ПМТФ, № 6, 1969

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

В. В. Соболев, В. С. Сынах

(Новосибирск)

Приведены результаты численного эксперимента по распространению широких аксиально-симметричных волновых пучков в слабо нелинейной среде. Рассмотрены случаи кубической нелинейности и нелинейности с насыщением.

Как известно, распространение достаточно широких аксиально-симметричных волновых пучков в слабо нелинейной среде без поглощения с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 + f(|u|^2)], \qquad f(|u|^2) \ll 1 \tag{1}$$

описывается параболическим уравнением [1,2]

$$2i \frac{\partial u}{\partial z'} = \frac{\partial^2 u}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial u}{\partial r'} + k^2 f(|u|^2) u \qquad \left(k = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0}}{c}\right) \tag{2}$$

Здесь r' — радиальная координата, z' — аксиальная координата, c — скорость света, ω — частота, u — напряженность электрического поля.

В безразмерных переменных $\mathbf{r} = k\mathbf{r}'$ уравнение (1) принимает вид

$$2i \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + f(|u|^2) u \tag{3}$$

Трудности аналитического исследования уравнения (3) приводят к необходимости его численного интегрирования. В данной работе такое интегрирование проведено для среды с кубической нелинейностью

$$f(|u|^2) = \sigma |u|^2 \qquad (\sigma > 0) \tag{4}$$

и для среды с насыщением нелинейности вида

$$f(|u|^2) = \sigma \varkappa^{-1} (1 - \exp(-\varkappa |u|^2)) \qquad (\sigma, \varkappa > 0) \tag{5}$$

Такой выбор (5) обусловлен тем, что при достаточно малых $|u|$ среду (5) можно считать кубической, а при $|u| \gg 1$ параболическое уравнение (3) становится линейным.

В качестве начального условия для уравнения (3) берется гауссовское распределение

$$u(r, 0) = \exp(-r^2 / l^2) \tag{6}$$

где l — характерная ширина начального пучка.

Естественные граничные условия для (3) имеют вид [1,3]

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, z) = 0, \qquad u(\infty, z) = 0 \tag{7}$$

Заметим, что из сходимости интеграла энергии

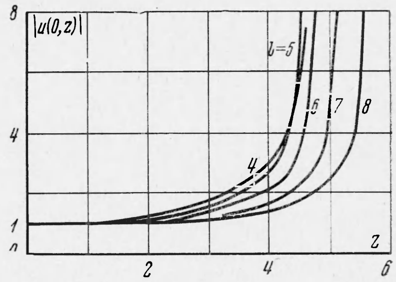
$$P = \int_0^\infty |u|^2 r dr \tag{8}$$

следует, что $|u|$ убывает быстрее, чем r^{-1}.

Для краевого условия на бесконечности воспользуемся аппроксимацией вида

$$\partial u\,(R,\ z)\ /\ \partial r = \alpha\,(R)\ u\ (R,\ z) \tag{9}$$

где R — конечная точка интервала численного интегрирования. Для получения $\alpha\,(R)$ применим метод, развитый в [4] для линейных дифференциальных уравнений. Возможность применения алгоритма [4] в данном случае связана с тем, что нелинейный член $f\,(|\,u\,|^2)\,u$ убывает на бесконечности по крайней мере как r^{-3}. Уравнение (3) аппроксимируется неявной двухслойной конечно-разностной схемой второго порядка по r и первого порядка по z [5]. Полученная система алгебраических уравнений для искомых сеточных функций на различных слоях по z решалась методом прогонки. Счет проводился на ЭВМ БЭСМ-6 в полосе $0 \leqslant r \leqslant R$ и прекращался при достижении наперед заданного значения z. Величина R выбиралась в пределах от $5l$ до $10l$. Практически вычисления по проведенному алгоритму оказались устойчивыми при любых шагах по r и по z.



