УДК 532.59
DOI: 10.15372/PMTF202215130

ФАЗОВЫЕ И АМПЛИТУДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов

Федеральный исследовательский центр информационных
и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия
E-mails: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

Исследованы свойства дисперсионных соотношений для двух новых полностью нелинейных слабодисперсионных моделей мелкой воды, для которых при определенных параметрах можно получить четвертый, шестой или восьмой порядок точности аппроксимации фазовой скорости модели трехмерных потенциальных течений. Для иерархии моделей мелкой воды в предположении о слабо изменяющейся форме дна получены формулы, устанавливающие связь между скоростью изменения амплитуды волны и скоростью изменения толщины слоя жидкости, а также выведены зависимости амплитуды и длины набегающей волны от глубины акватории. Показано, что новая модель четвертого порядка длинноволнового приближения с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения обеспечивает наилучшую аппроксимацию рассмотренных характеристик в случае как горизонтального дна, так и дна переменной формы.

Ключевые слова: длинные поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения, дисперсионное соотношение, фазовая скорость, закон Грина

Введение. При решении задач волновой гидродинамики нелинейно-дисперсионные (НЛД) модели играют все бо́льшую роль, что, в частности, обусловлено постоянным совершенствованием их характеристик [1–3], а также развитием вычислительной техники. При моделировании волновых режимов в гаванях и прибрежных областях, где трансформация волн значительна, требуется высокая точность моделей. Хронологически первые НЛД-модели, например SGN-модель (Serre — Green — Naghdi), формально аппроксимируют модель трехмерных потенциальных течений (FNPF-модель [4]) со вторым порядком длинноволновой аппроксимации $O(\mu^2)$ ($\mu = d/\lambda$ — параметр дисперсии; d, λ — характерные значения глубины акватории и длины волны), причем дисперсионные соотношения соответствующих линейных аналогов с такой же точностью $O(\mu^2)$ аппроксимируют дисперсионное соотношение исходной FNPF-модели [5].

Эффективный подход к повышению порядка аппроксимации дисперсионного соотношения, при котором сохраняется $O(\mu^2)$-порядок длинноволновой аппроксимации исходной модели, разработан в [6] для слабонелинейных НЛД-уравнений, к которым добавлялась специальная комбинация пространственных и временны́х производных третьего порядка, обеспечивающая порядок аппроксимации $O(\mu^4)$ дисперсионного соотношения FNPF-мо-

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий.

дели. Другой подход к повышению точности НЛД-моделей состоит в непосредственном повышении порядка длинноволновой аппроксимации, что автоматически обеспечивает более высокую точность соответствующего дисперсионного соотношения. В работе [7] предложена НЛД-модель порядка $O(\mu^4)$ и развит подход, позволяющий аппроксимировать дисперсионное соотношение FNPF-модели с точностью $O(\mu^6)$ и выше.

В работе [4] на основе единого подхода к модификации негидростатической составляющей давления SGN-модели получены две новые модели повышенной точности с четвертым (mSGN) и шестым — восьмым (mSGN4) порядками аппроксимации дисперсионного соотношения FNPF-модели. При этом mSGN-модель, как и SGN-модель, имеет второй порядок длинноволнового приближения, тогда как mSGN4-модель — четвертый. При их выводе, как и в случае SGN-модели, использована осредненная по толщине жидкого слоя горизонтальная компонента скорости в FNPF-модели. В этих моделях учитывается подвижность дна и для них выполняются закон сохранения массы и закон баланса полного импульса, который в случае горизонтального неподвижного дна становится законом сохранения полного импульса. Кроме того, уравнения mSGN- и mSGN4-моделей инвариантны относительно преобразования Галилея и записываются в компактной форме, аналогичной записи уравнений газовой динамики с источниковыми членами. В работе [4] проведен анализ дисперсионных соотношений для случая горизонтального дна в зависимости от параметров моделей и исследованы их фазовые характеристики.

В настоящей работе продолжено описание свойств представленных моделей — исследовано поведение описываемых ими волн при выходе на мелководье. Актуальность исследования обусловлена тем, что при проектировании различных сооружений в прибрежной зоне конструктивными характеристиками набегающих волн являются их амплитуда и длина [8]. Известно, что трансформация длинных волн на отмели обусловлена такими процессами, как рефракция, дифракция, обрушение, рассеяние и др. Эти процессы взаимосвязаны и влияют друг на друга [9], но в упрощенной постановке их можно рассматривать по отдельности. Так, если предположить, что в изучаемой акватории изобаты параллельны прямолинейной береговой линии, и не учитывать трение о дно, то трансформация волн может происходить исключительно вследствие изменений глубины. В литературе такой вид трансформации волн в прибрежной зоне называется shoaling-эффектом (в русскоязычной литературе соответствующий термин отсутствует). Исследованы дисперсионные свойства mSGN- и mSGN4-моделей, получены соотношения, устанавливающие связь между градиентами амплитуды и глубины, а также зависимости амплитуды от глубины и длины волны, приходящей из глубоководной части акватории в мелководную, — аналоги закона Грина для NSWE-модели мелкой воды первого длинноволнового приближения.

1. Нелинейно-дисперсионные уравнения. Рассматривается иерархическая последовательность моделей мелкой воды, в которых в качестве вектора скорости $\boldsymbol{u}$ выбрана осредненная по толщине слоя жидкости горизонтальная составляющая вектора скорости трехмерного течения. В вершине рассматриваемой последовательности находится mSGN4-модель четвертого порядка точности [4], уравнения которой имеют вид

$$H_t + \nabla\cdot(H\boldsymbol{u}) = 0; \tag{1}$$

$$(H\boldsymbol{u})_t + \nabla\cdot\Big[H\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + \int\limits_{-h}^{\eta}(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{U})\,dy\Big] + \nabla p = \check{p}\,\nabla h. \tag{2}$$

