

AMS subject classification: 65N30, 76M10

Анализ высокой точности приведенного элемента Адини–Стокса для модели Бринкмана*

С. Чжоу

School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013, China

E-mail: dasazxc@gmail.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 17, 2024.

Чжоу С. Анализ высокой точности приведенного элемента Адини–Стокса для модели Бринкмана // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 4. — С. 443–455.

В данной работе выполняется анализ высокой точности метода приведенного элемента Адини–Стокса, разработанного в [7], для модели Бринкмана. Мы показываем, что этот метод равномерно сходится с точностью порядка $O(h^2)$ для скорости в норме, зависящей от сетки и параметров, на общих квазиоднородных прямоугольных сетках. Также предлагается соответствующий метод постобработки для повышения точности для давления. Численные примеры подтверждают нашу теорию.

DOI: 10.15372/SJNM20240406

EDN: SUDYDS

Ключевые слова: анализ высокой точности, приведенный элемент Адини–Стокса, модель Бринкмана.

Zhou X. High accuracy analysis of the reduced Adini Stokes element for the Brinkman model // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 4. — P. 443–455.

This work provides a high accuracy analysis of the reduced Adini Stokes element method developed in [7] for the Brinkman model. We show that this method is uniformly convergent for the velocity with convergence order $O(h^2)$ in a mesh- and parameter-dependent norm over general quasi-uniform rectangular meshes. A proper postprocessing technique is also proposed to improve the precision of the pressure. Numerical examples confirm our theory.

Keywords: high accuracy analysis, reduced Adini Stokes element, Brinkman model.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — полигональная область. Рассмотрим следующую задачу Бринкмана: найти скорость \mathbf{u} и давление p такие, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\nu \nabla \mathbf{u}) + \alpha \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Работа выполнена при поддержке НФЕН (проект № 12201254) и ННФ провинции Цзянсу (проект № BK20200902).

Здесь $\nu(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент вязкости и $\alpha(\mathbf{x}) \geq 0$ — динамическая вязкость, деленная на проницаемость. Член $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — известная массовая сила. Для удобства предположим, что ν и α — постоянные.

Метод конечных элементов — мощный инструмент для этой модели. Ввиду базовой структуры, предложенной в [23], успешный стандартный метод конечных элементов должен сходиться как для задачи Стокса, так и для задачи Дарси. Пространство скоростей попадает в одну из следующих трех категорий: H^1 -конформное [5, 19, 20, 24], H^1 -неконформное, но $H(\operatorname{div})$ -конформное [7, 9, 18, 23], или $H(\operatorname{div})$ -неконформное [26, 28, 29]. Для последних двух категорий получение равномерной сходимости высокого порядка с низкой вычислительной сложностью кажется нетривиальной задачей. Насколько нам известно, в 2D-случае этой цели можно достичь только с помощью треугольного семейства [9] и семейства, совсем недавно предложенного в [29], на однородных прямоугольных сетках. Существуют также некоторые варианты методов конечных элементов, которые могут обеспечить высокую точность более простым и систематическим способом, например разрывный метод Галеркина [6, 12], гибридный метод высокого порядка [4], слабый метод Галеркина [16, 17, 25], метод виртуальных элементов [11, 27] и т. д.

В [7] Джилетт с соавторами представили нестандартные комплексы де Рама на кубических сетках с помощью переноса степеней свободы (degree of freedom или DoF) и серендиповых операций. В двумерном случае они часто являются неконформными аппроксимациями для комплекса Стокса, а элементы 1-формы относятся ко второй категории для модели Бринкмана (1.1). Два типичных примера — полный и приведенный комплексы Адени с наименьшим порядком равномерной сходимости. Известно, что элемент Адени (как элемент 0-формы) может достигать порядка $O(h^2)$ для бигармонической задачи [13–15], и такая же высокая точность, естественно, желательна для элементов Адени–Стокса (как элементов 1-формы). В данной работе мы показываем, что приведенный элемент Адени–Стокса действительно имеет такую высокую точность порядка $O(h^2)$ для скорости в норме, зависящей от сетки и параметров, на общих квазирегулярных прямоугольных сетках. Высокая точность члена ошибки аппроксимации обусловлена точностью комплекса, а основная идея для члена ошибки согласованности — стратегия переключения касательной-нормали, используемая в [29] с помощью разложения Кошуля [2]. Также предлагается подходящий метод постобработки для повышения точности до $O(h^2)$ для давления. Приведены численные примеры и дополнительные комментарии относительно полного элемента Адени–Стокса.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы вводим некоторые обозначения и основные понятия приведенного элемента Адени–Стокса для модели Бринкмана. Далее в п. 3 показана высокая точность этого элемента для скорости. Затем в п. 4 мы представляем метод постобработки. Наконец, численные результаты представлены в п. 5.

2. Приведенный элемент Адени–Стокса для модели Бринкмана

В данном пункте напомним приведенный элемент Адени–Стокса, представленный в [7], и покажем его применение для модели Бринкмана. В данной статье используются стандартные обозначения в пространствах Соболева. Для области $D \subset \mathbb{R}^2$ \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали на ∂D , $P_k(D)$ — обычное полиномиальное пространство над D степени не выше k . Норму и полунорму на $H^k(D)$ запишем как $\|\cdot\|_{k,D}$ и $|\cdot|_{k,D}$ соответственно. Запишем $H_0^k(D)$ как замыкание $C_0^\infty(D)$ в $H^k(D)$, и, аналогичным образом, функции в $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}; D) \subset \mathbf{H}(\operatorname{div}; D)$ имеют нулевой нормальный след на ∂D . Также

предположим, что $L^2(D) := H^0(D)$ со своим скалярным произведением, обозначаемым $(\cdot, \cdot)_D$, и $L_0^2(D) \subset L^2(D)$ — подпространство с нулевым интегралом по D . Кроме того, оператор L^2 -проекции на $P_k(D)$ запишем как $\mathcal{P}_{k,D}$. Приведенные выше обозначения также могут использоваться для векторных и матричных пространств Соболева, индекс D во всех приведенных выше обозначениях будет опущен при условии, что $D = \Omega$.

