

УДК 532.516

АВТОМОДЕЛЬНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

О. А. Фроловская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: oksana@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в окрестности критической точки. Построены автомодельные решения, описывающие плоское и осесимметричное течения.

Ключевые слова: нестационарность, автомодельность, критическая точка.

DOI: 10.15372/PMTF20160301

Введение. Известно, что на обтекаемой поверхности всегда найдется хотя бы одна точка, в которой компоненты скорости принимают нулевое значение. Такая точка называется критической. Исследованию задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости вблизи критической точки, т. е. задачи о течении вблизи стенки, расположенной перпендикулярно его направлению, посвящено большое количество работ. Классические результаты решения этой задачи приведены в [1]. В [2] построены стационарные автомодельные решения уравнений Навье — Стокса, описывающие течение вязкой жидкости в слое между вращающейся твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью. Аналитическое решение нестационарного осесимметричного течения вблизи критической точки в режиме течения к пористой стенке в случае вдува или отсоса построено в [3]. В [4] исследовано нестационарное автомодельное решение, описывающее плоское течение в режиме течения к критической точке. В [5] построено асимптотическое решение при больших временах в предположении, что вязкими членами можно пренебречь. Однако в [6] было показано, что вязкими силами нельзя пренебрегать, поэтому в асимптотическое решение были добавлены члены более высокого порядка. В [7] рассмотрены примеры неавтомодельных решений, описывающих нестационарные течения вязкой жидкости вблизи критической точки на твердой прямолинейной границе, и представлены сценарии разрушения решения начально-краевой задачи за конечное время. Примеры автомодельных нестационарных течений вязкой жидкости вблизи движущейся плоской проницаемой пластины и вблизи вращающегося диска приведены в [8].

Данная работа посвящена построению автомодельных решений нестационарных уравнений Навье — Стокса, описывающих течение вязкой жидкости вблизи критической точки. Рассмотрены режимы течения жидкости из бесконечности к критической точке и течения жидкости от критической точки в случае плоской границы и в осесимметричном случае.

Плоское течение. В случае плоского течения жидкость натекает из бесконечности на стенку, расположенную поперек течения, и далее течет вдоль нее в противоположных направлениях, удаляясь от критической точки. Обозначим через u , v проекции вектора скорости на оси x , y декартовой системы координат. При этом ось x совмещена со стенкой, ось y направлена перпендикулярно стенке, начало координат расположено в критической точке. В этом случае уравнения Навье — Стокса допускают точное решение вида

$$u = xq(y, t), \quad v = - \int_0^y q(s, t) ds, \quad p = -\frac{1}{2} \rho x^2 a(t) + Q(y, t),$$

где $a(t)$ — заданная функция времени. Для определения $q(y, t)$ ставится начально-краевая задача

$$q_t + q^2 - q_y \int_0^y q(s, t) ds - a(t) = \nu q_{yy}, \quad y > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$q(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad q \rightarrow f(t), \quad y \rightarrow \infty, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$q(y, 0) = q_0(y), \quad y > 0. \quad (3)$$

Здесь $f(t)$ — решение уравнения Риккати

$$\frac{df}{dt} + f^2 - a(t) = 0, \quad f(0) = f_0 = \lim_{y \rightarrow \infty} q_0(y), \quad (4)$$

описывающего движение идеальной жидкости. В режиме течения от критической точки вдоль твердой стенки ($y = 0$) $f_0 > 0$. Если в этом случае в выражении для градиента давления $p_x = -\rho x a(t)$ $a > 0$ при $t > 0$, то решение задачи Коши для уравнения (4) существует при всех $t > 0$. Если $a < 0$, то решение задачи Коши может разрушиться за конечное время даже при условии $f_0 < 0$, что соответствует течению жидкости к критической точке вдоль стенки в момент $t = 0$ [7].