Здесь символ “$\otimes$” обозначает тензорное произведение векторов; t — время; $H = \eta + h$ — полная глубина; $\eta = \eta(\boldsymbol{x}, t)$ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня воды; функция $h = h(\boldsymbol{x}, t)$ описывает форму подвижного дна; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{т}}$ — вектор горизонтальных координат в декартовой системе координат Ox_1x_2y с направленной вертикально вверх осью Oy и координатной плоскостью Ox_1x_2, совпадающей с невозмущенной свободной поверхностью; p — давление:

$$p = g\,\frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3}\,(R_1 - \beta_1\nabla\cdot\boldsymbol{I}_1) - \frac{H^2}{2}\,(R_2 - \beta_1\boldsymbol{I}_1\cdot\nabla h) + \int\limits_{-h}^{\eta} P(y)\,dy; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_0 - \Big[\frac{1}{H}\,\nabla\Big(\frac{H^3}{3}\,R_1 + \frac{H^2}{2}\,R_2\Big) - \Big(\frac{H}{2}\,R_1 + R_2\Big)\nabla h\Big], \qquad \boldsymbol{I}_0 = \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + g\nabla\eta,$$
$$R_1 = D(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - (\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2, \qquad R_2 = D^2 h, \tag{4}$$
$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big), \qquad D = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla,$$

g — ускорение свободного падения; $\check{p}$ — давление на дне:

$$\check{p} = gH - \frac{H^2}{2}\,(R_1 - \beta_1\nabla\cdot\boldsymbol{I}_1) - H(R_2 - \beta_1\boldsymbol{I}_1\cdot\nabla h) + P\Big|_{y=-h}; \tag{5}$$

$$P(y) = \int\limits_{y}^{\eta} [DV + \boldsymbol{U}\cdot\nabla V_0 + (V_0V)_\zeta]\,d\zeta; \tag{6}$$

$$V_0 = -D\,h - (y+h)\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}, \qquad V = -\nabla\cdot\int\limits_{-h}^{y}\boldsymbol{U}\,d\zeta.$$

Предположение о потенциальности исходного трехмерного течения позволяет выразить вектор-функцию $\boldsymbol{U}$ в явном виде через $\boldsymbol{u}$, H:

$$\boldsymbol{U} = \Big(\frac{H}{2} - (y+h)\Big)\,\big(\nabla(Dh) + (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\nabla h\big) + \Big(\frac{H^2}{6} - \frac{(y+h)^2}{2}\Big)\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}). \tag{7}$$

В формуле (6) слагаемое DV содержит смешанные производные высокого порядка с однократным дифференцированием скорости по времени. В таких слагаемых производные по времени от вектора скорости должны быть заменены выражением $\boldsymbol{u}_t - \beta_0\boldsymbol{I}_0$. Дисперсионные свойства рассматриваемой двухпараметрической модели зависят от значений параметров β_0 и β_1.

В уравнении (2) наивысший (пятый) порядок производных имеют члены, содержащиеся в выражении ∇p. При этом присутствуют как частные производные пятого порядка только по пространственным переменным, так и смешанные производные пятого порядка, в которых дифференцирование по времени проводится лишь один раз. Уравнения mSGN4-модели инвариантны относительно преобразования Галилея. Это обусловлено тем, что в них содержатся только полные производные по времени (4). Кроме того, выполняется закон сохранения массы, а закон сохранения полного импульса выполняется в случае горизонтального неподвижного дна.

При выводе уравнений (1), (2) использовалось разложение компонент скорости и давления трехмерного течения идеальной жидкости со свободной границей по степеням параметра дисперсии μ и в уравнениях Эйлера удерживались слагаемые до порядка $O(\mu^4)$ включительно, в частности слагаемое (7) четвертого порядка для горизонтальной компоненты скорости трехмерного течения. Поэтому mSGN4-модель имеет четвертый порядок точности. Если удерживать члены только до второго порядка $O(\mu^2)$ включительно, то получается mSGN-модель второго порядка точности, уравнение для полного импульса которой находится из уравнения (2) формальной заменой $\boldsymbol{U} \equiv 0$ (и, как следствие, $P \equiv 0$):

$$(H\boldsymbol{u})_t + \nabla \cdot (H\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \check{p}\,\nabla h \tag{8}$$

и заменой $\boldsymbol{I}_1$ в формулах (3), (5) на $\boldsymbol{I}_0$. Далее в однопараметрической mSGN-модели вместо β_1 используется обозначение β.

Уравнения SGN-модели второго порядка точности и бездисперсионной NSWE-модели мелкой воды имеют тот же вид (1), (8), что и уравнения mSGN-модели. Отличие заключается лишь в том, что в формулах для вычисления давления в SGN-модели полагается $\beta = 0$:

$$p = g\,\frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3}\,R_1 - \frac{H^2}{2}\,R_2, \qquad \check{p} = gH - \frac{H^2}{2}\,R_1 - HR_2,$$

а для NSWE-модели используются следствия гидростатического закона распределения давления:

$$p = gH^2/2, \qquad \check{p} = gH.$$

2. Линейные уравнения в случае слабо изменяющейся формы дна. Представляет интерес исследование поведения волн при их выходе на мелководье. Будем полагать, что волны движутся в направлении к прямолинейной береговой линии перпендикулярно прямолинейным изобатам. Это предположение позволяет рассматривать однонаправленное течение над дном переменной формы $h = h(x)$ $(x \equiv x_1)$. Кроме того, ограничимся изучением линеаризованных уравнений в предположении, что форма дна слабо изменяется в том смысле, что вторые и более высокого порядка производные функции $h(x)$, а также все возможные произведения производных этой функции пренебрежимо малы. При этих условиях уравнение неразрывности имеет одинаковый для всех моделей вид

$$\eta_t + (hu)_x = 0. \tag{9}$$

Линеаризованное уравнение движения mSGN4-модели для одномерного течения записывается следующим образом:

$$u_t + g\eta_x + hh_x r_{2,x} + \frac{h^2}{3}\,r_{2,xx} + \frac{2h_x h^3}{9}\,r_{4,xxx} + \frac{h^4}{45}\,r_{4,xxxx} = 0, \tag{10}$$

где

$$r_2 = (\beta_1 - 1)u_t + \beta_1 g\eta_x, \qquad r_4 = (\beta_0 - 5\beta_1 - 1)u_t + \beta_0 g\eta_x.$$

В случае mSGN-модели в уравнении (10) следует положить $r_4 \equiv 0$, $\beta_1 = \beta$, для SGN-модели — $r_4 \equiv 0$, $\beta = 0$, для NSWE-модели — $r_2 \equiv 0$, $r_4 \equiv 0$.

Далее для линейных моделей используются те же обозначения (FNPF, mSGN4, mSGN и т. д.), что и для нелинейных.

3. Фазовые характеристики. Дисперсионное соотношение для системы линеаризованных уравнений mSGN4-модели (9), (10) в случае горизонтального дна $h(x) \equiv d = \mathrm{const}$ имеет вид

$$\omega = \sqrt{gd}\,k\Big(\frac{1 - \beta_1\xi^2/3 + \beta_0\xi^4/45}{1 + (1-\beta_1)\xi^2/3 + (\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\xi^4/45}\Big)^{1/2}, \tag{11}$$

где ω — волновая частота; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; $\xi = kd = 2\pi\mu$; λ — длина гармонической волны. Это соотношение используется для оценки дисперсионных свойств mSGN4-модели путем сравнения ее фазовой скорости $c_p^{\mathrm{mSGN4}} = \omega/k$ с фазовой скоростью

$$c_p^{\mathrm{FNPF}} = \sqrt{gd}\,\Big(\frac{\operatorname{th}\xi}{\xi}\Big)^{1/2} \tag{12}$$

в FNPF-модели (линия *1* на рис. 1).