Предположим, что область решения Ω можно разбить на квазиоднородные прямоугольники, обозначаемые \mathcal{T}_h , где h — максимальный размер ячеек в \mathcal{T}_h . Для ячейки $K \in \mathcal{T}_h$ обозначим вершины как $V_{i,K}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Построим систему координат такую, что $V_{1,K} = (x'_K, y'_K)$, $V_{2,K} = (x''_K, y'_K)$, $V_{3,K} = (x''_K, y''_K)$, $V_{4,K} = (x'_K, y''_K)$ при $x'_K < x''_K$ и $y'_K < y''_K$. Длина и ширина K определяются выражениями $h_{x,K} = x''_K - x'_K$ и $h_{y,K} = y''_K - y'_K$ соответственно. Также запишем $E_{i,K} = V_{i,K}V_{i+1,K}$ — четыре ребра K , где i берется по модулю четыре. Множества всех вершин, внутренних вершин и граничных вершин в \mathcal{T}_h обозначим как \mathcal{V}_h , \mathcal{V}_h^i и \mathcal{V}_h^b соответственно. Также запишем C как положительную постоянную, не зависящую от h, ν и α , и она может меняться в разных местах.

Теперь напомним приведенный элемент Адени–Стокса и соответствующий комплекс Стокса. Для простоты рассмотрим только их однородные версии. Для любого $K \in \mathcal{T}_h$ известный элемент Адени (K, W_K, T_K) [1] определяется пространством функций формы W_K и множеством степеней свободы (DoF) T_K :

$$W_K = P_3(K) \oplus \text{span}\{x^3y, xy^3\}, \quad T_K = \{w(V_{i,K}), \nabla w(V_{i,K}) \mid w \in W_K, i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Соответствующее глобальное пространство W_h запишем в виде

$$W_h = \{w \in H_0^1(\Omega) : w|_K \in W_K \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ \nabla w \text{ непрерывен для всех } V \in \mathcal{V}_h^i \text{ и равен нулю для всех } V \in \mathcal{V}_h^b\}.$$

Приведенный элемент Адени–Стокса $(K, \mathbf{V}_K, \Sigma_K)$ был введен в [7], где

$$\mathbf{V}_K = [P_1(K)]^2 \oplus \text{span}\{\mathbf{curl} x^3, \mathbf{curl} x^2y, \mathbf{curl} xy^2, \mathbf{curl} y^3, \mathbf{curl} x^3y, \mathbf{curl} xy^3\}, \\ \Sigma_K = \left\{ \mathbf{v}(V_{i,K}), \int_{E_{i,K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \mid \mathbf{v} \in \mathbf{V}_K, i = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Отметим, что \mathbf{V}_K имеет следующее разложение Кошуля [2]:

$$\mathbf{V}_K = \text{span}\{(x, y)^\top\} \oplus \mathbf{curl} W_K, \quad (2.1)$$

которое пригодится в нашем предстоящем анализе. При этом \mathbf{V}_h имеет вид

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v}|_K \in \mathbf{V}_K \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \\ \mathbf{v} \text{ непрерывна для всех } V \in \mathcal{V}_h^i \text{ и равна нулю для всех } V \in \mathcal{V}_h^b\}.$$

Пусть P_h — кусочно-постоянное пространство с нулевым интегралом по Ω :

$$P_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_K \in P_0(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Тогда в соответствии с [7] следующий приведенный комплекс Адени–Стокса является точным:

$$0 \longrightarrow W_h \xrightarrow{\mathbf{curl}} \mathbf{V}_h \xrightarrow{\text{div}} P_h \longrightarrow 0. \quad (2.2)$$

Запишем билинейную форму $b(\mathbf{v}, q) = (\operatorname{div} \mathbf{v}, q)$ для $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$ и $q \in L^2(\Omega)$. Модель Бринкмана (1.1) имеет следующую слабую формулировку: найти $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ такие, что

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2, \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эта задача имеет единственное решение вследствие стандартной теории смешанных методов [3] и условия inf-sup

$$\sup_{\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^2} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq C \|q\|_0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (2.4)$$

Дискретная формулировка с использованием приведенного элемента Адина–Стокса следующая: найти $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times P_h$ такие, что

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in P_h, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где билинейная форма $a_h(\cdot, \cdot)$ задается следующим образом:

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_K + \alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h).$$

Кроме того, введем следующие нормы или полунормы для измерения ошибки вычислений:

$$\|\mathbf{v}_h\|_{1,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,K}^2, \quad |\mathbf{v}_h|_{1,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2, \quad \|\mathbf{v}_h\|_{a_h}^2 = a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h).$$

Слабая непрерывность \mathbf{V}_h гарантирует, что $\|\cdot\|_{a_h}$ — норма в \mathbf{V}_h .