В случае если функция q не зависит от t , имеет место классическая стационарная задача. Известно, что стационарное решение возможно лишь в режиме течения жидкости от критической точки. В противном случае градиент давления на плоскости больше нуля, что является причиной отсутствия аналога решения Хименца. Однако и в этом случае можно построить решения задачи, если рассматривать нестационарную задачу, но задать градиент давления, убывающий со временем. Нестационарная задача (1)–(4) рассмотрена в работе [9], в которой показано, что если градиент давления является периодической функцией времени, то возможны как периодический режим движения, так и разрушение решения за конечное время. Если в начальных данных нестационарной задачи имеется зона противотока и градиент давления на твердой плоскости отрицателен, то такие зоны исчезают за конечное время.

С помощью подходящего аффинного преобразования можно исключить постоянный множитель ν из уравнения (1). Поэтому без ограничения общности полагаем $\nu = 1$.

Анализ размерности величин, входящих в уравнения (1)–(4), позволяет установить, что существует автомодельная переменная $\xi = y/\sqrt{t}$ и система уравнений задачи допускает автомодельное представление решения.

Задача (1)–(4) решена численно методом установления. На рис. 1,а представлены результаты расчета для функции $a(t) = -3/(16t^2)$, на рис. 1,б — для функции $a(t) = 3/(16t^2)$. При $t \rightarrow \infty$ решение нестационарной задачи сходится к автомодельному решению, приведенному ниже.

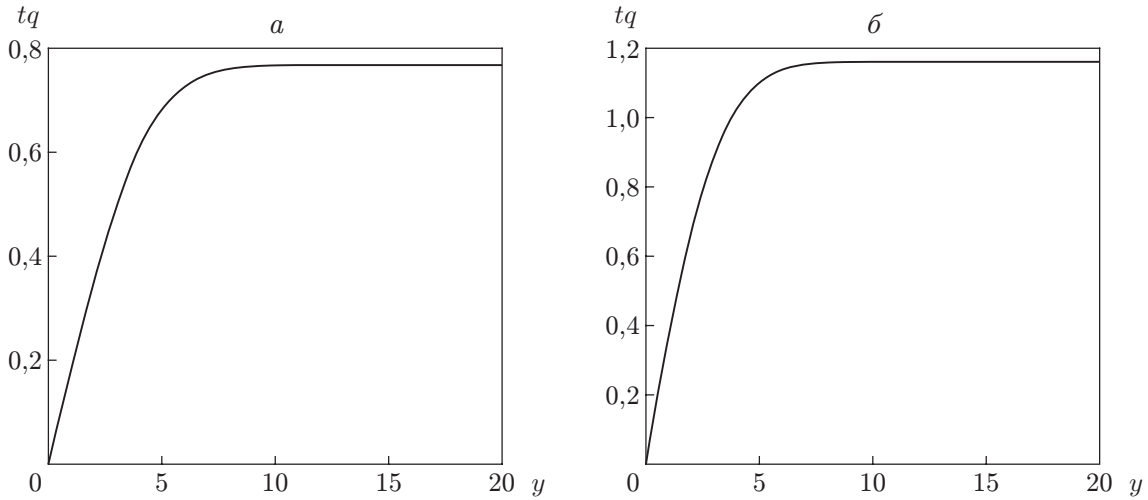


Рис. 1. Решение нестационарной задачи методом установления при $a(t) = -3/(16t^2)$ (а) и $a(t) = 3/(16t^2)$ (б)

Автомодельное решение рассматриваемой задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u = \frac{x}{t} \zeta'(\xi), \quad v = -\frac{1}{\sqrt{t}} \zeta(\xi), \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{t}}.$$

Этому решению соответствует функция $a(t) = k/t^2$. Функция ζ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \zeta''' &= (\zeta' - 1)\zeta' - (\zeta + \xi/2)\zeta'' - k, & \xi > 0, \\ \zeta(0) = \zeta'(0) &= 0, & \zeta' \rightarrow m, \quad \xi \rightarrow \infty, \\ m^2 - m - k &= 0. \end{aligned}$$

