УДК 539.3

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ И ЕГО СВЯЗЬ С J-ИНТЕГРАЛОМ

А. А. Буханько, А. И. Хромов

Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королева,
443086 Самара
E-mails: abukhanko@mail.ru, khromov@ssau.ru

На основе теории идеального жесткопластического тела рассматривается пластическое течение в окрестности вершины трещины, движущейся внутри упругопластического тела. Материал в окрестности вершины трещины рассматривается как тело, состоящее из внешней упругой и внутренней жесткопластической областей. Показано, что это представление энергетически обосновано для небольших пластических областей. Получено распределение удельной диссипации работы внутренних сил и деформаций вдоль траектории движения частицы в окрестности вершины трещины. Установлена связь между удельной диссипацией работы внутренних сил и J-интегралом в условиях плоской деформации.

Ключевые слова: пластичность, разрушение, диссипация энергии.

Введение. На основе модели идеального жесткопластического тела задача о пластическом течении в окрестности вершины трещины рассматривалась в работе [1]. При этом в качестве меры деформаций использовалась "техническая" деформация сдвига и при интегрировании тензора скоростей деформаций не учитывалось изменение конфигурации частиц в окрестности вершины трещины. При использовании указанного подхода была получена особенность полей деформаций в окрестности вершины трещины типа $1/r$. Данное обстоятельство значительно затрудняет описание процесса распространения трещины.

В настоящей работе учитывается изменение конфигурации частиц и рассматривается распределение плотности рассеиваемой работы внутренних сил вдоль траекторий движения частицы в адиабатических условиях, что позволяет исключить указанную особенность.

Критерий разрушения. Разрушение упругопластического материала представляется как совокупность двух процессов: процесса доведения материала до предельного состояния (зарождение трещины) и процесса образования новых свободных поверхностей (распространение трещины). Оба этих процесса, обусловленные наличием пластических деформаций, накоплением рассеиваемой работы внутренних сил и исчерпанием пластичности [2], рассматривались в работе [3] на примере разрушения жесткопластического образца. Завершение первого процесса определяется соотношением $W = W_{**}$, что соответствует исчерпанию пластичности и зарождению макротрещины. Здесь W — накопленная

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-08-00580-а).

объемная плотность рассеиваемой на пластических деформациях работы внутренних сил; W_{**} — ее критическое значение, определяемое по стандартным характеристикам разрушения материала (относительному удлинению образца δ и относительному уменьшению площади поперечного сечения образца при разрушении ψ) [3].

Ниже рассматривается только процесс распространения трещины. Предполагается, что разрушение частиц материала в окрестности вершины трещины происходит при совершении ими удельной работы при пластических деформациях: $W = W_*$ (W_* — критическое значение удельной работы внутренних сил, необходимой для распространения трещины).

Алгоритмы определения W_{**}, W_* приведены в работе [3].

Установившееся движение трещины внутри упругопластического тела. Рассмотрим подход к описанию процесса распространения трещины в упругопластическом теле в условиях плоской деформации, считая, что тело является составным (рис. 1) [4, 5].

Предполагается, что внешняя часть области, окружающей вершину трещины, является упругой, напряженно-деформированное состояние в ней определяется с использованием известных методов, в частности с помощью пакетов ANSYS, MSC и др.; внутренняя часть U, имеющая границу $ACDBEFGA$, является жесткопластической, деформации в ней, имеющие большие (конечные) значения, описываются аналитически тензорами конечных деформаций.

Введем также следующие предположения:

— свободная поверхность трещины, примыкающая к жесткопластической области, прямолинейна;

— пластическое течение является установившимся, размеры области U не меняются со временем, начало системы координат находится в вершине трещины (точка A);

— материал внешней области “набегает” на область U вдоль оси X со скоростью $m > 0$ (т. е. m — скорость распространения трещины);

— скорость частиц вдоль оси Y на линии BOE изменяется линейно (от нуля до значения V) в соответствии с известным решением Ричмонда [6]; кроме того, она совпадает со скоростями в задаче об одноосном однородном растяжении полосы с непрерывным полем скоростей перемещений [7];