Замечание 2.1. В предстоящем анализе свойство отсутствия дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в (1.1) будет играть основную роль. Однако это свойство может не выполняться, если $\alpha > 0$, и его следует заменить на $\operatorname{div} \mathbf{u} = g$ для данного ненулевого значения $g(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)$. Тем не менее, этот случай можно преобразовать в случай отсутствия дивергенции с помощью простой предварительной обработки. Пусть \mathbf{a} — произвольная точка в Ω , с использованием оператора Пуанкаре можно легко вычислить (посредством одномерного численного интегрирования)

$$\mathbf{u}_g = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \int_0^1 \operatorname{tg}(t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{a}) dt,$$

которое удовлетворяет $\operatorname{div} \mathbf{u}_g = g$ [8]. Затем, путем введения $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_g$ получим новую задачу, имеющую вид, аналогичный (1.1), с новой неизвестной бездивергентной скоростью \mathbf{v} . Как следствие, достаточно обсудить только (1.1) и вариационную и дискретную формулировки (2.3) и (2.5).

Комплекс (2.2) показывает условие отсутствия дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{V}_h \subset P_h$. Пусть Π_h — стандартная узловая интерполяция из $[H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2$ в \mathbf{V}_h с $s > 0$ и \mathcal{P}_h — L^2 -проектор в P_h . Тогда DoF интегрального типа для нормального следа в Σ_K гарантируют, что

$$\operatorname{div} \Pi_h \mathbf{v} = \mathcal{P}_h \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^{1+s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2.$$

С использованием сглаживания Скотта–Чжана [21] Π_h можно изменить так, чтобы его можно было определить на $[H_0^1(\Omega)]^2$ с приведенным выше соотношением без изменений. В результате, следующее дискретное условие inf–sup может быть проверено с использованием его непрерывной версии (2.4) и метода Фортина:

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} \geq C \|q_h\|_0 \quad \forall q_h \in P_h. \quad (2.6)$$

Тогда в соответствии с теоремой 1.2 из [9] задача (2.5) имеет единственное решение (\mathbf{u}_h, p_h) со следующей абстрактной оценкой ошибки:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{a_h} &\leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{a_h} + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{a_h}} \right), \\ \|p - p_h\|_0 &\leq C \left[\|p - \mathcal{P}_h p\|_0 + M^{1/2} \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{a_h} + \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{a_h}} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $M = \max\{\nu, \alpha\}$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in P_h\} = \mathbf{curl} W_h, \\ E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) &= -\nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}_h \, ds. \end{aligned}$$

3. Анализ высокой точности

В соответствии с (2.7) и с учетом элементарной оценки ошибки приведенного элемента Адини–Стокса (см. [7, теоремы 5.3 и 6.1]) решение задачи (2.5) сходится равномерно с порядком $O(h)$ для скорости в норме $\|\cdot\|_{a_h}$ и для давления в L^2 -норме. В данном пункте мы покажем, что этот порядок можно улучшить до $O(h^2)$, по крайней мере для скорости.

Теорема 3.1. Пусть $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)]^2 \times [L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)]$ — слабое решение (2.3). Тогда решение (2.5) имеет следующую равномерную сходимость:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{a_h} \leq Ch^2(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)|\mathbf{u}|_3, \quad \|p - p_h\|_0 \leq Ch \left[|p|_1 + M^{1/2}h(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)|\mathbf{u}|_3 \right].$$

Доказательство. Начнем доказательство с члена аппроксимации. Заметим, что в (1.1) \mathbf{u} бездивергентно, причем \mathbf{u} имеет регулярность: $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)]^2$. Поэтому $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \phi$ для некоторого $\phi \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Следовательно, вследствие точности (2.2) и оптимальной аппроксимации W_h находим

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{a_h}^2 &= \inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} (\nu |\mathbf{curl}(\phi - w_h)|_{1,h}^2 + \alpha \|\mathbf{curl}(\phi - w_h)\|_0^2) \\ &\leq C \inf_{\mathbf{w}_h \in W_h} (\nu |\phi - w_h|_{2,h}^2 + \alpha |\phi - w_h|_1^2) \\ &\leq Ch^4(\nu + \alpha h^2)|\phi|_4^2 \leq Ch^4(\nu + \alpha h^2)|\mathbf{u}|_3^2, \end{aligned}$$

что дает

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{a_h} \leq Ch^2(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)|\mathbf{u}|_3. \quad (3.1)$$

Поэтому остается рассмотреть член ошибки согласованности $E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)$.

Для этого определим, что $\mathcal{I}_{1,K}v$ — узловая интерполяция в пространство билинейных элементов, которая соответствует значениям в четырех вершинах функции $v \in H^{1+s}(K)$ $\forall K \in \mathcal{T}_h$, и положим $\mathcal{R}_{1,K}v = v - \mathcal{I}_{1,K}v$. Запишем $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ и $\mathbf{w}_h = (w_{h1}, w_{h2})^\top \in \mathbf{V}_h$. Тогда ввиду непрерывности вершин \mathbf{V}_h и вследствие того факта, что $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega)$, получим

$$E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = -\nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} J_{2,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h), \quad (3.2)$$

где

$$J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = \left(\int_{E_{3,K}} - \int_{E_{1,K}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathcal{R}_{1,K} w_{h1} \, ds,$$

$$J_{2,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = \left(\int_{E_{2,K}} - \int_{E_{4,K}} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} \mathcal{R}_{1,K} w_{h2} \, ds.$$

Теперь сосредоточимся на $J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)$. Заметим, что в соответствии с определением \mathbf{V}_K

$$w_{h1} \mid_K \in \text{span}\{1, x, y, xy, y^2, xy^2\} \oplus \text{span}\{x^2, x^3\} := W_1 \oplus W_2,$$

