

УДК 539.3

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ПОПЕРЕЧНЫЕ СДВИГИ, ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

М. Арефи

Университет Кашана, 87317-51167 Кашан, Иран
E-mail: arefi63@gmail.com

Предложена постановка задачи термоупругости с учетом поперечного сдвига для цилиндрической оболочки из функционально-градиентного материала, находящейся под действием внешнего и внутреннего давлений. С использованием энергетического метода и процедуры осреднения характеристик материала по толщине оболочки построена система дифференциальных уравнений второго порядка, которая может быть использована для решения задач при произвольном законе распределения свойств материала по толщине оболочки. Предложенную теорию можно применять при решении технологической задачи создания материалов или конструкций с заданным законом распределения свойств материала по их объему.

Ключевые слова: деформации поперечного сдвига, термоупругость, оболочка, температура, цилиндр, энергия.

Введение. Функционально-градиентные материалы (ФГМ) были созданы в лаборатории японскими учеными в начале 80-х гг. XX в. Свойства таких материалов непрерывно изменяются по пространственным координатам и описываются с помощью функциональных зависимостей. Выбирая соответствующие зависимости, можно контролировать распределение смещений и напряжений в деформируемых конструкциях. Существуют различные способы изготовления ФГМ. Изготовление таких материалов с заданным распределением свойств по пространственным координатам является очень сложной задачей.

В работе [1] построено точное решение осесимметричной задачи о напряженно-деформированном состоянии толстостенного цилиндра из изотропного материала, находящегося под действием внутреннего и внешнего давлений. Это решение используется при анализе напряженно-деформированного состояния сосудов, находящихся под действием давления. В работе [2] предложена теория оболочек, учитывающая поперечные сдвиги. В [3] с использованием этой теории первого порядка решена задача о деформировании изотропного цилиндра.

В начале 90-х гг. XX в. начались исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из ФГМ. В [4] построено точное решение задачи о деформировании сферического и цилиндрического сосудов из ФГМ, находящихся под действием давления. В [5] в предположении, что в радиальном направлении свойства материала изменяются по степенному закону, получено аналитическое решение задачи термоупругости для ци-

Работа выполнена при финансовой поддержке Университета Кашана (грант № 463865/03).

линдра из ФГМ, находящегося под действием температурных и механических нагрузок. В [5] при формулировке уравнений задачи в уравнениях равновесия используется заранее определенное температурное поле.

В [6] решена задача термоупругости для толстостенного цилиндра, находящегося под действием механических и температурных нагрузок. Цилиндр представлялся в виде набора изотропных цилиндрических слоев, для каждого из которых решалась задача термоупругости. В [7] принимался экспоненциальный закон изменения механических свойств по толщине цилиндра из ФГМ. В работе [8] также решалась задача термоупругости для цилиндра из ФГМ. Сначала использовались двумерные дифференциальные уравнения теплопроводности с различными краевыми условиями. С помощью дифференциальных уравнений равновесия в цилиндрической системе координат и определенного ранее температурного поля задача была сведена к двум уравнениям относительно двух неизвестных компонент вектора перемещения.

При моделировании ФГМ применяется как степенной закон распределения их свойств по пространственным координатам, так и экспоненциальный. Однако методы решения задач с использованием этих двух законов различные. В работе [9–11] при решении термоупругой задачи для цилиндрической оболочки из ФГМ использовался простой степенной закон. Задача сведена к дифференциальному уравнению Коши — Эйлера. Решение этого уравнения получено в виде степенной функции. В работе [7] применялся экспоненциальный закон. Для полученных дифференциальных уравнений не построено аналитическое решение. Задача решалась методом Фробениуса с использованием представления решения в виде рядов. Очевидно, что при использовании различных законов распределения свойств материалов получаются различные дифференциальные уравнения, для решения которых необходимо разрабатывать новые методы.

