

УДК 539.3

МИНИМИЗАЦИЯ МАССЫ СФЕРИЧЕСКОГО ЭКРАНА С ЗАДАНЫМ УРОВНЕМ ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ЭНЕРГИИ

В. В. Алехин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача синтеза из конечного набора упругих однородных изотропных материалов слоистого сферического экрана минимального веса, на который падает сферическая волна, при заданных ограничениях на величину волновой энергии, проходящей через экран, и его толщину. Получены необходимые условия оптимальности, приведен пример расчета оптимальной конструкции.

1. Постановка задачи. Задачам оптимального проектирования плоских слоистых конструкций при волновых воздействиях посвящен ряд публикаций [1–3]. Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется набор W , состоящий из k однородных изотропных материалов. Из данного набора требуется синтезировать слоистый сферический экран минимального веса при заданных ограничениях на величину волновой энергии и толщину экрана.

Напряженно-деформированное состояние слоистой среды в сферической системе координат (r, θ, φ) в случае центральной симметрии описывается системой уравнений, включающей уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

и соотношения закона Гука

$$\sigma_{rr} = \rho c_l^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\rho(c_l^2 - 2c_t^2) \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \rho(c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\rho(c_l^2 - c_t^2) \frac{u_r}{r}. \quad (1.2)$$

Здесь $u_r(r, t)$ — радиальное перемещение; $\sigma_{rr}(r, t)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)$ — радиальное и окружное напряжения; $c_l(r)$, $c_t(r)$ — значения параметров среды, которые выражаются через модуль Юнга $E(r)$, коэффициент Пуассона $\nu(r)$ и плотность $\rho(r)$ материалов слоев по формулам

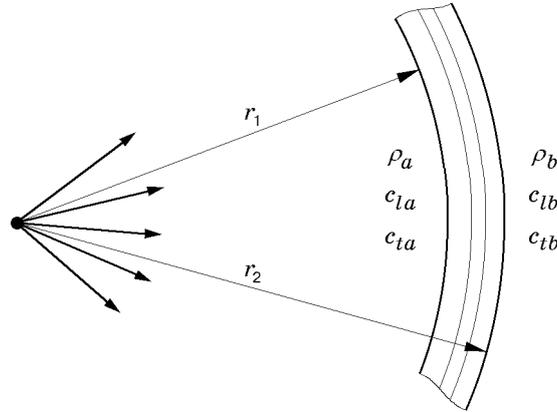
$$c_l^2 = \frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1 + \nu)}.$$

Пусть r_1, r_2 — радиусы внутренней и внешней поверхностей слоистого экрана. На внутреннюю границу r_1 экрана из точечного источника, расположенного в начале координат, падает сферическая волна, содержащая весь частотный спектр (см. рисунок).

Для сред, параметры которых не зависят от времени, можно уменьшить число независимых переменных в уравнении (1.1), перейдя к спектральному представлению по времени [4], и сформулировать исходную задачу в терминах спектральных плотностей радиальной скорости $v_r(r, \omega) = -i\omega u_r(r, \omega)$ и радиального напряжения $\sigma_{rr}(r, \omega)$.

На внешних и внутренних границах $r_i \in [r_1, r_2]$ слоев экрана, где терпят разрыв акустические свойства материалов слоев и окружающей среды, необходимо задавать условия сопряжения (непрерывность скорости $v_r(r, \omega)$ и напряжения $\sigma_{rr}(r, \omega)$)

$$[v_r(r_i, \omega)]|_{-}^{+} = [\sigma_{rr}(r_i, \omega)]|_{-}^{+} = 0. \quad (1.3)$$



Получим граничные условия для системы уравнений (1.1), (1.2). Ее удобно рассматривать не на всей оси r , а только на отрезке $[r_1, r_2]$, занятом слоистым экраном. Влияние окружающих экран областей $r < r_1$ и $r > r_2$ учитывается с помощью граничных условий при $r = r_1$ и $r = r_2$.