и $W_1 \mid_{E_{i,K}} = P_1(E_{i,K})$ для $i = 1, 3$; W_2 не зависят от y . Вследствие этого

$$\mathcal{R}_{1,K} w_{h1} \mid_{E_{3,K}} = \mathcal{R}_{1,K} w_{h1} \mid_{E_{1,K}} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h \quad (3.3)$$

и поэтому

$$|J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)| = \left| \left(\int_{E_{3,K}} - \int_{E_{1,K}} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \mathcal{P}_{0,K} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \mathcal{R}_{1,K} w_{h1} \, ds \right| \leq Ch \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{1,K} |w_{h1}|_{1,K}. \quad (3.4)$$

Введем следующую билинейную форму:

$$J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = \frac{h_{x,K}^2}{12} \int_K \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_{h2}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} \frac{\partial w_{h2}}{\partial x} \right) d\mathbf{x}.$$

Из обратного неравенства следует, что

$$\begin{aligned} |J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)| &\leq Ch^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{1,K} |w_{h2}|_{2,K} + Ch^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{2,K} |w_{h2}|_{1,K} \\ &\leq Ch \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{1,K} + h \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{2,K} \right) |w_{h2}|_{1,K}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Кроме того, в соответствии с (3.3) можно проверить, что

$$J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = 0, \text{ если } \frac{\partial u_1}{\partial y} = 1 \text{ или } \frac{\partial u_1}{\partial y} = x. \quad (3.6)$$

Теперь вспомним разложение Кошуля (2.1). Если $\mathbf{w}_h \mid_K = (x, y)^\top$, ясно, что

$$J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h), \text{ если } \frac{\partial u_1}{\partial y} = y. \quad (3.7)$$

В этом случае обе части (3.7) зануляются. В противном случае, предположим, что $\mathbf{w}_h|_K = \mathbf{curl} w$ для некоторого $w \in W_K$. Пусть $(x_{0,K}, y_{0,K})$ — центр K и определим

$$\xi_K = \frac{2}{h_{x,K}}(x - x_{0,K}), \quad \eta_K = \frac{2}{h_{y,K}}(y - y_{0,K}).$$

Заметим, что $\mathcal{I}_{1,K}$ сохраняет значения при $V_{3,K}$ и $V_{4,K}$, $\frac{\partial w}{\partial y}|_{E_{3,K}} = w_{h1}|_{E_{3,K}} \in P_3(E_{3,K})$ и $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ не зависит от y . С использованием (3.3), интегрирования по частям и с помощью квадратурного правила Симпсона имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{E_{3,K}} - \int_{E_{1,K}} \right) \eta_K \mathcal{R}_{1,K} w_{h1} \, ds = 2 \int_{E_{3,K}} \mathcal{R}_{1,K} \frac{\partial w}{\partial y} \, ds = -h_{x,K} \int_{E_{3,K}} \xi_K \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}_{1,K} \frac{\partial w}{\partial y} \, ds \\ & = -\frac{h_{x,K}^2}{6} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}_{1,K} \frac{\partial w}{\partial y}(V_{3,K}) - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{R}_{1,K} \frac{\partial w}{\partial y}(V_{4,K}) \right) = -\frac{h_{x,K}^2}{6} \int_{E_{3,K}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{R}_{1,K} \frac{\partial w}{\partial y} \, ds \\ & = -\frac{h_{x,K}^2}{6} \int_{E_{3,K}} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \, ds = -\frac{h_{x,K}^2}{12} \int_K \frac{\partial \eta_K}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \, d\mathbf{x} = \frac{h_{x,K}^2}{12} \int_K \frac{\partial \eta_K}{\partial y} \frac{\partial^2 w_{h2}}{\partial x \partial y} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Это означает, что (3.7) также верно для $\mathbf{w}_h|_K \in \mathbf{curl} W_K$. Используя (2.1) и собирая вместе (3.6) и (3.7), имеем

$$J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) = J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \quad \forall \frac{\partial u_1}{\partial y} \in P_1(K), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (3.8)$$

Благодаря тому, что как $J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)$, так и $J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)$ являются билинейными относительно $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ и \mathbf{w}_h , в соответствии с соотношениями (3.4), (3.5), (3.8) и леммой Брэмбла–Гильберта получим

$$\begin{aligned} |J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)| & \leq Ch \inf_{p \in P_1(K)} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} - p \right|_{1,K} + h \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{2,K} \right) |\mathbf{w}_h|_{1,K} \\ & \leq Ch^2 \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|_{2,K} |\mathbf{w}_h|_{1,K} \leq Ch^2 |\mathbf{u}|_{3,K} |\mathbf{w}_h|_{1,K}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Суммирование по всем K дает

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \right| \leq \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \right| + Ch^2 |\mathbf{u}|_3 |\mathbf{w}_h|_{1,h}. \quad (3.10)$$

С другой стороны, поскольку $\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega)$ и $\mathbf{u} \in [H^3(\Omega)]^2$, $\frac{\partial w_{h2}}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$ непрерывны вдоль всех ребер, параллельных оси x . Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} J'_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \right| &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_{x,K}^2}{12} \int_K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \frac{\partial w_{h2}}{\partial x} \right) dx \right| \\ &= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_{x,K}^2}{12} \left(\int_{E_{3,K}} - \int_{E_{1,K}} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \frac{\partial w_{h2}}{\partial x} ds \right| = 0, \end{aligned}$$

что вместе с (3.10) дает

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} J_{1,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \right| \leq Ch^2 |\mathbf{u}|_3 |\mathbf{w}_h|_{1,h}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для $J_{2,K}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)$. Подстановка этих оценок в (3.2) показывает, что

$$|E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)| \leq C\nu h^2 |\mathbf{u}|_3 |\mathbf{w}_h|_{1,h} \leq C\nu^{1/2} h^2 |\mathbf{u}|_3 \|\mathbf{w}_h\|_{a_h}, \quad (3.11)$$

а оценка скорости получается из (2.7), (3.1) и (3.11).