В данной работе предлагается аналитический метод решения задач термоупругости с учетом поперечных сдвигов для конструкций из ФГМ с произвольным законом распределения свойств материала по толщине оболочки. Коэффициенты полученных дифференциальных уравнений зависят от осредненных по толщине оболочки характеристик материала.

Предложенная постановка задачи может быть использована при решении различных задач как для цилиндров из ФГМ, так и для цилиндров с произвольным распределением свойств материала по их толщине.

Постановка задачи. Приведем решение задачи Ламе о деформировании цилиндрического сосуда под действием внутреннего давления. В этом решении выражение для радиального смещения имеет вид [3]

$$u = c_1 r + c_2 / r, \quad (1)$$

где r — радиальная координата цилиндрической системы координат. Выражение для радиуса произвольной точки трубы r представим в виде [12]

$$r = R + z, \quad (2)$$

где R — радиус срединной поверхности; z — расстояние между срединной поверхностью и рассматриваемой точкой.

Подставляя (2) в решение Ламе (1) и раскладывая выражение для u в ряд Тейлора, получаем

$$u = c_1(R + z) + \frac{c_2}{R + z} = c'_0 + c'_1 z + c'_2 z^2 + c'_3 z^3 + \dots + c'_n z^n. \quad (3)$$

Представление смещения в виде (3) используется при построении теории деформирования с учетом поперечного сдвига (ТДПС). При $n = 1$ получаем ТДПС первого порядка, при $n = 2$ — ТДПС второго порядка, при $n = 3$ — ТДПС третьего порядка.

Для круговой цилиндрической оболочки с учетом (3) осевую u_x и радиальную w_z компоненты смещения можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ w_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_x^0 \\ \varphi_z^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varphi_x^1 \\ \varphi_z^1 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \varphi_x^2 \\ \varphi_z^2 \end{Bmatrix} + \dots + z^n \begin{Bmatrix} \varphi_x^n \\ \varphi_z^n \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $\varphi_x^0, \varphi_z^0, \varphi_x^1, \varphi_z^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_z^n$ — функции, зависящие только от осевой координаты x . С учетом (4) выражения для компонент тензора деформаций записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \varphi_x^2}{\partial x} + \dots + z^n \frac{\partial \varphi_x^n}{\partial x}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_z}{\partial z} = \varphi_z^1 + 2z\varphi_z^2 + 3z^2\varphi_z^3 + \dots + nz^{n-1}\varphi_z^n, \quad \varepsilon_t = \frac{w_z}{r} = \frac{\varphi_z^0 + z\varphi_z^1 + z^2\varphi_z^2 + \dots + z^n\varphi_z^n}{R+z}, \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} = \varphi_x^1 + 2z\varphi_x^2 + \dots + nz^{n-1}\varphi_x^n + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi_z^0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \varphi_z^2}{\partial x} + \dots + z^n \frac{\partial \varphi_z^n}{\partial x} = \\ &= \varphi_x^1 + \frac{\partial \varphi_z^0}{\partial x} + z \left(2\varphi_x^2 + \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} \right) + z^2 \left(3\varphi_x^3 + \frac{\partial \varphi_z^2}{\partial x} \right) + \dots + z^n \left((n+1)\varphi_x^{n+1} + \frac{\partial \varphi_z^n}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_t$ — осевая, радиальная и окружная деформации соответственно; ε_{xz} — деформация поперечного сдвига. Определяющие соотношения записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_t + \sigma_z)}{E} + \alpha T, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_t + \sigma_x)}{E} + \alpha T, \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_t - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} + \alpha T, \quad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \end{aligned} \quad (6)$$

где ν — коэффициент Пуассона. Разрешая соотношения (6) относительно компонент тензора напряжений, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_t + \varepsilon_z)] - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}, \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_t + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_t)] - \frac{\alpha TE}{1-2\nu}, \quad \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вывода функционала задачи используем энергетический метод. С учетом (5), (7) выражение для энергии деформации в единице объема записывается в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_t \varepsilon_t + \tau_{xz} \gamma_{xz}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_t^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_t + \varepsilon_t \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right) - \\ &\quad - \frac{\alpha TE}{2(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_t + \varepsilon_z). \end{aligned}$$