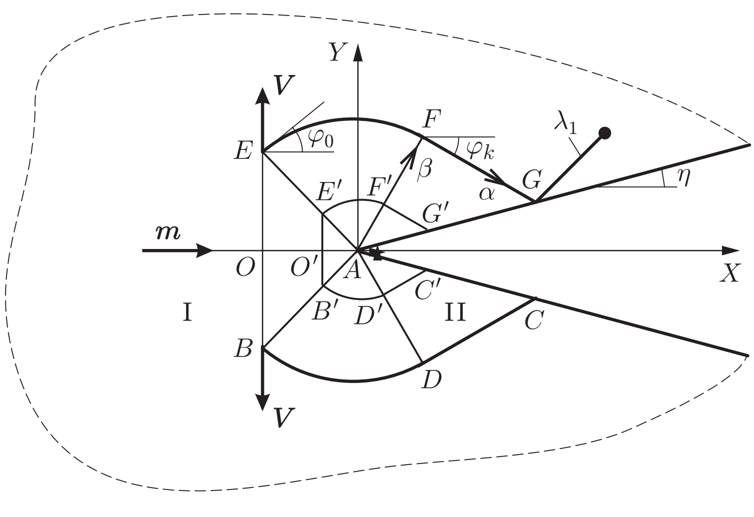

Рис. 1. Схема пластического течения в окрестности вершины трещины:
I — упругая область; II — жесткопластическая область U

— распределение нормальных скоростей на линии EFG (BDC) определяется из условия, согласно которому выше (ниже) этих линий частицы движутся со скоростью $V_Y = V$ ($V_Y = -V$);

— поле скоростей в веере линий скольжений EAF имеет вид

$$u = V(R/a + \sin\varphi - \sqrt{2}\,) - m\cos\varphi, \qquad v = V\cos\varphi + m\sin\varphi, \tag{1}$$

где u, v — проекции вектора скорости перемещения на криволинейные оси α, β в системе координат XAY, связанной с вершиной трещины; φ — угол наклона координатной линии α к оси X; R — радиус кривизны линий скольжения семейства α; a — длина отрезка OA (характерный размер пластической области). Аналогично строится поле скоростей для веера BAD.

Заметим, что гипотеза об установившемся пластическом течении не учитывает вращение свободных поверхностей границы трещины, наличие которого следует из решения Ричмонда, и предполагает сохранение угла раскрытия трещины для образующихся элементов свободной поверхности. Это позволяет связать величины m и V соотношением $m = V\,\mathrm{ctg}\,(\eta/2)$.

Указанные предположения тем точнее, чем меньше размеры жесткопластической области.

Заметим, что данная модель является приближенной, так как распределение касательных скоростей со стороны жесткопластической области U на линии EFG определяется по нормальным скоростям однозначно и не совпадает с распределением касательных скоростей для внешней упругой задачи. Это может привести к разрыву $[V_\tau]$ касательных компонент скоростей перемещений на участке контура EFG. Величина $[V_\tau]$ не удовлетворяет уравнениям теории идеального жесткопластического тела и изменяется от нуля (в точке O) до значения V (в точке E). При уменьшении размеров жесткопластической области эта "невязка" будет стремиться к нулю, так как поле скоростей является непрерывным как в упругой, так и в жесткопластической области.

Распределение работы внутренних сил в окрестности вершины трещины. Диссипация механической работы внутренних сил при пластическом деформировании материалов является одним из основных источников повреждения структуры материала и как следствие его разрушения. При изучении процессов распространения трещины и разрушения материала в окрестности угловых вырезов возникает задача о распределении диссипации механической энергии при адиабатических условиях в окрестности особой точки поля линий скольжения, являющейся центром веера. Удельная мощность работы внутренних сил определяется выражением [8]

$$\frac{dW}{dt} = 2k\gamma_{\max}, \tag{2}$$

где k — предел текучести на сдвиг; $\gamma_{\max}$ — максимальная скорость сдвига. Для определения удельной работы внутренних сил, произведенной частицей, уравнение (2) должно быть проинтегрировано вдоль траектории движения частицы L, состоящей из двух участков (рис. 2): прямолинейного участка L_1 в однородном поле деформирования (в области EAB) и криволинейного участка L_2 в веере характеристик EAF (BAD):

$$\frac{W}{2k} = \int\limits_L \gamma_{\max}\,dt = \int\limits_{L_1} \gamma_{1\max}\,dt_1 + \int\limits_{L_2} \gamma_{2\max}\,dt_2.$$