Квадратное уравнение для m имеет два различных действительных корня при $k > -1/4$ и один корень $m = 1/2$ при $k = -1/4$. На рис. 2 приведены графики зависимости $\zeta'(\xi)$ при различных значениях параметров k и m . Наибольший интерес представляет случай, показанный на рис. 2,а. Равенство нулю параметров k и m означает, что градиент давления $p_x = 0$ и продольная скорость на бесконечности также обращается в нуль. Следует отметить, что при $\xi \rightarrow \infty$ давление растет по линейному закону, а поперечная компонента скорости стремится к константе. На рис. 2,б представлены результаты расчета при $k = -1/4$, $m = 1/2$, на рис. 2,в — распределения продольной скорости при различных значениях параметра k и положительном корне m , на рис. 2,г — при отрицательном корне m .

Осесимметричное течение. В вязком осесимметричном течении при наличии критической точки жидкость набегаёт на стенку, расположенную перпендикулярно направлению течения, и оттекает от критической точки вдоль этой стенки во всех направлениях по радиусам. Пусть в цилиндрической системе координат (r, φ, z) плоскость $z = 0$ совмещена со стенкой, начало координат расположено в критической точке, ось z направлена противоположно направлению набегающего течения. Обозначим через u и w составляющие вектора скорости в радиальном направлении r и осевом направлении z соответственно. Вследствие осевой симметрии окружная компонента скорости равна нулю. Распределения скоростей и давления определяются формулами

$$u = rq(z, t), \quad w = -2 \int_0^z q(s, t) ds, \quad p = -\frac{1}{2} \rho r^2 a(t) + Q(z, t),$$