Следовательно, для энергии деформации круговой цилиндрической оболочки радиусом R , толщиной $h(x)$ и длиной l получаем выражение

$$U = \iiint_V \bar{u} dV = \pi \int_0^l \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_t^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2\nu(\varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_t + \varepsilon_t\varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2}\gamma_{xz}^2)(R+z) dz dx - \\
& - \pi \int_0^l \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} \frac{\alpha TE}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_t + \varepsilon_z)(R+z) dz dx = \int_0^l [U_s(x) - U_T(x)] dx, \quad (8)
\end{aligned}$$

где $U_s(x)$ — энергия, соответствующая деформациям, вызванным механическими нагрузками; $U_T(x)$ — энергия, соответствующая температурным деформациям:

$$U_s = \sum_{i=1}^9 A_i(x) f_i(u, w, \varphi_x^1, \varphi_z^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_z^n), \quad U_T = \sum_{i=1}^4 B_i(x) g_i(u, w, \varphi_x^1, \varphi_z^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_z^n).$$

Выражения для коэффициентов $A_i(x)$, $f_i(x)$, $B_i(x)$, $g_i(x)$ вследствие громоздкости не приводятся.

С учетом (5), (8) имеем

$$\begin{aligned}
U_s(x) &= \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} \lambda E(R+z) \left((1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_t^2) + 2\nu(\varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_t + \varepsilon_t\varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2}\gamma_{xz}^2 \right) dz = \\
&= (1-\nu) \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_x^n}{\partial x} \right)^2 z^{2n} + 2z \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} + 2z^2 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x^2}{\partial x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2z^3 \left(\frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x^3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x^2}{\partial x} \right) + \dots + 2z^i \sum_{p=0}^{[i/2]} \frac{\partial \varphi_x^p}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x^{i-p}}{\partial x} \right] \times \right. \\
&\quad \times \left[(\varphi_z^1)^2 + 4z^2(\varphi_z^2)^2 + 16z^4(\varphi_z^3)^2 + \dots + n^2 z^{2n-2}(\varphi_z^n)^2 + 4z\varphi_z^1\varphi_z^2 + 2z^2(3\varphi_z^1\varphi_z^3) + \right. \\
&\quad \left. + 2z^3(4\varphi_z^1\varphi_z^4 + 6\varphi_z^2\varphi_z^3) + \dots + 2z^i \sum_{p=0}^{[i/2]} p(i+2-p)\varphi_z^p\varphi_z^{i+2-p} \right] + \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{R+z} \right)^2 \left[(\varphi_z^0)^2 + z^2(\varphi_z^1)^2 + z^4(\varphi_z^2)^2 + \dots + z^{2n}(\varphi_z^n)^2 + 2z\varphi_z^0\varphi_z^1 + 2z^2\varphi_z^0\varphi_z^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2z^3(\varphi_z^0\varphi_z^3 + \varphi_z^1\varphi_z^2) + \dots + 2z^i \sum_{p=0}^{[i/2]} \varphi_z^p\varphi_z^{i-p} \right] \right\} \times \\
&\times 2\nu \left\{ \left[\varphi_z^1 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + z \left(\varphi_z^1 \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} + 2\varphi_z^2 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \right) + z^2 \left(\varphi_z^1 \frac{\partial \varphi_x^2}{\partial x} + 2\varphi_z^2 \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} + 3\varphi_z^3 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \right) + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots + 2z^i \sum_{p=0}^i \left((i+1-p)\varphi_z^{i+1-p} \frac{\partial \varphi_x^p}{\partial x} \right) + nz^{2n-1} \frac{\partial \varphi_x^n}{\partial x} \varphi_z^n \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R+z} \left[\varphi_z^0 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} + z \left(\varphi_z^0 \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} + \varphi_z^1 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \right) + z^2 \left(\varphi_z^0 \frac{\partial \varphi_x^2}{\partial x} + \varphi_z^1 \frac{\partial \varphi_x^1}{\partial x} + \varphi_z^2 \frac{\partial \varphi_x^0}{\partial x} \right) + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots + 2z^i \sum_{p=0}^i \left(\varphi_z^{i-p} \frac{\partial \varphi_x^p}{\partial x} \right) + z^{2n} \frac{\partial \varphi_x^n}{\partial x} \varphi_z^n \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R+z} \left(\varphi_z^1 \varphi_z^0 + z[(\varphi_z^1)^2 + 2\varphi_z^0 \varphi_z^2] + z^2(\varphi_z^0 \varphi_z^3 + 3\varphi_z^1 \varphi_z^2) + \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots + z^i \sum_{p=0}^i [(i-p+1)\varphi_z^p \varphi_z^{i+1-p}] + nz^{2n-1}(\varphi_z^n)^2 \right) \Big\} + \\
 & + \frac{1-2\nu}{2} \left\{ (\varphi_x^1)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_z^0}{\partial x} \right)^2 + 2\varphi_x^1 \frac{\partial \varphi_z^0}{\partial x} + z \left(2\varphi_x^2 \varphi_x^1 + 2\varphi_x^2 \frac{\partial \varphi_z^0}{\partial x} + \varphi_x^1 \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z^0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} \right) \times \right. \\
 & \times z^2 \left[4(\varphi_x^2)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} \right)^2 + 4\varphi_x^2 \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} \right] + z^3 \left(6\varphi_x^2 \varphi_x^3 + 2\varphi_x^2 \frac{\partial \varphi_z^2}{\partial x} + 3\varphi_x^3 \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z^1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_z^2}{\partial x} \right) + \\
 & \quad + z^4 \left[9(\varphi_x^3)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_z^2}{\partial x} \right)^2 + 6\varphi_x^3 \frac{\partial \varphi_z^2}{\partial x} \right] + \\
 & + z^i \left((p+1)\varphi_x^{p+1} \frac{\partial \varphi_z^{i-p}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z^p}{\partial x} \frac{\partial \varphi_z^{i-p}}{\partial x} + (p+1)(i-p+1)\varphi_x^{i-p+1} \varphi_x^{p+1} + \right. \\
 & \quad \left. + (i-p+1) \frac{\partial \varphi_z^p}{\partial x} \varphi_x^{i-p+1} \right) \Big\} dz,
 \end{aligned}$$