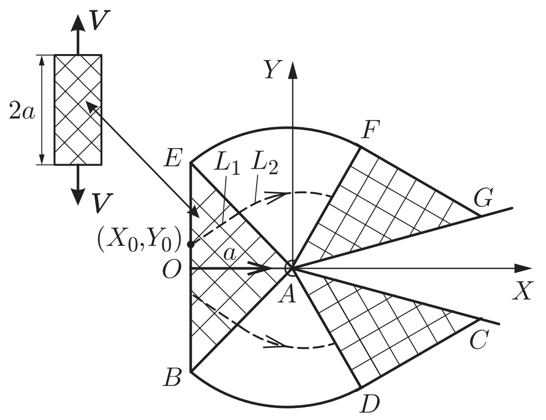

Рис. 2

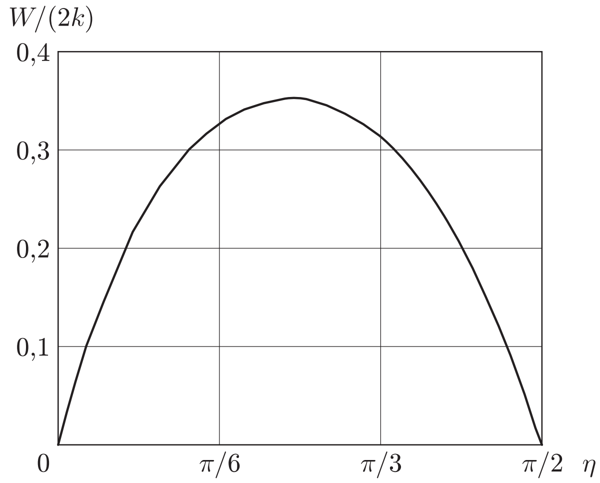

Рис. 3

Рис. 2. Напряженно-деформированное состояние и траектории движения частиц в окрестности вершины трещины (точка A):
заштрихованные области — области однородного поля деформирования

Рис. 3. Зависимость накопленной диссипации работы внутренних сил $W/(2k)$ от угла раскрытия трещины η

При этом начальное положение частицы определяется точкой ее входа в пластическую область $X = X_0$, $Y = Y_0$. Подынтегральные выражения определяются в виде

$$\gamma_{1\max} = V/a, \qquad \Delta t_1 = a/m,$$

$$\gamma_{2\max} = \frac{1}{R}\Big(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + u\Big) - \frac{1}{S}\Big(\frac{\partial u}{\partial \beta} - v\Big), \qquad dt_2 = \frac{R\,d\varphi}{u}.$$

Здесь R, S — радиусы кривизн линий скольжения α, β соответственно; α, β — криволинейные координаты, соответствующие линиям скольжения; $\varphi = \alpha + \beta$ [9]; величина Δt_1 отнесена к длине предельной траектории ($Y_0 \to 0$), совпадающей с отрезком $OA = a$; величина $\gamma_{1\max}$ определена согласно [7] для случая полосы при одноосном однородном деформировании.

Рассмотрим траектории частиц, проходящих через веер EAF в верхней части пластической области, где радиус кривизны линии скольжения α принимает отрицательное значение ($R < 0$). Выполняя переход к определенному интегралу, полагая, что линии β являются прямыми ($S \to \infty$) и переходя к пределу в начальных условиях $Y_0 \to 0$, получаем предельные значения удельной работы внутренних сил вдоль предельной траектории OA

$$\int\limits_{L_1} \gamma_{1\max}\,dt_1 = \int\limits_{L_1} \frac{V}{a}\,dt = \frac{V}{a}\,\Delta t = \frac{V}{m}, \qquad \int\limits_{L_2} \gamma_{2\max}\,dt_2 = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + u\Big)\frac{d\varphi}{u}.$$

Следовательно,

$$\frac{W}{2k} = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\frac{d\varphi}{u} + \frac{V}{m}. \tag{3}$$

В выражении (3) знак “$-$” перед интегралом соответствует отрицательному значению R; слагаемое V/m соответствует зарождению трещины. На рис. 3 представлена зависимость накопленной диссипации работы внутренних сил $W/(2k)$ после прохождения частицей веера линий скольжения от угла раскрытия трещины η. Наличие максимума на данной кривой объясняется наличием двух противодействующих параметров: угла раскрытия веера $\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_0$ и времени нахождения частицы в веере, определяемого скоростью $m = V \operatorname{ctg}(\eta/2)$.