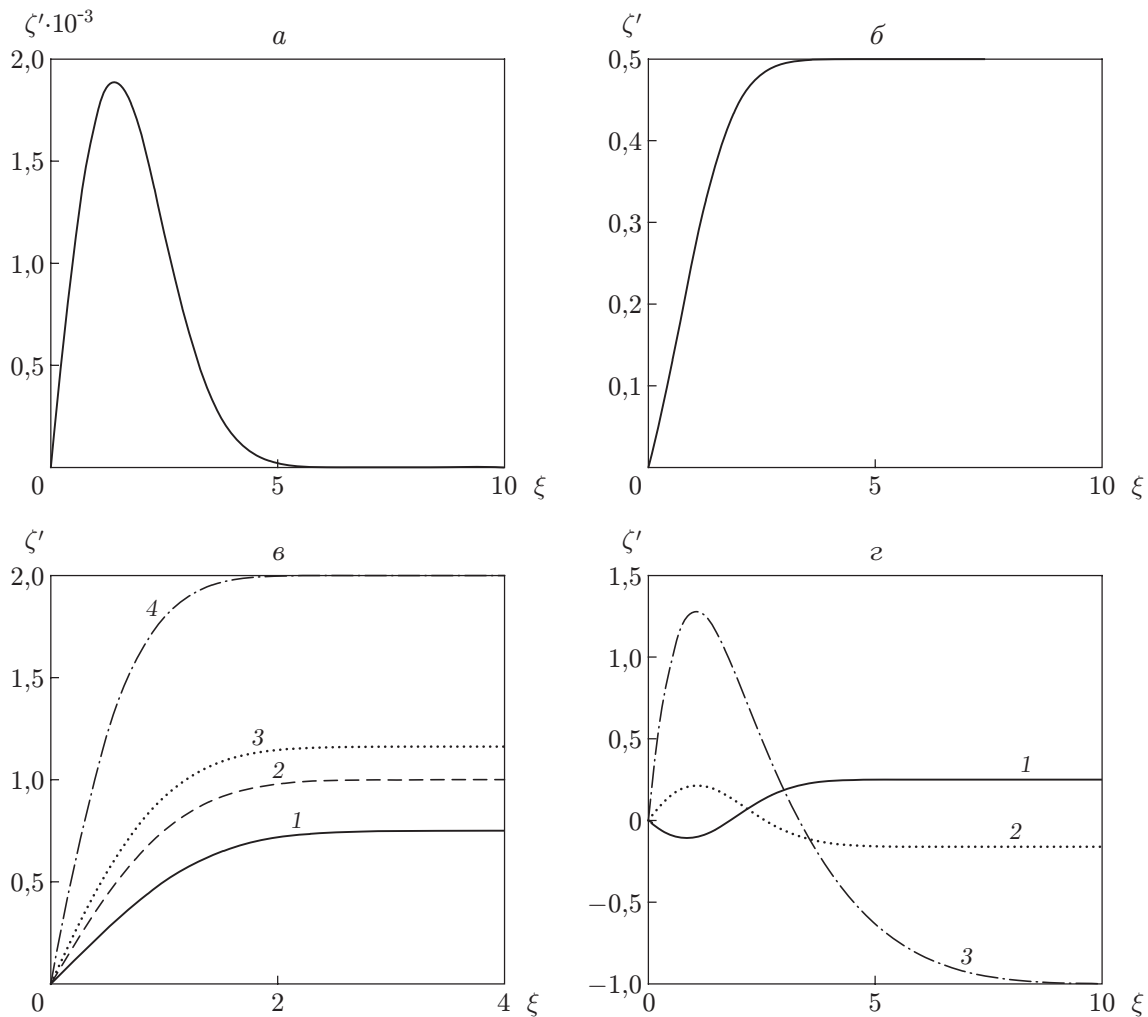


Рис. 2. Распределение продольной скорости в плоской задаче при различных значениях параметров k, m :

$a - k = 0, m = 0$; $б - k = -1/4, m = 1/2$; $в - 1 - k = -3/16, m = 3/4, 2 - k = 0, m = 1, 3 - k = 3/16, m = (2 + \sqrt{7})/4, 4 - k = 2, m = 2$; $г - 1 - k = -3/16, m = 1/4, 2 - k = 3/16, m = (2 - \sqrt{7})/4, 3 - k = 2, m = -1$

где $a(t)$ — заданная функция времени; функция $q(z, t)$ удовлетворяет начально-краевой задаче

$$q_t + q^2 - 2q_z \int_0^z q(s, t) ds - a(t) = \nu q_{zz}, \quad z > 0, \quad t > 0,$$

$$q(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad q \rightarrow f(t), \quad z \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad q(z, 0) = q_0(z), \quad z > 0,$$

$f(t)$ — решение уравнения Риккати (4). В данном случае также можно считать, что $\nu = 1$. Осесимметричная задача имеет автомодельное решение

$$u = \frac{r}{t} \psi'(\xi), \quad v = -\frac{2}{\sqrt{t}} \psi(\xi), \quad \xi = \frac{z}{\sqrt{t}},$$