где $\lambda = \pi/[(1+\nu)(1-2\nu)]$.

Выражение для суммы работ внутреннего P_i и внешнего P_o давлений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 W &= 2\pi \int_0^l \left[P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) w \Big|_{z=-h/2} - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) w \Big|_{z=h/2} \right] dx = \int_0^l (C_0 \varphi_z^0 + C_1 \varphi_z^1 + \dots + C_n \varphi_z^n) dx, \\
 C_0 &= 2\pi \left[P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right], \quad C_1 = 2\pi \frac{h}{2} \left[-P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right], \quad (9) \\
 C_2 &= 2\pi \frac{h^2}{4} \left[P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right], \quad C_n = 2\pi \left(\frac{h}{2} \right)^n \left[P_i (-1)^n \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Вариация функционала энергии. Выражение для полной энергии системы можно получить, вычитая выражения (9) из (8):

$$U = \int_0^l (U_s - U_T) dx - \int_0^l W dx = \int_0^l F(\varphi_x^0, \varphi_z^0, \varphi_x^1, \varphi_z^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_z^n, x) dx. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 U_s &= \sum_{i=1}^9 A_i(x) f_i(x), \quad U_T = \sum_{i=1}^4 B_i(x) g_i(x), \quad W = C_0 \varphi_z^0 + C_1 \varphi_z^1 + \dots + C_n \varphi_z^n, \\
 C_1 &= 2\pi \left[P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right], \quad C_2 = 2\pi \frac{h}{2} \left[-P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right], \\
 C_n &= 2\pi \left(\frac{h}{2} \right)^n \left[P_i (-1)^n \left(R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