Распределение деформаций частиц в окрестности вершины трещины. Изменение деформаций частицы вдоль траектории L определяется при интегрировании соотношений

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} \equiv \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik}\,\frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk}\,\frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}. \tag{4}$$

Здесь $d/dt = \partial/\partial t + (\partial/\partial x_i)V_i$ — материальная производная по времени; E_{ij} — тензор конечных деформаций Альманси; ε_{ij} — тензор скоростей деформаций; V_i — поле скоростей; x_i — эйлеровы координаты частицы. Уравнение (4) позволяет определить распределение материальной производной по времени от тензора Альманси вдоль траектории движения частицы:

$$\frac{dE_{ij}}{dt} = \varepsilon_{ij} - E_{ik}\,\frac{\partial V_k}{\partial x_j} - E_{jk}\,\frac{\partial V_k}{\partial x_i}.$$

Интегрируя это соотношение вдоль траектории $L = L_1 + L_2$, получаем распределение деформаций в частице

$$E_{ij} = \int\limits_{L_1} \frac{E_{ij}}{dt}\,dt + \int\limits_{L_2} \frac{E_{ij}}{dt}\,dt = E_{ij}^{(1)} + E_{ij}^{(2)}, \tag{5}$$

где индексы “(1)”, “(2)” отнесены соответственно к L_1, L_2. Переходя во втором интеграле (5) к интегрированию в полярных координатах (r,φ), учитывая, что $S \to \infty$ и $Y_0 \to 0$, можно показать, что радиус кривизны семейства линий скольжения α стремится к нулю во всех точках участка траектории L_2 ($R \to 0 \quad \forall\varphi \in L_2$). Это замечание следует из ограниченности поля скоростей перемещений в пластической области (1). Иными словами, для определения распределения скоростей деформаций в веере EAF вдоль предельной траектории $Y_0 \to 0$ необходимо проинтегрировать при $S \to \infty$ и $R \to 0$ предельное соотношение (4), которое после замены неизвестных функций можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям [10]

$$\begin{gathered} \frac{de}{d\varphi}\,f + g\cos 2(\theta-\psi) = 0, \qquad \frac{dg}{d\varphi}\,f + \Big(e - \frac{1}{2}\Big)\cos 2(\theta-\psi) = 0, \\ 2g\,\frac{d\theta}{d\varphi}\,f - \Big(e - \frac{1}{2}\Big)\sin 2(\theta-\psi) - g = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $e = (E_{11}+E_{22})/2$; $g = \sqrt{(E_{11}-E_{22})^2 + 4E_{12}^2}\,/2$; $f = (u - m\cos\varphi)/(\partial v/\partial\varphi + u)$; θ, ψ — углы наклона первого (алгебраически наибольшего) главного направления тензоров E_{ij}, ε_{ij}; $\varphi \in [\pi/4, -\pi/4+\eta]$ — угол наклона линии скольжения α к оси X.

Первый интеграл в (5) определяет накопление деформаций в однородном поле тензора скоростей деформаций, которое совпадает с соответствующим полем в задаче об одноосном однородном растяжении полосы. Согласно [7] это накопление деформаций определяется при интегрировании уравнений (4), преобразованных к виду

$$\frac{de}{dt} + 2\gamma g = 0, \qquad \frac{dg}{dt} + 2\gamma\Big(e - \frac{1}{2}\Big) = 0,$$

где $\gamma = V/a$. Полученная система уравнений должна быть проинтегрирована вдоль предельной траектории движения частицы (отрезок OA) при $t \in [0, a/m]$. При $t = 0$ прини-

