **40**, № 4. С. 11–25.
4. **Южно П. М.** Обнаружение пространственных объектов, затеняющих фон // Автометрия. 2012. **48**, № 4. С. 104–111.
5. **Трифонов А. П., Шинаков Ю. С.** Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
6. **Быков В. В.** Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971. 326 с.

*Поступила в редакцию 14 ноября 2012 г.*

---