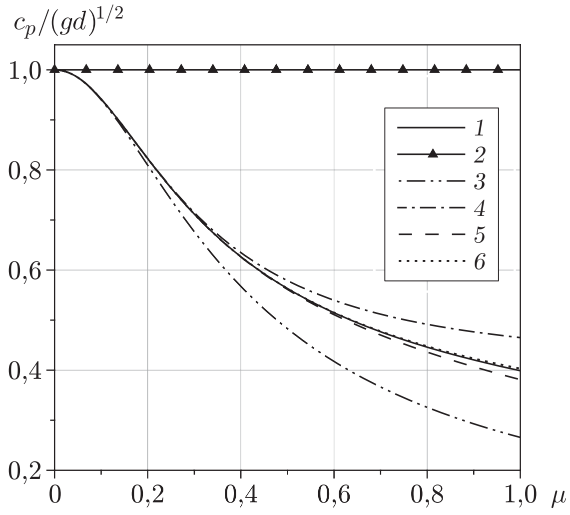

Рис. 1. Зависимость фазовой скорости c_p от параметра дисперсии μ для моделей FNPF (*1*), NSWE (*2*), SGN (*3*), mSGN при $\beta = -0{,}2$ (*4*), mSGN4 при $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ (*5*), mSGN4 при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (*6*)

Фазовая скорость (12) растет при увеличении длины волны (свойство монотонности). Для сохранения этого свойства в приближенной mSGN4-модели достаточно потребовать, чтобы параметры β_0 и β_1 удовлетворяли соотношениям

$$0 \leqslant \beta_0 \leqslant \beta_1(1 + 5\beta_1), \qquad \beta_1 < -1/5. \tag{13}$$

Несмотря на то что уравнения mSGN4-модели аппроксимируют уравнения Эйлера с четвертым порядком точности, дисперсионное соотношение и фазовая скорость в FNPF-модели могут аппроксимироваться в области параметров (13) с большей точностью. Так, при $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$ для квадрата фазовой скорости в mSGN4-модели имеем аппроксимант Паде (2,4):

$$\frac{(c_p^{\mathrm{mSGN4}})^2}{gd} = \frac{1 + 2\xi^2/21}{1 + 3\xi^2/7 + \xi^4/105},$$

приближающий квадрат фазовой скорости (12) с шестым порядком точности, а при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ — аппроксимант Паде (4,4):

$$\frac{(c_p^{\mathrm{mSGN4}})^2}{gd} = \frac{1 + \xi^2/9 + \xi^4/945}{1 + 4\xi^2/9 + \xi^4/63},$$

с которым достигается восьмой порядок точности.

В mSGN-модели второго длинноволнового приближения

$$\omega = \sqrt{gd}\, k\Big(\frac{1 - \beta\xi^2/3}{1 + (1 - \beta)\xi^2/3}\Big)^{1/2}, \tag{14}$$

а свойство монотонности выполняется при $\beta \leqslant 0$. Порядок точности дисперсионного соотношения может быть повышен со второго до четвертого. Например, при $\beta = -0{,}2$ имеем аппроксимант Паде (2,2):

$$\frac{(c_p^{\mathrm{mSGN}})^2}{gd} = \frac{1 + \xi^2/15}{1 + 2\xi^2/5}$$

Таблица 1

Пороговые значения параметра дисперсии μ_*
при различных значениях отклонения фазовой скорости

Модель мелкой воды	μ_*		
	$\Pi = 1$ %	$\Pi = 2$ %	$\Pi = 5$ %
NSWE	0,039	0,055	0,089
SGN	0,174	0,216	0,296
mSGN ($\beta = -0{,}2$)	0,374	0,447	0,606
mSGN4:			
$\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$	0,646	0,777	1,042
$\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$	0,988	1,176	1,548

четвертого порядка точности. Для SGN-модели порядки длинноволнового приближения и точности дисперсионного соотношения (формула (14) при $\beta = 0$) совпадают и равны двум. Фазовая скорость в NSWE-модели $c_p^{\mathrm{NSWE}} = \sqrt{gd}$ не зависит от длины волны.

Для рассмотренных моделей зависимости фазовых скоростей от параметра дисперсии μ представлены на рис. 1. Видно, что зависимость фазовой скорости от параметра μ в mSGN4-модели при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (линия *6* на рис. 1) практически совпадает (визуально неразличима) с зависимостью фазовой скорости от параметра μ в "эталонной" FNPF-модели (линия *1* на рис. 1).

В табл. 1 приведены пороговые (минимальные) значения параметра дисперсии μ_*, при превышении которых относительное отклонение фазовой скорости в моделях мелкой воды от фазовой скорости в FNPF-модели становится больше заданного значения П. По этим данным можно приблизительно определить области применимости моделей мелкой воды. Так, SGN-модель можно применять до значений $\mu \approx 0{,}2$, т. е. для описания волн, длина которых составляет не менее пяти значений глубины, а mSGN4-модель с параметрами $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ — и при $\mu > 1$, т. е. для более коротких волн с длиной, меньшей глубины d. Однако следует отметить, что при выводе нелинейно-дисперсионных моделей использовалось предположение [4] о малости параметра дисперсии μ, поэтому в настоящей работе рассматриваются только значения $\mu \leqslant 1$.

Результаты анализа максимальных отклонений фазовых скоростей в моделях повышенной точности от "эталонной" скорости в FNPF-модели показывают, что для волн, длина которых не меньше глубины ($\lambda \geqslant d$), наилучший результат получается при использовании mSGN4-модели с аппроксимантом Паде (4,4).

3.1. *Фазовая скорость в случае дна переменной формы.* Приведенные выше результаты получены при изучении дисперсионных свойств моделей повышенной точности в предположении, что дно является горизонтальным. Представляет интерес изучение вопроса об адекватности описания трансформации волн в прибрежной зоне с помощью таких моделей. Рассмотрим случай слабо изменяющейся формы дна, над которым распространяются волны в виде гармоник с переменной амплитудой

$$\eta(x,t) = a(x)\,\mathrm{e}^{-i(\omega t - K(x))}, \tag{15}$$

при этом $K_x(x) = k(x)$ и предполагается, что амплитуда $a(x)$ и волновое число $k(x)$, как и форма дна, являются слабо изменяющимися величинами, т. е. их вторые и более высокого порядка производные пренебрежимо малы.