Поскольку $\|p - \mathcal{P}_h p\|_0 \leq Ch|p|_1$, искомая оценка для давления также следует из (2.7), (3.1) и (3.11). \square

Замечание 3.1. Этот результат сходимости можно рассматривать как аналог высокой точности известного элемента Адени 1-формы для задач четвертого порядка, разработанных в [14]. Однако не все пространства 1-формы, которые можно рассматривать как компоненты точной последовательности, начиная с пространства элементов Адени, имеют такую высокую точность. Типичным примером является полный элемент Адени–Стокса, также построенный в [7], и для этого элемента соотношение (3.8) больше не выполняется. Численные результаты по этому элементу можно найти в [29].

4. Постобработка для давления

В соответствии с теоремой 3.1 только скорость имеет оптимальный равномерный порядок сходимости $O(h^2)$, но для давления этот порядок всего лишь $O(h)$. Это является упрощением, поскольку порядок аппроксимации неоптимален. В данном пункте мы предлагаем метод поэлементной постобработки для улучшения порядка равномерной сходимости для давления. Основная идея взята из работы Стенберга [22] для чистых задач Дарси. Аналогичный метод был разработан в [19] для чистых задач Стокса.

Пусть (\mathbf{u}_h, p_h) — решение (2.5). Решение для давления p_h^* после обработки определяется поэлементно следующим образом: для любого $K \in \mathcal{T}_h$, $p_h^*|_K \in P_1(K)$,

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^*, \nabla q)_K &= (\nu \Delta \mathbf{u}_h - \alpha \mathbf{u}_h + \mathbf{f}, \nabla q)_K \quad \forall q \in P_1(K), \\ \int_K p_h^* dx &= \int_K p_h dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пусть $p_h^*|_K = a_K + b_K x + c_K y \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$ и возьмем $q = x, y$ в первом уравнении (4.1), тогда мы имеем

$$\begin{pmatrix} b_K \\ c_K \end{pmatrix} = \frac{1}{|K|} \int_K (\nu \Delta \mathbf{u}_h - \alpha \mathbf{u}_h + \mathbf{f}) dx,$$

и a_K можно решить с использованием b_K, c_K и второго уравнения из (4.1). Тогда имеем следующий оптимальный результат сходимости.

Теорема 4.1. На основании тех же предположений, что и в теореме 3.1, если $p \in H^2(\Omega)$, то мы имеем

$$\|p - p_h^*\|_0 \leq Ch^2 \left\{ |p|_2 + \left[\nu + M^{1/2}(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h) + (\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)^2 \right] |\mathbf{u}|_3 \right\}.$$

Доказательство. Свойство аппроксимации \mathcal{P}_h и второе уравнение в (4.1) означают, что

$$\begin{aligned} \|p - p_h^*\|_0 &\leq \|(p - p_h^*) - \mathcal{P}_h(p - p_h^*)\|_0 + \|\mathcal{P}_h(p - p_h + p_h - p_h^*)\|_0 \\ &\leq Ch|p - p_h^*|_{1,h} + \|\mathcal{P}_h p - p_h\|_0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Что касается второго члена, с использованием вывода (2.7) (см. приложение А в [9]), теоремы 3.1 и (3.11) имеем

$$\|\mathcal{P}_h p - p_h\|_0 \leq C \sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{a_h} \|\mathbf{w}_h\|_{a_h} + E_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_{1,h}} \leq CM^{1/2}h^2(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)|\mathbf{u}|_3. \quad (4.3)$$

Поэтому достаточно исследовать $|p - p_h^*|_{1,h}$. Пусть \mathcal{P}_h^* — оператор L^2 -проекции на кусочно-разрывное пространство линейных элементов, а именно $\mathcal{P}_h^*|_K = \mathcal{P}_{1,K} \forall K \in \mathcal{T}_h$. Поскольку $(\mathcal{P}_h^* p - p_h^*)|_K \in P_1(K)$, тогда из (1.1), первого уравнения в (4.1) и свойства аппроксимации \mathcal{P}_h^* следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,K}^2 &= (\nabla(\mathcal{P}_h^* p - p), \nabla(\mathcal{P}_h^* p - p_h^*))_K + (\nabla(p - p_h^*), \nabla(\mathcal{P}_h^* p - p_h^*))_K \\ &\leq |\mathcal{P}_h^* p - p|_{1,K} |\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,K} + (\nu \Delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \nabla(\mathcal{P}_h^* p - p_h^*))_K \\ &\leq Ch|p|_{2,K} |\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,K} + (\nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{2,K} + \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,K}) |\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,K}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Согласно обратному неравенству треугольника, имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{2,K} &\leq \inf_{\mathbf{v} \in [P_2(K)]^2} (|\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{2,K} + |\mathbf{v} - \mathbf{u}_h|_{2,K}) \\ &\leq \inf_{\mathbf{v} \in [P_2(K)]^2} (|\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{2,K} + Ch^{-1} |\mathbf{v} - \mathbf{u}_h|_{1,K}) \\ &\leq \inf_{\mathbf{v} \in [P_2(K)]^2} [|\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{2,K} + Ch^{-1} (|\mathbf{v} - \mathbf{u}|_{1,K} + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,K})] \\ &\leq Ch|\mathbf{u}|_{3,K} + Ch^{-1} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,K}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (4.4), получим

$$|\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,K} \leq Ch|p|_{2,K} + C\nu h |\mathbf{u}|_{3,K} + Ch^{-1} \nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,K} + C\alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,K}.$$