В выражении (10) содержатся $2n$ величин, где n — порядок теории, учитывающей поперечные сдвиги. Уравнения Эйлера для функционала энергии записываются следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_x^i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi_x^i / \partial x)} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_z^i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi_z^i / \partial x)} \right) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (11)$$

Здесь

$$F(\varphi_x^0, \varphi_z^0, \varphi_x^1, \varphi_z^1, \dots, \varphi_x^n, \varphi_z^n, x) = U_s - U_T - W.$$

Систему (11), являющуюся системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно четырех неизвестных функций, можно записать в матричной форме

$$G_1 \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{X} + G_2 \frac{d}{dx} \mathbf{X} + G_3 \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{X} = [u, \varphi_x, w, \varphi_z]^T,$$

где

$$G_1 = \begin{bmatrix} (1-\nu)A_1 & (1-\nu)A_2 & 0 & 0 \\ (1-\nu)A_2 & (1-\nu)A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu}A_1 & \bar{\nu}A_2 \\ 0 & 0 & \bar{\nu}A_2 & \bar{\nu}A_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\nu} = \frac{1-2\nu}{2},$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu A_4 & \nu(A_6 + A_1) \\ 0 & 0 & -\bar{\nu}A_1 + \nu A_6 & -\bar{\nu}A_2 + \nu(A_2 + A_9) \\ -\nu A_4 & -\nu A_6 + \bar{\nu}A_1 & 0 & 0 \\ -\nu(A_1 + A_6) & -\nu(A_2 + A_9) + \bar{\nu}A_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\nu}A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu)A_5 & -(1-\nu)A_7 - \nu A_4 \\ 0 & 0 & -(1-\nu)A_7 - \nu A_4 & -(1-\nu)(A_8 + A_1) - 2\nu A_6 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \partial B_1(x)/\partial x \\ -(1/2) \partial B_2(x)/\partial x \\ -B_3(x)/2 - \pi [P_i(R - h/2) - P_0(R + h/2)] \\ -(B_1(x) + B_4(x))/2 - (\pi h/2) [-P_i(R - h/2) - P_0(R + h/2)] \end{bmatrix}.$$

Результаты исследования и их обсуждение. Изложенный выше метод можно использовать при решении задачи о деформировании цилиндрического сосуда из функционально-градиентного материала, находящегося под действием внутреннего и внешнего давлений. Ниже при решении задачи используются степенной и экспоненциальный законы изменения механических свойств материала по толщине оболочки [5, 7] и ТДПС первого порядка.

При использовании степенного закона изменения механических свойств материала по толщине оболочки предполагается, что на ее внутренней поверхности свойства материала заданы. Закон изменения механических свойств материала по толщине оболочки задается следующим образом:

$$E(r) = E_{r_i}(r/a)^n$$

(E_{r_i} — модуль упругости материала на внутренней поверхности). На рис. 1,а приведена зависимость радиального смещения от радиальной координаты $u(r)$ при различных значениях показателя степени n . Цилиндр нагружен внутренним давлением, равным 80 МПа. Внутренний и внешний радиусы равны 0,6 и 1,0 соответственно. Из рис. 1,а следует, что с увеличением показателя степени n радиальное смещение уменьшается. Это обусловлено тем, что с увеличением n увеличивается жесткость цилиндра. Важной характеристикой напряженного состояния, которую необходимо учитывать при расчете цилиндра на прочность, является окружное напряжение. Распределение окружного напряжения по толщине оболочки показано на рис. 1,б.