В случае горизонтального дна $K(x) = kx$ и гармоники, соответствующие свободной поверхности и скорости, имеют одну и ту же фазу. В случае дна переменной формы для гармоник возможен небольшой фазовый сдвиг [7], поэтому фазу скорости будем рассматривать в виде $\omega t - K(x) - \psi(x)$, где величина фазового сдвига $\psi(x)$ полагается малой того же порядка, что и h_x, т. е. величинами ψ^2, ψ_x, произведениями вида $a_x\psi$, $v_x\psi$, $h_x\psi$ и аналогичными произведениями, содержащими производные более высоких порядков, можно пренебречь. Предположение о малости $\psi(x)$ позволяет рассматривать скорость в виде

$$u(x,t) = v(x)(1 + i\psi(x))\,\mathrm{e}^{-i(\omega t - K(x))}\,. \tag{16}$$

Далее используется предположение [10, 11] о том, что частота ω гармоник (15), (16) не меняется при движении волн над дном переменной формы:

$$\omega(k(h), h) = \omega(k_0, h_0). \tag{17}$$

Здесь $k(h)$ — не зависящее от времени волновое число на глубине $h < h_0$; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$; λ_0 — заданная длина волны в глубоководной части акватории с известной глубиной h_0. Согласно (17) фазовая скорость гармонической волны определяется по формуле

$$c_p(h) = \frac{\omega(k_0, h_0)}{k(h)}. \tag{18}$$

Заметим, что в инженерных методах расчета трансформации необрушающихся волн в прибрежных водах (см., например, [12]) также используется предположение (17) о постоянстве частоты и период волн на мелководье принимается равным периоду волн в глубоководной зоне.

Подстановка гармоник (15), (16) в уравнения (9), (10) при выполнении условия (17) приводит к дисперсионному соотношению вида (11) с заменой

$$d \to h, \quad k \to k(h), \quad \xi \to k(h)h. \tag{19}$$

Полученное дисперсионное соотношение используется для определения величины $k(h)$, входящей в (18), путем решения уравнения (17), которое в случае mSGN4-модели принимает вид уравнения

$$f(\nu, \bar h) = f(\nu_0, 1) \equiv \zeta_0 \tag{20}$$

относительно переменной $\nu = kh_0$, где

$$f(\nu, \bar h) = \frac{\bar h\nu^2(1 - \beta_1\bar h^2\nu^2/3 + \beta_0\bar h^4\nu^4/45)}{1 + (1-\beta_1)\bar h^2\nu^2/3 + (\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\bar h^4\nu^4/45}, \tag{21}$$

$\nu_0 = 2\pi\mu_0$; $\mu_0 = h_0/\lambda_0$ — дисперсионный параметр набегающей волны; $0 < \bar h \leqslant 1$, $\bar h = h/h_0$. Нетрудно показать, что при выполнении условий (13) справедливо неравенство $\zeta_0 > 0$ и уравнение (20) при каждом $\bar h \in (0, 1]$ имеет один положительный корень $\nu(\bar h)$. Это следует из того, что единственный положительный корень имеет кубическое уравнение относительно переменной z:

$$\frac{\beta_0\bar h^5}{45}\,z^3 - \frac{\bar h^3}{3}\Big(\beta_1 + \frac{\zeta_0}{15}\,(\beta_0 - 5\beta_1 - 1)\bar h\Big)z^2 + \bar h\Big(1 - \frac{\zeta_0}{3}\,(1-\beta_1)\bar h\Big)z - \zeta_0 = 0.$$

На рис. 2 показаны зависимости фазовой скорости от глубины в mSGN4-модели для двух наборов параметров (линии *5*, *6*). Для сравнения приведена зависимость фазовой скорости в “эталонной” FNPF-модели (линия *1*), для которой уравнение (20) принимает вид

$$\nu\,\mathrm{th}\,(\nu\bar h) = \nu_0\,\mathrm{th}\,(\nu_0). \tag{22}$$

При $0 < \bar h \leqslant 1$ левая часть уравнения (22) является монотонно возрастающей функцией переменной $\nu \in [0, \infty)$, поэтому существует единственный корень $\nu(\bar h) > 0$.

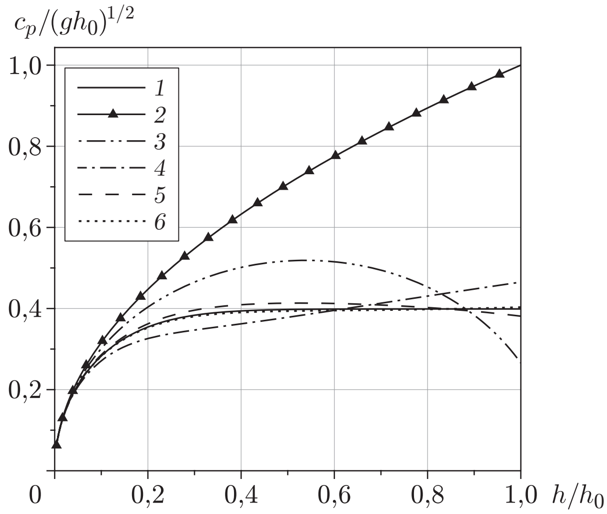

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости c_p от глубины h при $\mu_0 = 1{,}0$ для различных моделей (обозначения те же, что на рис. 1)

Для других моделей мелкой воды зависимости фазовой скорости (18) от глубины получаются аналогичным образом. Так, с учетом (14), (19) для mSGN-модели вместо (21) имеем

$$f(\nu, \bar{h}) = \frac{\bar{h}\nu^2(1 - \beta\bar{h}^2\nu^2/3)}{1 + (1-\beta)\bar{h}^2\nu^2/3}$$

и квадратное относительно переменной ν^2 уравнение

$$\beta\bar{h}^3\nu^4/3 - \bar{h}\nu^2(1 - (1-\beta)\zeta_0\bar{h}/3) + \zeta_0 = 0.$$

Поскольку $\beta < 0$, $\zeta_0 > 0$, корни этого уравнения являются действительными числами с противоположными знаками. Получаем

$$\nu^2(\bar{h}) = \frac{2\zeta_0}{\bar{h}\left(1 - (1-\beta)\zeta_0\bar{h}/3 + \sqrt{(1 - (1-\beta)\zeta_0\bar{h}/3)^2 - 4\beta\zeta_0\bar{h}/3}\,\right)}. \tag{23}$$

Для SGN-модели переменная ν^2 определяется по формуле (23) при $\beta = 0$:

$$\nu^2(\bar{h}) = \frac{\nu_0^2}{\bar{h}[1 + \nu_0^2(1-\bar{h})/3]}, \tag{24}$$

а для NSWE-модели получаем формулу

$$\nu^2(\bar{h}) = \nu_0^2/\bar{h}. \tag{25}$$

На рис. 2 представлена зависимость фазовой скорости от глубины, в случае когда волна длиной λ_0 приходит на мелководье из глубоководной части акватории с заданной глубиной h_0. Видно, что в случае дна переменной формы mSGN4-модели с шестым и восьмым порядками точности дисперсионного соотношения (линии *5, 6* на рис. 2) также имеют существенное преимущество по сравнению с mSGN-, SGN- и NSWE-моделями (соответственно линии *4, 3, 2* на рис. 2).