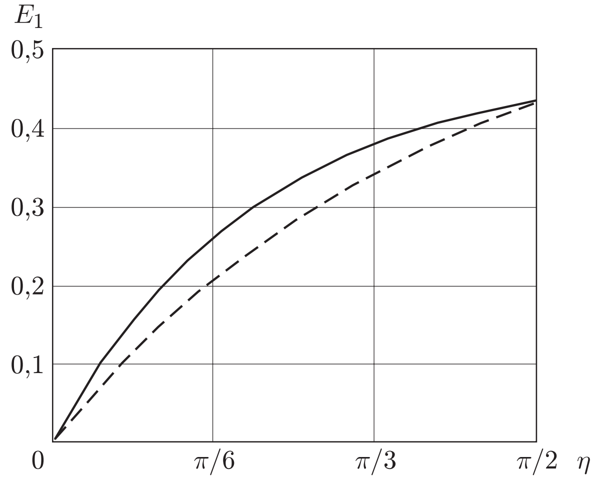

Рис. 4. Зависимость деформаций (первого главного значения тензора Альманси E_1) в окрестности вершины трещины от угла раскрытия трещины η: штриховая линия — начальные значения деформации в веере на линии EA в однородном поле деформирования, сплошная — конечные значения деформации на линии AF, полученные согласно системе (6), при движении частицы в веере EAF

маются начальные значения $e = g = 0$, при этом считается, что до входа в жесткопластическую область материал не деформировался. При $t = a/m$ поле деформаций в точке A определяется в виде

$$e = \frac{-(1-\exp{(2b)})^2}{4\exp{(2b)}}, \qquad g = \frac{-(1-\exp{(4b)})}{4\exp{(2b)}},$$

$$E_1 = e + g = (1-\exp{(-2b)})/2, \qquad E_2 = e - g = (1-\exp{(2b)})/2,$$

где $b = \operatorname{tg}(\eta/2)$. Значения e, g принимаются в качестве начальных для системы уравнений (6). Значение угла θ в области EAB считается постоянным: $\theta = \psi = \pi/2$. На рис. 4 представлена зависимость деформаций в окрестности вершины трещины (точка A) от угла раскрытия трещины η с учетом деформирования в области EAB вдоль отрезка OA.

Связь между работой внутренних сил W и J-интегралом. Закон сохранения механической энергии для объема U сплошной среды с единичной глубиной λ_1 по нормали к плоскости X, Y (см. рис. 1) в случае квазистатического процесса без учета массовых сил для несжимаемого тела устанавливает связь между мощностями внешних и внутренних сил в виде

$$\int\limits_{\Sigma} V_i t_i^{(\boldsymbol{n})}\, d\Sigma = \int\limits_{U} \varepsilon_{ij}\sigma_{ji}\, dU, \tag{7}$$

где V_i — поле скоростей; $t_i^{(\boldsymbol{n})} = \sigma_{ji} n_j$ — компонента вектора напряжений; σ_{ij} — тензор напряжений; $\varepsilon_{ij} = (V_{i,j} + V_{j,i})/2$ — тензор скоростей деформаций; Σ — граница жесткопластической области U. Интегрируя (7) по времени t, находим связь работ внешних и внутренних сил

$$\delta\Gamma = \int\limits_0^t \Big(\int\limits_{\Sigma} V_i t_i^{(\boldsymbol{n})}\, d\Sigma \Big)\, dt = \int\limits_0^t \Big(\int\limits_{U} \varepsilon_{ij}\sigma_{ji}\, dU \Big)\, dt, \tag{8}$$

где $\delta\Gamma$ — энергия, затрачиваемая на образование новой поверхности тела (в виде приращения поверхности трещины) за время t, в течение которого длина трещины получает приращение δl. Разделим обе части выражения (8) на приращение длины трещины δl:

$$\frac{1}{\delta l}\int\limits_0^t \Big(\int\limits_\Sigma V_i t_i^{(\boldsymbol{n})}\,d\Sigma\Big)\,dt = \frac{1}{\delta l}\int\limits_0^t \Big(\int\limits_U \varepsilon_{ij}\sigma_{ji}\,dU\Big)\,dt. \tag{9}$$