Суммируя по всем K и с учетом теоремы 3.1, имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,h} &\leq Ch|p|_2 + C\nu h |\mathbf{u}|_3 + Ch^{-1}(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{a_h} \\ &\leq Ch|p|_2 + C\nu h |\mathbf{u}|_3 + Ch(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)^2 |\mathbf{u}|_3. \end{aligned}$$

Тогда неравенство треугольника дает нам

$$|p - p_h^*|_{1,h} \leq |p - \mathcal{P}_h^* p|_{1,h} + |\mathcal{P}_h^* p - p_h^*|_{1,h} \leq Ch|p|_2 + C\nu h |\mathbf{u}|_3 + Ch(\nu^{1/2} + \alpha^{1/2}h)^2 |\mathbf{u}|_3. \quad (4.5)$$

Следовательно, после подстановки (4.3) и (4.5) в (4.2) теорема доказана. \square

5. Численные примеры

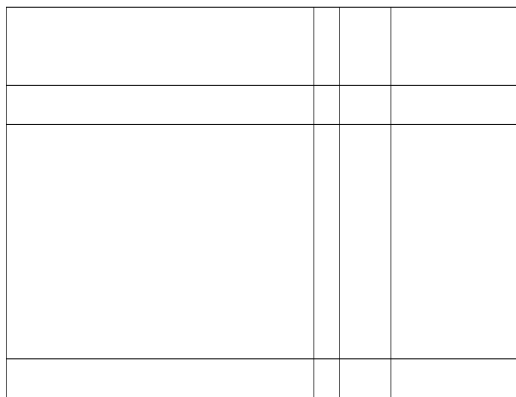
В данном пункте представлены численные примеры. Область решения задается как $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$ и задача Бринкмана (1.1) взята как в первом численном примере в [29], т. е. точное решение имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl} \phi, \quad p = p_0 - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_0 \, d\mathbf{x},$$

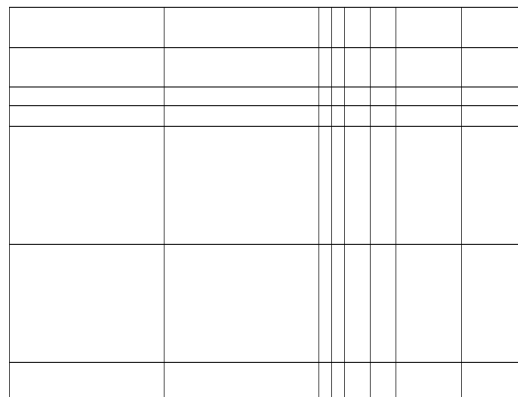
где

$$\phi(x, y) = 2e^{x-2y}x^2(x-2)^2y^2(y-1)^2, \quad p_0(x, y) = (xy-1)\sin(x+2y-1). \quad (5.1)$$

Член \mathbf{f} правой части уравнения (1.1) определяется соответствующим образом. Зафиксируем параметр $\alpha = 1$ в (1.1) и возьмем различные $\nu \in (0, 1]$ для проверки высокой точности $\mathbf{V}_h \times P_h$. Кроме того, также исследуем предельные случаи просто задачи Дарси ($\nu = 0, \alpha = 1$) и просто задачи Стокса ($\nu = 1, \alpha = 0$). Протестируем два различных типа сеток. Для положительного целого числа n первый тип представляет собой равномерное $n \times n$ разбиение Ω , а второй тип также содержит n^2 ячеек, но это неравномерное разбиение, порожденное равномерным делением фиксированной грубой сетки (см. рисунок). При таких установках задача (2.5) эквивалентна линейной системе, а элементы матрицы коэффициентов и член в правой части накапливаются поэлементно по 16-узловому квадратурному правилу Гаусса. Теперь решим (2.5) методом MINRES, поскольку матрица конечных элементов является симметричной, но неопределенной.



неоднородная сетка при $n = 4$; это исходная грубая сетка для создания измельченных неоднородных сеток



неоднородная сетка при $n = 8$

Рис. Неоднородные сетки в наших численных примерах

В таблицах 1 и 2 приведены численные результаты для однородных и неоднородных сеток соответственно. Можно заметить, что для обоих типов сеток порядок сходимости $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{a_h}$ равномерно равен $O(h^2)$, как предсказано в теореме 3.1, что также означает, что этот порядок не зависит от неоднородности сетки. Хотя $\|p - p_h\|_0$ равен только $O(h)$, посредством постобработки (4.1) порядок $\|p - p_h^*\|_0$ был улучшен до $O(h^2)$ равномерно, что согласуется с теоремой 4.1.