3.2. *Изменение длины волны при ее выходе на мелководье.* Будем полагать, что гармоническая волна длиной λ_0 на глубине h_0 приходит в мелководную зону и на глубине h ее длина становится равной $\lambda(h)$. Тогда

$$\frac{\lambda(h)}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{k(h)h_0}\,\frac{h_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu(h)}. \tag{26}$$

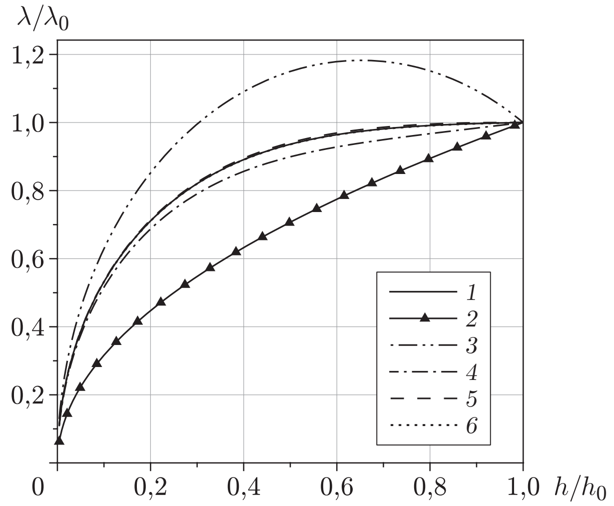

Рис. 3. Зависимость длины волны λ от глубины h при $\mu_0 = 0{,}5$ для различных моделей (обозначения те же, что на рис. 1)

Таким образом, для оценки изменения длины волны при ее выходе на мелководье достаточно вычислить значения $\nu(h)$ (см. подп. 3.1). Поскольку в случае mSGN-, SGN- и NSWE-моделей формулы для $\nu(h)$ получены в явном виде, для этих моделей в явном виде можно записать также формулу (26). Например, в случае SGN-модели с учетом (24) получаем

$$\frac{\lambda(\bar{h})}{\lambda_0} = \sqrt{\bar{h}\Big[1 + \frac{1}{3}\,\nu_0^2(1 - \bar{h})\Big]},$$

где $\bar{h} = h/h_0$. Для NSWE-модели значение ν определяется по формуле (25), поэтому для этой модели получается наиболее простая зависимость длины волны от глубины

$$\frac{\lambda(\bar{h})}{\lambda_0} = \sqrt{\bar{h}}.$$

Зависимость длины волны от глубины для различных моделей представлена на рис. 3 и в табл. 2. На рис. 3 показана зависимость длины волны от глубины, в случае когда волна длиной $\lambda_0 = 2h_0$ выходит на мелководье из глубоководной части акватории с глубиной h_0. В табл. 2 приведены значения отношения λ/λ_0 в мелкой части акватории глубиной $h = 2^{-8}h_0$ при различной длине входящих волн, поэтому параметр дисперсии изменяется в диапазоне $\mu_0 = 0{,}05 \div 1{,}00$. Близость значений этого отношения к “эталонному”, полученному для FNPF-модели, свидетельствует о большой точности приближенных моделей.

Анализируя результаты, приведенные на рис. 3 и в табл. 2, можно сделать следующие выводы. В случае длинных волн ($\mu_0 \leqslant 0{,}2$) все дисперсионные модели показывают высокую точность, а бездисперсионная NSWE-модель значительно отличается от других для всех рассмотренных длин волн. При уменьшении длины набегающих волн ($\mu_0 = 0{,}5$) удовлетворительное приближение к “эталонной” FNPF-модели имеет место для всех дисперсионных моделей, кроме SGN-модели (линия *3* на рис. 3), при этом зависимости, соответствующие моделям mSGN4 с шестым и восьмым порядками точности (линии *5, 6* на рис. 3), визуально не отличаются от зависимости для FNPF-модели (линия *1* на рис. 3). В случае наиболее коротких среди рассмотренных набегающих волн ($\mu_0 = 1$) наилучшее приближение имеет место для mSGN4-модели (см. табл. 2), причем более предпочтительна mSGN4-модель с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения.

Таблица 2

Значения отношения λ/λ_0 при $h = h_0/2^8$ и различных значениях параметра дисперсии μ_0

Модель	λ/λ_0					
	$\mu_0 = 0{,}05$	$\mu_0 = 0{,}10$	$\mu_0 = 0{,}15$	$\mu_0 = 0{,}20$	$\mu_0 = 0{,}50$	$\mu_0 = 1{,}00$
FNPF	0,064	0,066	0,071	0,076	0,111	0,156
NSWE	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063
SGN	0,064	0,066	0,071	0,077	0,129	0,235
mSGN ($\beta = -0{,}2$)	0,064	0,066	0,071	0,076	0,108	0,134
mSGN4:						
$\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$	0,064	0,066	0,071	0,076	0,111	0,163
$\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$	0,064	0,066	0,071	0,076	0,111	0,154

Заметим, что полученные законы изменения длин волн основаны на линейной теории, тогда как в реальных акваториях при выходе волн в протяженные мелководные зоны существенное влияние на изменение длин волн оказывают нелинейные эффекты. Поэтому эти законы могут использоваться лишь для приближенных оценок, тем не менее качественное соответствие имеет место. На рис. 4 приведена зависимость (26) длины волны от глубины для модели mSGN4 при $\mu_0 = 1{,}6^{-3} \approx 0{,}244$ (сплошная линия) и зависимость

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{1/3},$$

полученная в [13] в результате обработки экспериментальных данных (точки). Видно, что существенное отличие от экспериментальных данных наблюдается лишь на малых глубинах. Штриховой линией на рис. 4 показана зависимость

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\operatorname{th}\left(2\pi\mu_0\,\frac{h}{h_0}\right)}\,, \tag{27}$$

которую рекомендуется использовать [12] при оценке нагрузок на гидротехнические сооружения в прибрежной зоне. Видно, что в этом случае соответствие также является приемлемым.