Переходя к пределу при $t \to 0$ ($\delta l \to 0$) в левой части (9), получаем величину $\delta\Gamma/\delta l$, вычисляемую на основе распределений V_i, $t_i^{(\boldsymbol{n})}$ на контуре $CDBEFG$. Если величины V_i, $t_i^{(\boldsymbol{n})}$ получены из решения внешней (упругой) задачи, то $\delta\Gamma/\delta l = J$, где J — инвариантный J-интеграл. Если величины V_i, $t_i^{(\boldsymbol{n})}$ вычисляются на основе теории идеального жесткопластического тела, то получаем

$$J_p = \frac{\delta\Gamma}{\delta l} = \lim_{\delta l\to 0}\frac{1}{\delta l}\int\limits_0^t \Big(\int\limits_\Sigma V_i t_i^{(\boldsymbol{n})}\,d\Sigma\Big)\,dt. \tag{10}$$

Контур интегрирования Σ стягивается в точку A при условии $OA = \delta l$, оставаясь подобным упругопластической границе. В соотношении (10) величина J_p, вообще говоря, не соответствует обычно рассматриваемому J-интегралу, так как его инвариантность доказана для случая деформационной теории пластичности [1]. Разность этих величин может быть оценена выражением

$$|J - J_p| \leqslant \Big|\frac{\delta\Pi}{\delta l}\Big| + \Big|\frac{\delta}{\delta l}\Big(2\int\limits_{EFG}[V_\tau]k\,ds\Big)\Big|.$$

Здесь Π — неучтенная потенциальная упругая энергия в жесткопластической области. Рассмотрим правую часть данного неравенства. При стягивании контура $CDBEFG$ в точку A объем жесткопластической области U стремится к нулю быстрее, чем линейный размер δl, поэтому первое слагаемое стремится к нулю. Касательные компоненты скорости V_τ^+, V_τ^- являются непрерывными функциями в упругой и жесткопластической областях соответственно. В точках E и B $V_\tau^+ = V_\tau^-$, поэтому при стягивании контура в точку A величина разрыва $[V_\tau] = V_\tau^+ - V_\tau^-$ стремится к нулю, а следовательно, второе слагаемое также стремится к нулю. Таким образом, при стягивании контура $CDBEFG$ в точку A величина $|J - J_p| \to 0$. Учитывая данное замечание, можно принять

$$J_p \approx J, \tag{11}$$

при этом не учитывается рассеяние работы внутренних сил в конечной жесткопластической области (т. е. неинвариантность J-интеграла в жесткопластической области).

Рассмотрим правую часть соотношения (9). Область U состоит из пяти частей: прямоугольных треугольников AFG, EAB, ADC и центрированных вееров EAF, BAD. Подынтегральное выражение имеет сингулярность типа $1/r$ только в веерах.

Примем $OA = \delta l = a$ (см. рис. 2), что соответствует минимальному по размеру контуру, охватывающему вершину трещины при варьировании ее длины на величину $\delta l = mt$. Рассматривая последовательность контуров $G'F'E'O'B'D'C'$, стягивающихся в точку A (см. рис. 1), получаем

$$\frac{1}{\delta l}\int\limits_0^t \Big(\int\limits_U \varepsilon_{ij}\sigma_{ji}\,dU\Big)\,dt = \frac{3}{m}\,a'\cdot 2k + \frac{2\sqrt{2}\cdot 2k}{m}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k}\Big(\frac{\partial v}{\partial\varphi} + u\Big)\,d\varphi. \tag{12}$$

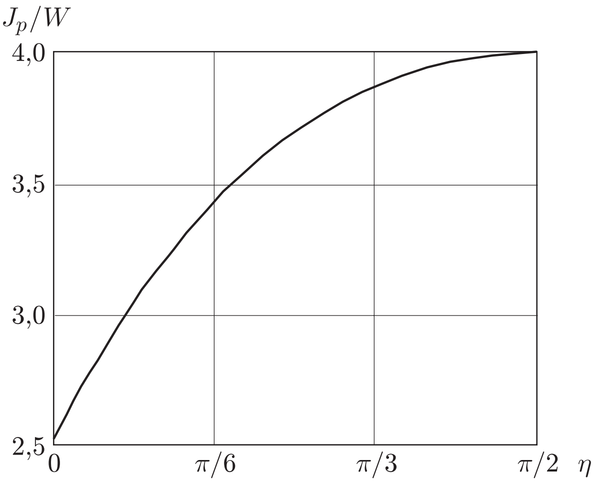

Рис. 5. Зависимость предельного значения J_p/W от угла раскрытия трещины η

Выражение (12) зависит от величины $a' = O'A$. При стягивании контура $G'F'E'O'B'D'C'$ в точку A ($a' \to 0$) из соотношения (9) с учетом (10), (12) получаем