Рассмотрим внутреннюю область $r < r_1$, занятую средой с акустическими свойствами ρ_a , c_{la} и c_{ta} . Пусть из источника, расположенного в начале координат, на экран падает монохроматическая сферическая волна, имеющая потенциал

$$\Phi_1 = [b_1(\omega)/r] \exp[i\omega(r/c_{la} - t)].$$

В области $r < r_1$ возникнет отраженная волна с потенциалом

$$\Phi_2 = [b_2(\omega)/r] \exp[-i\omega(r/c_{la} + t)].$$

В этом случае решение системы (1.1), (1.2) на границе $r = r_1$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_r(r_1, \omega) &= b_1(\omega) \left(\frac{i\omega}{r_1^2} + \frac{\omega^2}{r_1 c_{la}} \right) \exp\left(\frac{i\omega r_1}{c_{la}}\right) + b_2(\omega) \left(\frac{i\omega}{r_1^2} - \frac{\omega^2}{r_1 c_{la}} \right) \exp\left(-\frac{i\omega r_1}{c_{la}}\right), \\ \sigma_{rr}(r_1, \omega) &= b_1(\omega) \left[4\rho_a c_{ta}^2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{i\omega}{r_1^2 c_{la}} \right) - \rho_a \frac{\omega^2}{r_1} \right] \exp\left(\frac{i\omega r_1}{c_{la}}\right) + \\ &+ b_2(\omega) \left[4\rho_a c_{ta}^2 \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{i\omega}{r_1^2 c_{la}} \right) - \rho_a \frac{\omega^2}{r_1} \right] \exp\left(-\frac{i\omega r_1}{c_{la}}\right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Амплитуда $b_1(\omega)$ потенциала падающей волны выражается через параметры этой волны. Неизвестную амплитуду $b_2(\omega)$ отраженной волны можно исключить из (1.4). После несложных преобразований получим

$$g_{11}v_r(r_1, \omega) + g_{12}\sigma_{rr}(r_1, \omega) = g_{13}, \quad (1.5)$$

где $g_{11} = \rho_a c_{la} \omega^2 r_1^2 - 4\rho_a c_{ta}^2 (c_{la} + i\omega r_1)$; $g_{12} = i\omega r_1 c_{la} - \omega^2 r_1^2$; $g_{13} = 2b_1(\omega) \rho_a r_1 \omega^4 \exp(i\omega r_1/c_{la})$.

Коэффициенты g_{ij} в (1.5) зависят от свойств среды, занимающей область $r < r_1$, и параметров падающей волны.

Аналогично рассматривается внешняя область $r > r_2$, занятая средой с акустическими свойствами ρ_b , c_{lb} и c_{tb} . В ней распространяется одна прошедшая преломленная волна. Исключая из решения системы (1.1), (1.2) в области $r > r_2$ неизвестную амплитуду потенциала преломленной волны, получаем краевое условие на границе $r = r_2$ в виде

$$g_{21}v_r(r_2, \omega) + g_{22}\sigma_{rr}(r_2, \omega) = 0, \quad (1.6)$$

где $g_{21} = \rho_b c_{tb} \omega^2 r_2^2 - 4\rho_b c_{tb}^2 (c_{tb} - i\omega r_2)$; $g_{22} = i\omega r_2 c_{tb} + \omega^2 r_2^2$.

Таким образом, параметры волнового процесса, т. е. распределение скоростей и напряжений в слоистом экране, занимающем область $[r_1, r_2]$, в случае падения сферической волны находятся из решения краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6).

Сделаем замену координат

$$r = r_1 + x(r_2 - r_1), \quad x \in [0, 1], \quad (1.7)$$

переводящую область задания $[r_1, r_2]$ в отрезок $[0, 1]$. Введем кусочно-постоянную функцию

$$\alpha(x) = \{\alpha_j: x \in [x_j, x_{j+1}), j = 1, \dots, n\}, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1, \quad (1.8)$$

характеризующую структуру слоистого экрана: количество, размеры и материалы составляющих его слоев. Значения α_j принадлежат дискретному конечному множеству

$$U = \{1, 2, \dots, k\}, \quad (1.9)$$

соответствующему заданному набору материалов W . Теперь все характеристики материалов из множества W будут функциями распределения $\alpha(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Так как структура слоистого экрана определяется функцией $\alpha(x)$, а толщина — его размерами r_1 и r_2 , в качестве управления рассмотрим пару $\{\alpha(x), r_2\}$ (не нарушая общности, внутренний радиус r_1 можно считать фиксированным), где $\alpha(x) \in U$ (1.9) и

$$0 < r_1 < a \leq r_2 \leq b \quad (1.10)$$

(a, b — заданные пределы, в которых может варьироваться внешний радиус r_2).