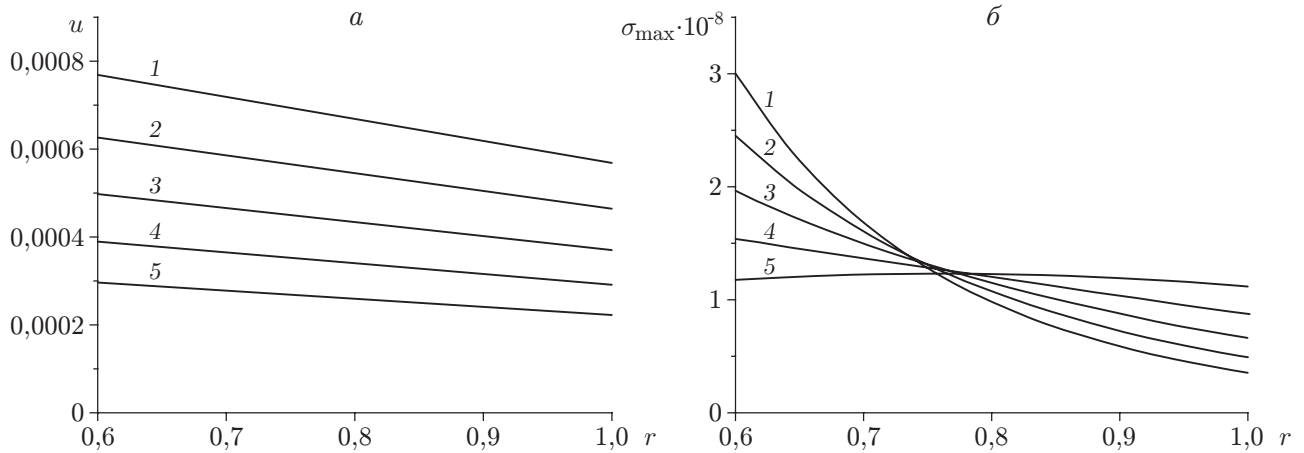


Рис. 1. Распределения окружных смещений (а) и напряжений (б) по толщине цилиндра из функционально-градиентного материала со степенным законом изменения его свойств по толщине цилиндра:
 1 — $n = -2$, 2 — $n = -1$, 3 — $n = 0$, 4 — $n = 1$, 5 — $n = 2$

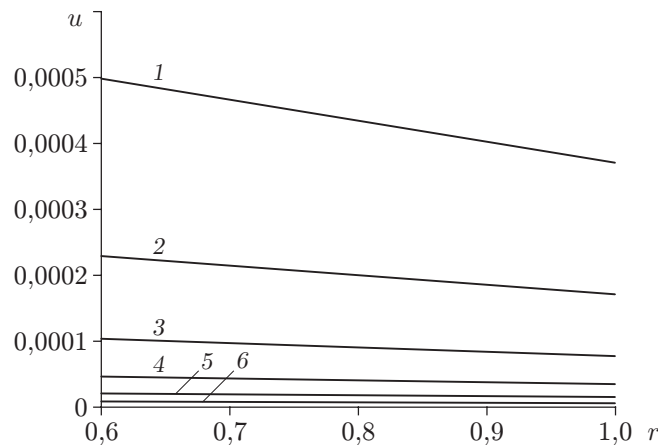


Рис. 2. Распределение радиальных смещений по толщине цилиндра из функционально-градиентного материала с экспоненциальным законом изменения его свойств по толщине цилиндра:
 1 — $n = 0$, 2 — $n = 1$, 3 — $n = 2$, 4 — $n = 3$, 5 — $n = 4$, 6 — $n = 5$

При использовании экспоненциального закона закон изменения механических свойств материала по толщине оболочки задается следующим образом:

$$E(r) = E_0 e^{nr} .$$

На рис. 2 показано распределение радиального смещения по толщине оболочки при различных значениях показателя n . Видно, что с увеличением показателя n радиальное смещение уменьшается. Такая закономерность имеет место при использовании экспоненциального закона изменения свойств материала, поскольку с увеличением показателя n его жесткость увеличивается.