Таблица 1. Ошибки решений, полученных путем $V_h \times P_h$ на однородных сетках

оценка ошибки	ν	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	порядок
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{a_h}$	Стокс	8.097E-1	2.197E-1	5.301E-2	1.298E-2	3.223E-3	2.01
	2^{-4}	1.982E-1	5.483E-2	1.325E-2	3.246E-3	8.058E-4	2.01
	2^{-8}	5.034E-2	1.388E-2	3.348E-3	8.144E-4	2.016E-4	2.01
	2^{-12}	2.714E-2	5.264E-3	1.003E-3	2.163E-4	5.126E-5	2.08
	Дарси	2.506E-2	4.252E-2	5.922E-4	7.674E-5	9.702E-6	2.98
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	Стокс	7.205E-2	1.402E-2	3.257E-3	8.042E-4	2.005E-4	2.00
	2^{-4}	5.889E-2	1.134E-2	2.536E-3	6.207E-4	1.544E-4	2.01
	2^{-8}	2.952E-2	5.834E-3	9.428E-4	1.887E-4	4.407E-5	2.10
	2^{-12}	2.511E-2	4.313E-3	6.145E-4	8.054E-5	1.076E-5	2.90
	Дарси	2.506E-2	4.252E-3	5.922E-4	7.674E-5	9.702E-6	2.98
$\ p - p_h\ _0$	Стокс	6.820E-1	2.792E-1	8.618E-2	2.902E-2	1.194E-2	1.28
	2^{-4}	1.737E-1	8.819E-2	4.386E-2	2.187E-2	1.093E-2	1.00
	2^{-8}	1.696E-1	8.678E-2	4.363E-2	2.184E-2	1.092E-2	1.00
	2^{-12}	1.696E-1	8.677E-2	4.363E-2	2.184E-2	1.092E-2	1.00
	Дарси	1.696E-1	8.677E-2	4.363E-2	2.184E-2	1.092E-2	1.00
$\ p - p_h^*\ _0$	Стокс	7.008E-1	2.734E-1	7.511E-2	1.917E-2	4.818E-3	1.99
	2^{-4}	5.365E-2	1.867E-2	5.064E-3	1.289E-3	3.236E-4	1.99
	2^{-8}	3.629E-2	9.244E-3	2.324E-3	5.818E-4	1.455E-4	2.00
	2^{-12}	3.624E-2	9.207E-3	2.311E-3	5.784E-4	1.446E-4	2.00
	Дарси	3.624E-2	9.207E-3	2.311E-3	5.784E-4	1.446E-4	2.00

Таблица 2. Ошибки решений, полученных путем $V_h \times P_h$ на неоднородных сетках

оценка ошибки	ν	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 64$	порядок
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{a_h}$	Стокс	2.559E0	1.287E0	3.498E-1	8.527E-2	2.079E-2	2.04
	2^{-4}	5.541E-1	2.968E-1	8.514E-2	2.094E-2	5.115E-3	2.03
	2^{-8}	1.088E-1	5.246E-2	1.749E-2	4.616E-3	1.141E-3	2.02
	2^{-12}	6.362E-2	1.983E-2	4.005E-3	8.964E-4	2.191E-4	2.03
	Дарси	5.997E-2	1.714E-2	2.764E-3	3.941E-4	5.251E-5	2.91
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	Стокс	4.103E-1	1.444E-1	2.354E-2	4.880E-3	1.168E-3	2.06
	2^{-4}	2.797E-1	1.154E-1	2.061E-2	4.228E-3	1.007E-3	2.07
	2^{-8}	8.191E-2	3.685E-2	9.985E-3	2.078E-3	4.721E-4	2.14
	2^{-12}	6.029E-2	1.776E-2	3.215E-3	6.099E-4	1.222E-4	2.32
	Дарси	5.997E-2	1.714E-2	2.764E-3	3.941E-4	5.251E-5	2.91
$\ p - p_h\ _0$	Стокс	2.355E0	1.125E0	4.075E-1	1.217E-1	3.732E-2	1.71
	2^{-4}	3.500E-1	1.876E-1	9.344E-2	4.591E-2	2.279E-2	1.01
	2^{-8}	3.329E-1	1.776E-1	9.039E-2	4.540E-2	2.272E-2	1.00
	2^{-12}	3.329E-1	1.775E-1	9.039E-2	4.540E-2	2.272E-2	1.00
	Дарси	3.329E-1	1.775E-1	9.039E-2	4.540E-2	2.272E-2	1.00
$\ p - p_h^*\ _0$	Стокс	5.275E0	1.697E0	4.821E-1	1.219E-1	3.045E-2	2.00
	2^{-4}	2.934E-1	1.004E-1	3.008E-2	7.710E-3	1.930E-3	2.00
	2^{-8}	1.273E-1	3.389E-2	8.685E-3	2.188E-3	5.482E-4	2.00
	2^{-12}	1.271E-1	3.368E-2	8.571E-3	2.152E-3	5.387E-4	2.00
	Дарси	1.271E-1	3.368E-2	8.570E-3	2.152E-3	5.386E-4	2.00

Замечание 5.1. Отметим, что для задачи Стокса порядок сходимости $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$ равен снова $O(h^2)$ и никакого улучшения по сравнению с порядком в энергетической норме не наблюдается. Это наследие аналогичного явления для элемента Адина для задач четвертого порядка [10].

Замечание 5.2. Тщательная проверка табл. 1 в данной работе и табл. 4 из [29] показывает, что приведенные и полные элементы Адина–Стокса дают одно и то же реше-

ние по скорости. Это происходит потому, что обе скорости определяются посредством $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}_h = \text{curl } W_h$ и

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h.$$

Поэтому мы дали строгое объяснение высокой точности скорости с использованием полного элемента Адени–Стокса из [29]. Тем не менее приведенная версия дает лучший результат аппроксимации (за счет постобработки) для давления при меньших вычислительных затратах.