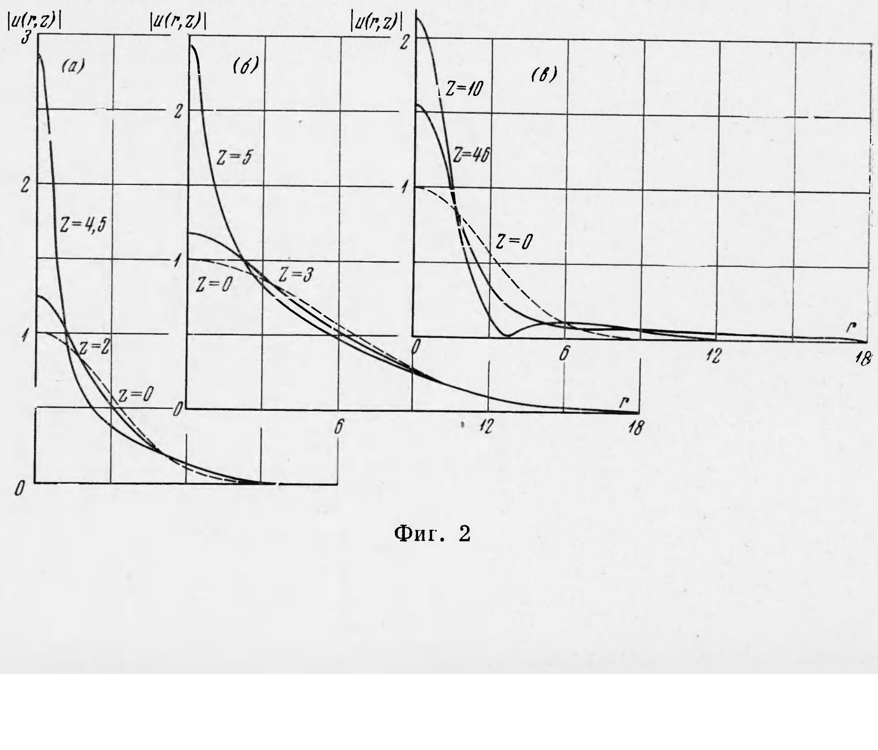
Фиг. 1

Для контроля правильности счета использовалось сохранение интеграла энергии P, который можно представить в виде, удобном для численной реализации

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \int\limits_0^R |\,u\,|^2 r dr, \qquad P_2 = R\,\mathrm{Im} \int\limits_0^z \left(u\ \frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=R} dz \tag{10}$$

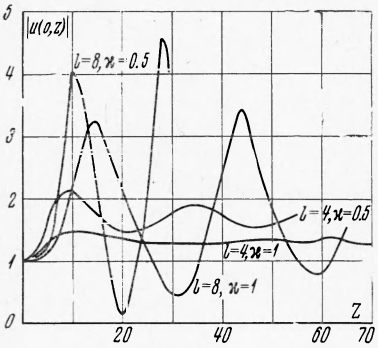
Формулу (10) легко получить, если умножить обе части уравнения (3) на u и применить к мнимой части полученного выражения формулу Грина.



Фиг. 2

В [1,2] указывается, что в кубической среде при мощности пучка P, превышающей некоторую критическую величину P_*, пучок самосжимается (схлопывается) в точку на оси z. Численные расчеты показывают [1], что критической мощности соответствует $l_* \approx 2.73$. При $l > l_*$ интенсивность пучка на оси возрастает. Изменение амплитуды поля на оси пучка при различных $l > l_*$ показано на фиг. 1.

Оказывается, что в схлопнувшейся части пучка сосредоточено приблизительно 20—30% всей энергии светового импульса. Образования побочных максимумов на профиле $|u(r,z)|$ при фиксированном z, на которые указывается в работе [3], не наблюдалось. Характерные профили амплитуды при различных z показаны на фиг. 2, *а* для $l = 4$ и на фиг. 2, *б* для $l = 8$.



Фиг. 3

В среде с насыщением нелинейности при мощности P светового пучка, превышающей критическую P_*, при достаточно больших z схлопывания не происходит. Амплитуда на оси осциллирует и с увеличением z изменяется довольно сложным образом (фиг. 3). Из фиг. 3 видно, что с увеличением l при заданном z максимальное значение амплитуды светового пучка на оси увеличивается. Размах осцилляций $|u(0, z)|$ уменьшается с ростом $\varkappa$ и амплитуда на оси стремится к некоторому стационарному состоянию. На фиг. 2, *в* изображены профили $|u(0, z)|$ для $l = 4$, $\varkappa = 0.5$.

В процессе счета накапливаются ошибки, связанные с погрешностью аппроксимации исходного уравнения (3). Это приводит к тому, что рассчитанный по (11) интеграл энергии слегка меняется. Максимальная глубина прохождения пучка на фиг. 1,3 соответствует «изменению» энергии на 3% по сравнению с начальной.

Приведенные расчеты применимы к интервалам времени после появления светового импульса, меньшим чем время, необходимое для проявления температурных и стрикционных эффектов.

Авторы благодарят В. И. Карпмана за ценные обсуждения и интерес к работе.

Поступила 5 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг В. Н., Таланов В. И., Эрм Р. Э. Самофокусировка аксиально-симметричных волновых пучков. Изв. вузов, Радиофизика, 1967, т. 10, № 5, стр. 674—685.
2. Chiao R. V., Garmire E., Townes C. H. Self-trapping of optical beams. Phys. Rev. Letter, 1964, vol. 13, No. 15, pp. 479—482.
3. Дышко А. Л., Луговой В. Н., Прохоров А. М. Самофокусировка интенсивных световых пучков. Письма ЖЭТФ, 1967, т. 6, вып. 5.
4. Биргер Е. С., Лямикова Н. Б. О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности. Ж. вычислит. матем и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
5. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач, М., Изд-во иностр. лит., 1960.