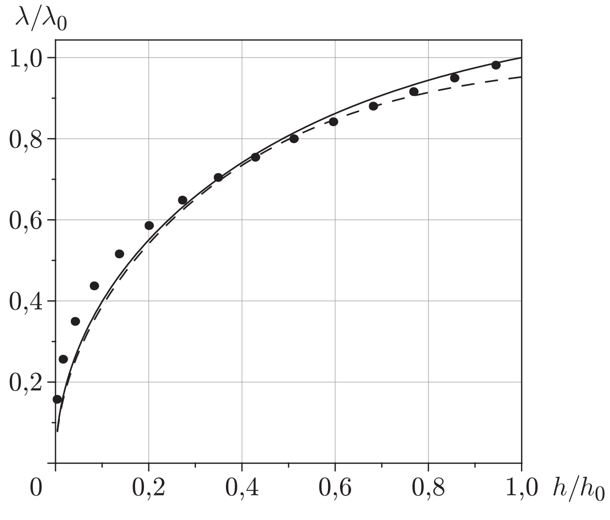

Рис. 4. Зависимость длины волны λ от глубины h:
сплошная линия — расчет по mSGN4-модели при $\mu_0 = 0{,}244$, $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$, точки — эксперимент [13], штриховая линия — расчет по формуле (27)

4. Амплитудные характеристики. При тех же условиях, что и в п. **3**, определим изменение амплитуды гармонической волны, которая с начальной длиной λ_0 приходит на мелководье из глубоководной акватории с глубиной h_0. Основной задачей является вычисление shoaling-коэффициента $K_{sl}(h)$ в соотношении

$$\frac{a_x}{a} = K_{sl}(h)\,\frac{h_x}{h}. \tag{28}$$

Данную зависимость между скоростью изменения амплитуды волны и скоростью изменения глубины можно получить, используя представление гармоник (15), (16). Подставляя эти гармоники в уравнения (9), (10) и исключая из уравнения (10) переменные v, ψ с учетом условия (17), получаем соотношения

$$\gamma_1\,\frac{a_x}{a} + \gamma_2\,\frac{k_x}{k} + \gamma_3\,\frac{h_x}{h} = 0, \qquad \gamma_4\,\frac{k_x}{k} + \gamma_5\,\frac{h_x}{h} = 0,$$

в которых коэффициенты γ_i $(i = 1, \dots, 5)$ зависят от β_0, β_1 и $\xi = kh$. Выражая k через h с помощью уравнения (17), находим соотношение (28).

Формула (28) описывает изменение амплитуды волны при ее движении над дном переменной формы. В бездисперсионной NSWE-модели первого длинноволнового приближения $K_{sl}(h) = -1/4$, т. е. не зависит ни от длины волны, ни от глубины. В "эталонной" FNPF-модели коэффициент $K_{sl}(h)$ (линия *1* на рис. 5) вычисляется по формуле

$$K_{sl}(h) = -2hk(h)\,\frac{\operatorname{sh} 2hk(h) + hk(h)[1 - \operatorname{ch} 2hk(h)]}{[\operatorname{sh} 2hk(h) + 2hk(h)]^2}. \tag{29}$$

Впервые соотношение, связывающее градиенты амплитуды и глубины, получено в работе [6] для слабонелинейных аналогов SGN- и mSGN-моделей. Для дисперсионных моделей повышенной точности, в которых в качестве вектора скорости используется горизонтальная составляющая вектора скорости в FNPF-модели на некоторой поверхности, расположенной между дном и свободной границей, известны явные выражения для коэффициента K_{sl}, рассматриваемого как функция переменной $\xi = kh$ (см., например, [14, 15]). В [14, 15] указаны также интервалы значений параметра ξ, в которых достигается удовлетворительная аппроксимация соответствующего коэффициента "эталонной"

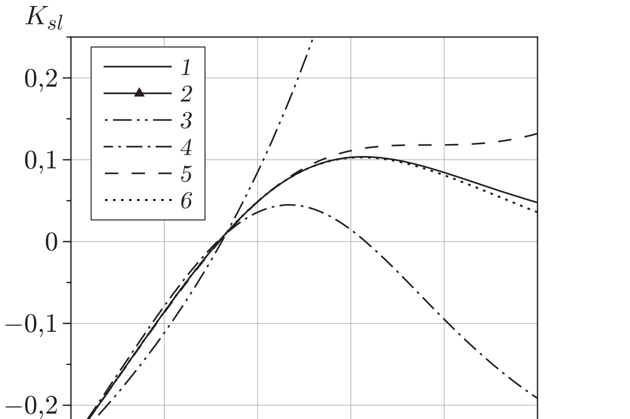

Рис. 5. Зависимость коэффициента K_{sl} от глубины h при $\mu_0 = 0{,}5$ для различных моделей (обозначения те же, что на рис. 1)

FNPF-модели. Для моделей высокого порядка точности, в которых вектор скорости определяется как осредненная по вертикали горизонтальная компонента скорости трехмерного течения, такие результаты отсутствуют. В настоящей работе получены формулы для коэффициента $K_{sl}(\xi)$ для дисперсионных моделей мелкой воды с осредненной скоростью и показано, что в интервале $\xi \in (0, 2\pi)$ существенное отклонение shoaling-коэффициента от "эталонного" наблюдается только для NSWE- и SGN-моделей.

Кроме того, для всей иерархии рассматриваемых дисперсионных моделей мелкой воды с осредненной скоростью выведены формулы, описывающие зависимость коэффициента K_{sl} от глубины h. Наиболее простой вид имеет формула для SGN-модели:

$$K_{sl}(h) = -\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{\nu_0^2}{1 + \nu_0^2(1 - h/h_0)/3}\,\frac{h}{h_0}\Big) \tag{30}$$

($\nu_0 = 2\pi\mu_0$). При малых значениях параметра дисперсии входящей волны ($\mu_0 < 0{,}2$) достаточно точная аппроксимация коэффициента (29) имеет место для всех значений глубины $h \in (0, h_0]$ и всех моделей мелкой воды при наличии дисперсии. Для более коротких волн (см. рис. 5) SGN- и mSGN-модели дают удовлетворительное приближение к формуле (29) только в области "мелкой" воды (при небольших глубинах h), а mSGN4-модель (линии *5* и *6* на рис. 5) — и в области более "глубокой" воды.