$$J_p = \frac{4\sqrt{2}k\,\lambda_1}{m} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\,d\varphi. \tag{13}$$

Согласно (3), (13) имеем

$$\frac{J_p}{W} = -\frac{2\sqrt{2}\,\lambda_1}{m} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\,d\varphi \Big/ \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\frac{d\varphi}{u}. \tag{14}$$

Поскольку в соответствии с (11) $J_p \approx J$, формула (14) может быть использована для определения предельной величины W_* по критическому значению J-интеграла J_c, определяемому экспериментально. Это замечание справедливо для плоских и цилиндрических образцов материалов, в которых при одноосном растяжении перед разрушением отсутствует четко выраженная “шейка”. В этом случае алгоритм определения величины W_*, предложенный в работе [3], не может быть реализован.

На рис. 5 представлена зависимость предельного значения величины J_p/W от угла раскрытия трещины η.

Соотношение (14) справедливо для малых пластических областей. Если такая область достаточно велика и трещина распространяется с постоянной скоростью m, то вместо величины J_p естественно использовать интеграл по всей жесткопластической области U (без стягивания контура Σ в точку A) и считать, что

$$\frac{J}{2k} \approx \frac{3a\lambda_1}{m} + \frac{2\sqrt{2}\,\lambda_1}{m} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\,d\varphi. \tag{15}$$

Здесь знак приближенного равенства означает наличие “невязки” $[V_\tau]$ и неучет потенциальной упругой энергии в области U. Из (3), (15) следует

$$\frac{J}{W} = \Big[3a + 2\sqrt{2} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\,d\varphi\Big]\lambda_1 \Big/ \Big[V - m\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \Big(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\Big)\frac{d\varphi}{u}\Big].$$

Это соотношение может быть использовано для определения характерного размера пластической области a, необходимого для доведения материала до предельного состояния при движении частицы вдоль предельной траектории (отрезка OA) с последующим ее разрушением в верхнем и нижнем веерах линий скольжения при установившемся режиме распространения трещины.

Заключение. Соотношения (3), (6), определяющие накопление рассеиваемой работы внутренних сил и распределение деформаций вдоль траектории частицы при пересечении ею пластической области в окрестности вершины трещины, существенно отличаются от соотношений, полученных в работе [1], и не имеют особенности $1/r$. Данное отличие объясняется учетом движения частиц в окрестности вершины трещины. Если в исходном положении частица находится вблизи вершины трещины, то время ее нахождения в пластической области стремится к нулю пропорционально r.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rice J. R.** A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. 1968. V. 35. P. 379–386.
2. **Писаренко Г. С.** Сопротивление жаропрочных материалов нестационарным силовым и температурным воздействиям / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский, Е. А. Антипов. Киев: Наук. думка, 1974.
3. **Хромов А. И., Буханько А. А., Козлова О. В., Степанов С. Л.** Пластические константы разрушения // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 147–155.
4. **Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л.** Концентраторы деформаций // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 6. С. 777–781.
5. **Буханько А. А., Степанов С. Л., Хромов А. И.** Растяжение полосы с V-образными вырезами и разрушение пластических тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 3. С. 177–186.
6. **Richmond O.** Plane strain necking of V-notched and un-notched tensile bars // J. Mech. Phys. Solids. 1969. V. 17. P. 83–90.
7. **Хромов А. И.** Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова. Владивосток: Дальнаука, 2005.
8. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
9. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
10. **Хромов А. И.** Деформация и разрушение жесткопластических тел. Владивосток: Дальнаука, 1996.

Поступила в редакцию 5/III 2012 г.