Задача оптимального проектирования сферического экрана заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций $\alpha(x)$ с областью значений U и параметров r_2 из отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству (1.10), требуется найти управление $\{\alpha(x), r_2\}$, доставляющее минимум функционалу веса

$$F_0(\alpha, r_2) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho(\alpha) r^2 dr = \int_0^1 G(\alpha, r_2, x) dx \quad (1.11)$$

при заданном ограничении на величину волновой энергии

$$F_1(\alpha, r_2, v_r, \sigma_{rr}) = J(\alpha, r_2, v_r, \sigma_{rr}) - \eta J_0 \leq 0. \quad (1.12)$$

Здесь $J(\alpha, r_2, v_r, \sigma_{rr})$ — среднее за период по времени значение потока волновой энергии, переносимой сферической волной через поверхность $r = r_2$ в направлении оси r ; J_0 — среднее значение потока энергии в падающей волне; η — энергетический коэффициент прозрачности экрана [4], т. е. доля потока энергии в падающей волне, которая может пройти в область $r > r_2$.

Используя выражение для потока энергии [5], функционал $J(\alpha, r_2, v_r, \sigma_{rr})$ с учетом (1.6) можно записать в виде

$$J(\alpha, r_2, v_r, \sigma_{rr}) = -2\pi r_2^2 \int_0^\infty \operatorname{Re}(\bar{v}_r(r_2, \omega) \sigma_{rr}(r_2, \omega)) d\omega = 2\pi r_2^2 \int_0^\infty |\sigma_{rr}(r_2, \omega)|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{g_{22}}{g_{21}}\right) d\omega$$

(черта над функцией означает комплексное сопряжение). Соответствующее выражение для потока энергии J_0 в падающей волне примет вид

$$J_0 = -2\pi r_1^2 \int_0^\infty \operatorname{Re}(\bar{v}_r(r_1, \omega) \sigma_{rr}(r_1, \omega)) d\omega = \frac{2\pi \rho_a}{c_{1a}} \int_0^\infty \omega^4 |b_1(\omega)|^2 d\omega,$$

где $b_1(\omega)$ — амплитуда потенциала падающей сферической волны.

2. Необходимые условия оптимальности. Для вывода необходимых условий оптимальности в задаче (1.1)–(1.12) требуется построить выражения для вариаций целевого функционала (1.11) и ограничения (1.12) через вариации управления $\{\alpha(x), r_2\}$. С этой целью преобразуем краевую задачу (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6).

Условия сопряжения (1.3) и замена (1.7) позволяют ввести непрерывные на отрезке $[0, 1]$ фазовые переменные

$$\mathbf{Y}(x, \omega) = (y_1, y_2)^T = (v_r, \sigma_{rr})^T$$

(индекс t означает транспонирование вектора или матрицы).

В новых переменных управляемая система (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) запишется в виде

$$\mathbf{Y}'(x, \omega) = A(\alpha, r_2, x, \omega)\mathbf{Y}(x, \omega), \quad (2.1)$$

$$g_{11}y_1(0, \omega) + g_{12}y_2(0, \omega) = g_{13}, \quad g_{21}y_1(1, \omega) + g_{22}y_2(1, \omega) = 0,$$

где штрих означает производную по координате x ; коэффициенты g_{ij} даются соотношениями (1.5), (1.6); компоненты матрицы A имеют вид

$$a_{11} = \frac{1}{r} \left(4 \frac{c_t^2}{c_l^2} - 2 \right) (r_2 - r_1), \quad a_{12} = -\frac{i\omega}{\rho c_l^2} (r_2 - r_1),$$

$$a_{21} = i\rho \left[\frac{4c_t^2}{\omega r^2} \left(3 - 4 \frac{c_t^2}{c_l^2} \right) - \omega \right] (r_2 - r_1), \quad a_{22} = -\frac{4c_t^2}{rc_l^2} (r_2 - r_1).$$