Полученные в данной работе результаты противоречат результатам работы [7]. Из зависимостей, приведенных на рис. 1 в работе [7], следует, что с увеличением показателя экспоненты радиальные смещения увеличиваются. На рис. 3 представлена зависимость $u(r)$, полученная в работе [7] (β — показатель экспоненты в законе распределения свойств материала по толщине оболочки $E(r) = E_0 e^{\beta r}$).

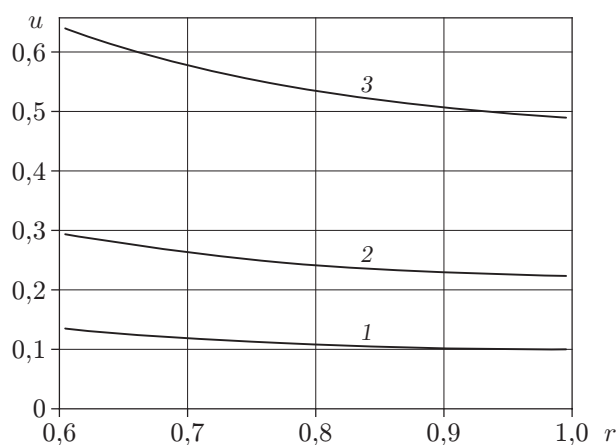


Рис. 3. Распределение радиальных смещений по толщине цилиндра из функционально-градиентного материала с экспоненциальным законом изменения его свойств по толщине цилиндра [7]:

1 — $\beta = 1$, 2 — $\beta = 2$, 3 — $\beta = 3$

Заключение. В работе получены следующие результаты.

Предложена теория, учитывающая поперечные сдвиги и позволяющая решать задачи о термоупругом деформировании цилиндрических сосудов из функционально-градиентных материалов, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений. С использованием предложенной теории можно решать задачи при различных законах распределения свойств материала по толщине оболочки. Полученные ранее дифференциальные уравнения не позволяют адекватно описать деформированное состояние в цилиндрическом сосуде из функционально-градиентного материала при произвольном законе распределения его свойств по толщине оболочки.

Полученная система четырех дифференциальных уравнений второго порядка использована при решении задачи с помощью двух известных законов распределения свойств материала по толщине оболочки.

Из полученного решения следует, что с увеличением показателя экспоненты радиальные смещения уменьшаются. Этот результат противоречит полученному в работе [7] результату.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Timoshenko S. P.** Strength of materials. Pt 2. Advanced theory and problems. N. Y.: Van Nostrand Reinhold Co., 1976.
2. **Naghdi P. M., Cooper R. M.** Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia // J. Acoust. Sci. Amer. 1956. V. 28, N 1. P. 56–63.
3. **Mirsky I., Hermann G.** Axially motions of thick cylindrical shells // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. P. 97–102.
4. **Tutuncu N., Ozturk M.** Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels // Composites. Pt B. Engng. 2001. V. 32. P. 683–686.
5. **Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R.** Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2002. V. 79. P. 493–497.

6. **Shao Z. S.** Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2005. V. 82. P. 155–163.
7. **Tutuncu N.** Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying // Engng Structures. 2007. V. 29. P. 2032–2035.
8. **Jabbari M., Bahtui A., Eslami M. R.** Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2009. V. 86, N 5. P. 296–306.
9. **Arefi M., Rahimi G. H.** Thermo elastic analysis of a functionally graded cylinder under internal pressure using first order shear deformation theory // Sci. Res. Essays. 2010. V. 5, N 12. P. 1442–1454.
10. **Arefi M., Rahimi G. H.** The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped-clamped FG cylinder under mechanical and thermal loads // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 2012. V. 96/97. P. 30–37.
11. **Arefi M., Rahimi G. H.** Comprehensive thermoelastic analysis of a functionally graded cylinder with different boundary conditions under internal pressure using first order shear deformation theory // Mechanika. 2012. V. 18, N 1. P. 5–13.
12. **Ghannad M., Nejad M. Z., Rahimi G. H.** Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory // Mechanika. 2009. V. 79, N 5. P. 13–20.

Поступила в редакцию 6/V 2013 г.