Анализ результатов показал, что наилучшее приближение к значению коэффициента (29) "эталонной" FNPF-модели и в наиболее широком диапазоне значений глубины h имеет место для mSGN4-модели с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения.

4.1. *Формула Грина для уравнений мелкой воды с дисперсией.* Одним из направлений теоретических исследований НЛД-моделей является получение имеющих большое практическое значение формул для вычисления коэффициента усиления амплитуды волны, с помощью которых по амплитуде a_0 на глубине h_0 можно определить амплитуду a в точке x мелководной части акватории глубиной $h(x)$. Для бездисперсионных NSWE-уравнений мелкой воды зависимость амплитуды волны от глубины известна как закон Грина [16]

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}}, \qquad 0 < \bar{h} \leqslant 1, \tag{31}$$

где $\bar{a} = a/a_0$; $\bar{h} = h/h_0$, т. е. рост амплитуды волны обратно пропорционален корню четвертой степени глубины. Для "эталонной" FNPF-модели коэффициент усиления амплитуды вычисляется по формуле

$$\bar{a}(\bar{h}) = \Big(\frac{2\nu_0 + \operatorname{sh}(2\nu_0)}{\operatorname{ch}^2(\nu_0)}\,\frac{\operatorname{ch}^2(\nu\bar{h})}{2\nu\bar{h} + \operatorname{sh}(2\nu\bar{h})}\Big)^{1/2}, \qquad 0 < \bar{h} \leqslant 1 \tag{32}$$

(ν — корень уравнения (22)).

Сравнение формул (31) и (32) показывает, что в законе Грина для NSWE-уравнений коэффициент усиления амплитуды зависит только от глубины, тогда как в полной FNPF-модели имеет место зависимость не только от глубины, но и от длины волны, выходящей на мелководье. Таким образом, наличие дисперсии оказывает влияние на рост амплитуды. Поэтому коэффициент усиления амплитуды можно использовать для оценки качества НЛД-моделей путем сравнения с формулой (32).

С использованием предположения о малых градиентах донной поверхности и интегрирования уравнения (28) можно получить зависимости амплитуды от глубины и от длины набегающей волны для всех рассмотренных моделей мелкой воды. Для SGN-модели эта зависимость получена с учетом (30) в виде простой явной формулы

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}}\,\frac{1}{(1 + \nu_0^2(1 - \bar{h})/3)^{3/4}}.$$

Таблица 3

Значения отношения a/a_0 при $h = h_0/2^8$ и различных значениях параметра дисперсии μ_0

Модель	a/a_0					
	$\mu_0 = 0{,}05$	$\mu_0 = 0{,}10$	$\mu_0 = 0{,}15$	$\mu_0 = 0{,}20$	$\mu_0 = 0{,}50$	$\mu_0 = 1{,}00$
FNPF	3,905	3,661	3,351	3,049	2,154	1,798
NSWE	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000	4,000
SGN	3,904	3,647	3,295	2,916	1,345	0,549
mSGN ($\beta = -0{,}2$)	3,905	3,661	3,353	3,057	2,363	2,436
mSGN4:						
$\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$	3,905	3,661	3,351	3,049	2,118	1,505
$\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$	3,905	3,661	3,351	3,049	2,158	1,885

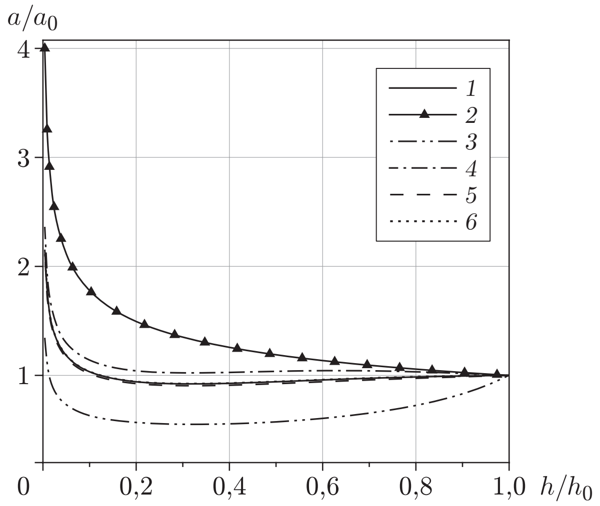

Рис. 6. Зависимость коэффициента усиления $a(\bar{h})/a_0$ от глубины h при $\mu_0 = 0{,}5$ для различных моделей (обозначения те же, что на рис. 1)

В случае mSGN- и mSGN4-моделей формулы для коэффициента усиления амплитуды получаются с помощью численного интегрирования.

С помощью указанных формул вычислены значения амплитуды вблизи берега на глубине $h = 2^{-8}h_0$, в случае когда на глубине h_0 амплитуда волны равна a_0, а ее длина соответствует дисперсионному параметру μ_0. Из результатов расчета, представленных в табл. 3, следует, что закон Грина для NSWE-модели имеет одинаковый вид для волн различной длины. Для остальных моделей, кроме mSGN-модели, амплитуда волны монотонно уменьшается с уменьшением длины входящей волны, причем коэффициент $a(h)/a_0$ находится индивидуально для каждой модели.

На рис. 6 показано изменение амплитуды для каждой модели при фиксированном значении $\mu_0 = 0{,}5$ и различных значениях глубины. Зависимости, соответствующие mSGN4-модели при $\beta_0 = 1/21$, $\beta_1 = -1/3$ (линия *6* на рис. 6) и FNPF-модели (линия *1* на рис. 6), визуально неразличимы, близок к ним результат, полученный с помощью mSGN4-модели при $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -2/7$. Удовлетворительным можно считать прогноз изменения амплитуды, который дает mSGN-модель. NSWE-модель значительно завышает, а SGN-модель уменьшает значение коэффициента усиления амплитуды по сравнению с "эталонным".

Представленные в табл. 3 и на рис. 6, а также другие полученные результаты позволяют сделать вывод, что наилучшее приближение к значению коэффициента усиления амплитуды "эталонной" FNPF-модели и в наиболее широком диапазоне длин λ_0 набегающих волн дает mSGN4-модель с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения.