Пусть $\{\alpha(x), r_2\}$ — оптимальное управление из допустимого множества (1.9), (1.10), минимизирующее функционал (1.11) и удовлетворяющее ограничению (1.12). Рассмотрим возмущенное управление $\{\alpha^*(x), r_2 + \delta r_2\}$ [6]:

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} v(x), & x \in D, \quad v(x) \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D, \quad \text{mes}(D) < \varepsilon, \end{cases} \quad r_2 + \delta r_2 \in [a, b], \quad |\delta r_2| < \varepsilon \quad (2.2)$$

($D \subset [0, 1]$ — множество малой меры, $\varepsilon > 0$ — малая величина). Вариация (2.2) управления $\{\alpha(x), r_2\}$ порождает вариации δF_0 и δF_1 функционалов (1.11), (1.12) (для краткости аргументы функций, относящиеся к невозмущенному управлению $\{\alpha(x), r_2\}$, опущены):

$$\delta F_0 = \int_D (G(\alpha^*, \dots) - G(\alpha, \dots)) dx + S_0 \delta r_2; \quad (2.3)$$

$$\delta F_1 = \delta J = \int_D \left[\int_0^\infty \text{Re} (M(\alpha^*, \dots) - M(\alpha, \dots)) d\omega \right] dx + S_1 \delta r_2. \quad (2.4)$$

Здесь $M(\alpha, r_2, x, \omega, \mathbf{Y}, \Psi) = \Psi^T(x, \omega) A(\alpha, r_2, x, \omega) \mathbf{Y}(x, \omega)$,

$$S_0 = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_2} G(\alpha, r_2, x) dx,$$

$$S_1 = \int_0^\infty \left\{ \int_0^1 \text{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r_2} M(\alpha, r_2, x, \omega, \mathbf{Y}, \Psi) \right) dx + \right. \\ \left. + 2\pi |y_2(1, \omega)|^2 \text{Re} \left(\frac{\partial}{\partial r_2} \left(r_2^2 \frac{g_{22}}{g_{21}} \right) \right) + \text{Re} \left(\psi_1(1, \omega) y_2(1, \omega) \frac{\partial}{\partial r_2} \left(\frac{g_{22}}{g_{21}} \right) \right) \right\} d\omega.$$

Вектор сопряженных переменных $\Psi(x, \omega) = (\psi_1, \psi_2)^T$ при каждом фиксированном ω находится из решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \Psi'(x, \omega) &= -A^T(\alpha, r_2, x, \omega)\Psi(x, \omega), & g_{12}\psi_1(0, \omega) - g_{11}\psi_2(0, \omega) &= 0, \\ g_{22}\psi_1(1, \omega) - g_{21}\psi_2(1, \omega) &= -4\pi r_2^2 g_{21} \bar{y}_2(1, \omega) \operatorname{Re}(g_{22}/g_{21}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Составим расширенный функционал

$$Q(\alpha, r_2) = F_0(\alpha, r_2) + \lambda_1 \{F_1(\alpha, r_2, \mathbf{Y}) + \xi_1^2\} + \lambda_2 \{a - r_2 + \xi_2^2\} + \lambda_3 \{r_2 - b + \xi_3^2\} \quad (2.6)$$

(λ_i и ξ_i — множители Лагранжа и штрафные переменные). Вариацию функционала (2.6) с использованием выражений (2.3), (2.4) можно представить в виде

$$\delta Q = \int_D \{H(\alpha, \dots) - H(\alpha^*, \dots)\} dx + \{S_0 + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3\} \delta r_2 + 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i \lambda_i \delta \xi_i, \quad (2.7)$$

где

$$H(\alpha, r_2, x, \mathbf{Y}, \Psi) = -G(\alpha, r_2, x) - \lambda_1 \int_0^\infty \operatorname{Re}(M(\alpha, r_2, x, \omega, \mathbf{Y}, \Psi)) d\omega. \quad (2.8)$$