Литература

1. **Adini A., Clough R.W.** Analysis of Plate Bending By the Finite Element Method. — University of California, 1960.
2. **Arnold D.N., Falk R.S., Winther R.** Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications // Acta Numerica. — 2006. — Vol. 15. — P. 1–155. — DOI: 10.1017/S0962492906210018.
3. **Boffi D., Brezzi F., Fortin M.** Mixed Finite Element Methods and Applications. — Springer, 2013.
4. **Botti L., Di Pietro D.A., Droniou J.** A hybrid high-order discretisation of the Brinkman problem robust in the Darcy and Stokes limits // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2018. — Vol. 341. — P. 278–310.
5. **Falk R., Neilan M.** Stokes complexes and the construction of stable finite elements with pointwise mass conservation // SIAM J. Numer. Anal. — 2013. — Vol. 51, № 2. — P. 1308–1326.
6. **Fu G., Jin Y., Qiu W.** Parameter-free superconvergent $H(\text{div})$ -conforming HDG methods for the Brinkman equations // IMA J. Numer. Anal. — 2019. — Vol. 39, № 2. — P. 957–982.
7. **Gillette A., Hu K., Zhang S.** Nonstandard finite element de Rham complexes on cubical meshes // BIT Numer. Math. — 2020. — Vol. 60, № 2. — P. 373–409.
8. **Gopalakrishnan J., Demkowicz L.F.** Quasioptimality of some spectral mixed methods // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — Vol. 167, № 1. — P. 163–182.
9. **Guzman J., Neilan M.** A family of nonconforming elements for the Brinkman problem // IMA J. Numer. Anal. — 2012. — Vol. 32. — P. 1484–1508.
10. **Hu J., Shi Z.** A lower bound of the L^2 norm error estimate for the Adini element of the biharmonic equation // SIAM J. Numer. Anal. — 2013. — Vol. 51, № 5. — P. 2651–2659.
11. **Huang X., Wang F.** Analysis of divergence free conforming virtual elements for the Brinkman problem // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2023. — Vol. 33, № 6. — P. 1245–1280. — <https://doi.org/10.1142/S0218202523500306>.
12. **Könnö J., Stenberg R.** $H(\text{div})$ -conforming finite elements for the Brinkman problem // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2011. — Vol. 21. — P. 2227–2248. — DOI: 10.1142/S0218202511005726.
13. **Lascaux P., Lesaint P.** Some nonconforming finite elements for the plate bending problem // RAIRO Numer. Anal. — 1975. — Vol. 9. — P. 9–53.
14. **Luo P., Lin Q.** Accuracy analysis of the Adini element for biharmonic equation // Acta Math. Sin. — 2004. — Vol. 20, № 1. — P. 135–146.
15. **Mao S., Chen S.** Accuracy analysis of Adini's non-conforming plate element on anisotropic meshes // Commun. Numer. Methods Engrg. — 2006. — Vol. 22. — P. 433–440.
16. **Mu L., Wang J., Ye X.** A stable numerical algorithm for the Brinkman equations by weak Galerkin finite element methods // J. Comput. Phys. — 2014. — Vol. 273. — P. 327–342.

17. **Mu L.** A uniformly robust $H(\text{div})$ weak Galerkin finite element methods for Brinkman problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2020. — Vol. 58, № 3. — P. 1422–1439.
18. **Mardal K.A., Tai X., Winther R.** A robust finite element method for Darcy–Stokes flow // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 40. — P. 1605–1631.
19. **Neilan M., Sap D.** Macro Stokes elements on quadrilaterals // Inter. J. Numer. Anal. Model. — 2018. — Vol. 15, № 4-5. — P. 729–745.
20. **Scott L.R., Vogelius M.** Norm estimates for a maximal right inverse of the divergence operator in spaces of piecewise polynomials // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. — 1985. — Vol. 19. — P. 111–143.
21. **Scott L.R., Zhang S.** Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions // Math. Comput. — 1990. — Vol. 54, № 190. — P. 483–493.
22. **Stenberg R.** Postprocessing schemes for some mixed finite elements // Math. Model. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 25. — P. 152–167.
23. **Xie X., Xu J., Xue G.** Uniformly-stable finite element methods for Darcy–Stokes–Brinkman models // J. Comput. Math. — 2008. — Vol. 26. — P. 437–455.
24. **Xu X., Zhang S.** A new divergence-free interpolation operator with applications to the Darcy–Stokes–Brinkman equations // SIAM J. Sci. Comput. — 2010. — Vol. 32. — P. 855–874.
25. **Zhai Q., Zhang R., Mu L.** A new weak Galerkin finite element scheme for the Brinkman model // Commun. Comput. Phys. — 2016. — Vol. 19, № 5. — P. 1409–1434.
26. **Zhang S., Xie X., Chen Y.** Low order nonconforming rectangular finite element methods for Darcy–Stokes problems // J. Comput. Math. — 2009. — Vol. 27. — P. 400–424.
27. **Zhao J., Zhang B., Mao S., Chen S.** The nonconforming virtual element method for the Darcy–Stokes problem // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2020. — Vol. 370. — Article № 113251.
28. **Zhou X., Meng Z., Fan X., Luo Z.** Nonconforming polynomial mixed finite element for the Brinkman problem over quadrilateral meshes // Comput. Math. Appl. — 2018. — Vol. 76, № 4. — P. 877–892.
29. **Zhou X., Meng Z., Fan X., Luo Z.** High accuracy analysis of a nonconforming rectangular finite element method for the Brinkman model // Comput. Appl. Math. — 2022. — Vol. 41. — Article № 288.

Поступила в редакцию 7 сентября 2023 г.

После исправления 28 мая 2024 г.

Принята к печати 26 августа 2024 г.