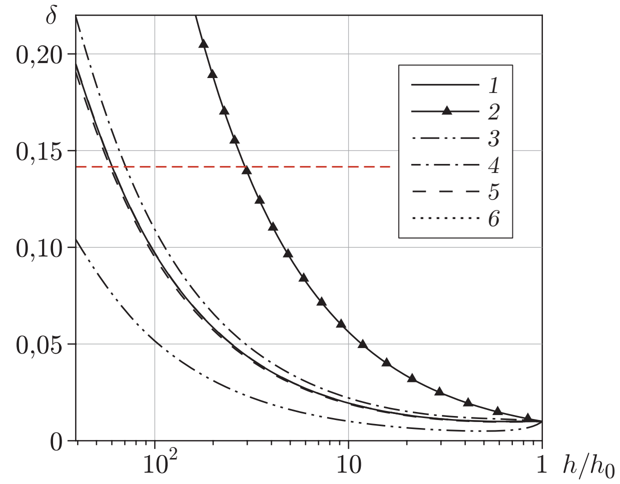

Рис. 7. Зависимость параметра крутизны волны δ от глубины h при $\mu_0 = 0{,}5$, $a_0/h_0 = 0{,}01$ для различных моделей (обозначения те же, что на рис. 1)

4.2. *Изменение крутизны волн на мелководье.* Используя полученные законы трансформации амплитуды и длины волны, исследуем изменение параметра крутизны гармонической волны $\delta(h) = 2a(h)/\lambda(h)$ при ее движении по мелководью. Это представляет интерес, поскольку увеличение крутизны волнового профиля может привести к обрушению волны. В рамках бездисперсионных гиперболических уравнений мелкой воды этот процесс хорошо изучен [16]. Известно также, что "...в рамках теории мелкой воды... наступает обрушение. На практике влияние диссипации и дисперсии может замедлить этот процесс..." [16. С. 182], а значит, волна разрушается на более мелкой воде, чем предсказывают NSWE-уравнения.

На рис. 7 показаны зависимости параметра крутизны от глубины для рассматриваемых в настоящей работе моделей. Горизонтальной линией показана верхняя граница значений параметра крутизны, выше которой начинается развал волны согласно критерию, сформулированному в [17]: для необрушающихся волн необходимо выполнение неравенства $\delta(h) < 1/7$.

Из рис. 7 следует, что при учете дисперсии обрушение происходит в более мелководной зоне, чем при использовании бездисперсионной математической модели [16]. SGN-модель существенно завышает время начала обрушения, т. е. оно происходит на более мелкой воде по сравнению с "эталонной" моделью. Модели повышенной точности достаточно точно предсказывают зону обрушения. Заметим, что в настоящей работе качество моделей оценивается в сравнении с FNPF-моделью, а не с экспериментальными данными. Заметим также, что набегающая волна может не обрушиться на заданной глубине $h < h_0$, если ее начальная амплитуда a_0 достаточно мала, а начальная длина λ_0 достаточно велика, т. е. на глубине h_0 достаточно мала крутизна входящей волны.

Заключение. В работе для иерархии математических моделей мелкой воды в предположении о слабом изменении формы дна получены законы изменения фазовой скорости, амплитуды, длины и крутизны поверхностных волн при их движении из глубоководной части акватории в мелководную. Полученные зависимости амплитуды волны от глубины можно рассматривать как обобщения известного закона Грина в бездисперсионной модели мелкой воды на случай моделей, учитывающих дисперсию волн. Из полученных соотношений для определения параметра крутизны волн следует, что наличие дисперсии задерживает момент обрушения. Сравнительный анализ полученных законов выполнен для дисперсионных моделей второго и четвертого порядков длинноволнового приближения, при выводе которых использована осредненная по толщине жидкого слоя горизонтальная компонента вектора скорости в модели потенциальных течений идеальной жидкости со свободной границей. Показано, что модель четвертого порядка длинноволнового приближения с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения обеспечивает наиболее точную аппроксимацию рассмотренных характеристик в случае как горизонтального дна, так и дна переменной формы.

Показана перспективность прогноза волнообразования в прибрежной зоне даже с использованием упрощенных постановок. Кроме того, можно сделать вывод о преимуществе дисперсионных моделей повышенной точности по сравнению с известными моделями с более низким порядком аппроксимации дисперсионного соотношения для модели потенциальных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляпидевский В. Ю.** Уравнения мелкой воды с дисперсией. Гиперболическая модель // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 40–46.
2. **Favrie N., Gavrilyuk S.** A rapid numerical method for solving Serre — Green — Naghdi equations describing long free surface gravity waves // Nonlinearity. 2017. V. 30, N 7. P. 2718–2736.
3. **Duchene V.** Rigorous justification of the Favrie — Gavrilyuk approximation to the Serre — Green — Naghdi model // Nonlinearity. 2019. V. 30, N 10. P. 3772–3797.
4. **Хакимзянов Г. С., Федотова З. И., Дутых Д.** Плановая модель волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. 2. Четвертый, шестой и восьмой порядки // Вычисл. технологии. 2021. Т. 26, № 3. С. 4–25.
5. **Khakimzyanov G.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods / G. Khakimzyanov, D. Dutykh, Z. Fedotova, O. Gusev. Basel: Birkhäuser, 2020. (Lecture notes in geosystems mathematics and computing).
6. **Madsen P. A., Sørensen O. R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Pt 2. A slowly-varying bathymetry // Coastal Engng. 1992. V. 18. P. 183–204.
7. **Madsen P. A., Schäffer H. A.** Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: Derivation and analysis // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1998. V. 356. P. 3123–3181.
8. **Хабахпашев Г. А.** Дифференциальный метод моделирования слабонелинейных волн на воде переменной глубины // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32, № 6. С. 841–847.
9. **Lalli F., Postacchini M., Brocchini M.** Long waves approaching the coast: Green's law generalization // J. Ocean Engng Marine Energy. 2019. V. 5. P. 385–402.
10. **Маслов В. П.** Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1965.
11. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
12. **РД 52.10.865-2017.** Руководящий документ. Руководство по расчету режимных характеристик морского ветрового волнения. М.: Мин-во природ. ресурсов и экологии РФ, 2018.
13. **Кушнир В. М., Душко В. Р., Крамарь В. А.** Воздействие поверхностных гравитационных волн на прибрежные океанотехнические сооружения // Вост.-Европ. журн. передовых технологий. 2013. Т. 6, № 5. С. 36–41.
14. **Madsen P. A., Bingham H. B., Liu H.** A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water // J. Fluid Mech. 2002. V. 462. P. 1–30.

15. **Filippini A. G., Bellec S., Colin M., Ricchiuto M.** On the nonlinear behavior of Boussinesq type models: amplitude-velocity vs amplitude-flux forms // Coastal Engng. 2015. V. 99. P. 109–123.
16. **Пелиновский Е. Н.** Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 1996.
17. **Лопатухин Л. И.** Ветровое волнение. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2012.

Поступила в редакцию 25/IV 2022 г.,
после доработки — 8/IX 2022 г.
Принята к публикации 26/IX 2022 г.