Так как управление $\{\alpha(x), r_2\}$ является оптимальным (минимизирующим), то для любых допустимых управлений $\{\alpha^*(x), r_2 + \delta r_2\}$ (2.2) должно выполняться условие $\delta Q \geq 0$. Тогда из выражения (2.7) в силу произвольности вариаций $\delta r_2, \delta \xi_i$ имеем

$$S_0 + \lambda_1 S_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \quad (2.9)$$

$$\lambda_1 F_1(\alpha, r_2, \mathbf{Y}) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0; \quad (2.10)$$

$$\lambda_2 (a - r_2) = 0, \quad \lambda_3 (r_2 - b) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0. \quad (2.11)$$

Поскольку множество малой меры D может быть почти всюду плотно расположено на отрезке $[0, 1]$, для почти всех $x \in [0, 1]$ должно выполняться условие максимума для функции Гамильтона H (2.8) по аргументу α [6]

$$H(\alpha, r_2, x, \mathbf{Y}, \Psi) = \max_{\alpha^*(x) \in U} H(\alpha^*, r_2, x, \mathbf{Y}, \Psi). \quad (2.12)$$

Таким образом, получаем, что оптимальное управление $\{\alpha(x), r_2\}$ и соответствующие ему оптимальная траектория $\mathbf{Y}(x, \omega)$ и вектор сопряженных переменных $\Psi(x, \omega)$ должны удовлетворять краевым задачам (2.1), (2.5), соотношениям (1.9), (1.10), (1.12), (2.10), (2.11) и условиям оптимальности (2.9), (2.12).

На основе полученных необходимых условий оптимальности строится вычислительный алгоритм [7] синтеза сферического экрана.

3. Пример расчета. Множество W состоит из девяти материалов, акустические свойства которых приведены в таблице.

На экран падает монохроматическая сферическая волна с частотой $f = 10$ кГц ($\omega = 2\pi f$). Области $r < r_1$ и $r > r_2$ занимает воздух: $\rho_a = \rho_b = 1,29$ кг/м³, $c_{la} = c_{lb} = 331$ м/с, $c_{ta} = c_{tb} = 0$. Внутренний радиус r_1 экрана считается фиксированным и равным 1 м, внешний радиус r_2 может изменяться в пределах $1,014 \div 1,015$ м. Коэффициент прозрачности экрана $\eta = 10^{-8}$. Экран разбивается по толщине на 50 равных частей, моделирующих множества малой меры, на которых варьируется управление.

Расчеты проводились с различными начальными приближениями, которые выбирались на основании численных экспериментов. В результате получен трехслойный экран

Материал	ρ , кг/м ³	c_l , м/с	c_t , м/с
Сферопластик	650	2278	1279
Дюралюминий	2800	6129	3087
Титан	4600	6110	3143
Сталь	7800	6020	3218
Медь	8930	4394	2163
Свинец	11 340	1956	727
Каучук	930	72	17
Олово	7290	3188	1606
Стекло	2400	5292	3055

с внешним радиусом $r_2 = 1,014687$ м, массой $F^* = 1762,938$ кг и слоями толщиной $1 \div 1,001175$ и $1,012925 \div 1,014687$ м из свинца, $1,001175 \div 1,012925$ м из меди.

Самым легким однородным экраном, удовлетворяющим ограничениям (1.10), (1.12), является экран из свинца с внешним радиусом $r_2 = 1,014$ м и массой $F_* = 2023,098$ кг.

Относительный выигрыш по массе для оптимального экрана по сравнению с данным однородным экраном составил $(1 - F^*/F_*) \cdot 100\% = 12,9\%$.

Как следует из примера, в оптимальную конструкцию входят материалы, имеющие наибольшую плотность. Поэтому выигрыш в массе может быть невелик. Если же в качестве целевого функционала (1.13) взять не массу, а стоимость материалов, составляющих экран, то оптимальное изделие может состоять и из других материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабе Г. Д., Гусев Е. Л.** Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.
2. **Гусев Е. Л.** Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
3. **Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
4. **Бреховских Л. М., Годин О. А.** Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
5. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
6. **Федоренко Р. П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
7. **Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988.

*Поступила в редакцию 21/X 1999 г.,
в окончательном варианте — 18/IV 2000 г.*