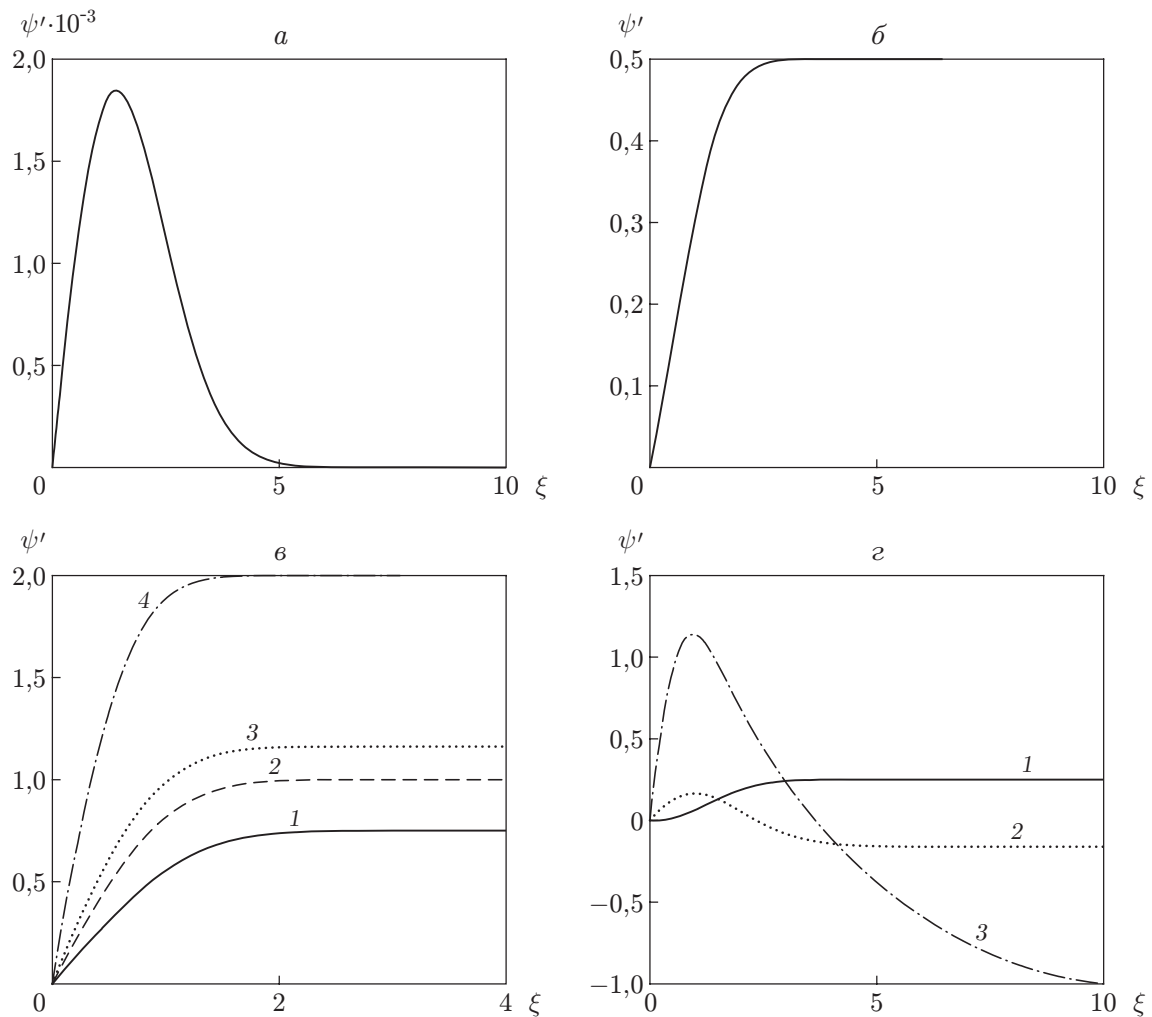


Рис. 3. Распределение продольной скорости в осесимметричной задаче при различных значениях параметров k, m (обозначения те же, что на рис. 2)

где функция ψ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \psi''' &= (\psi' - 1)\psi' - (2\psi + \xi/2)\psi'' - k, & \xi > 0, \\ \psi(0) &= \psi'(0) = 0, & \psi' \rightarrow m, \quad \xi \rightarrow \infty, \\ m^2 - m - k &= 0, \end{aligned}$$

причем, как и в плоском случае, $a(t) = k/t^2, k \geq -1/4$.

На рис. 3 приведены графики зависимости $\psi'(\xi)$ при различных значениях параметров k и m . Результаты сравнения рис. 2, 3 показывают, что распределения продольной скорости различаются незначительно.

Заключение. Построены автомодельные нестационарные решения, описывающие плоское и осесимметричное течения вязкой несжимаемой жидкости в окрестности критической точки, находящейся на твердой границе. Рассмотрены режимы течения жидкости из бесконечности к критической точке и от нее.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за полезные обсуждения рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
2. **Лаврентьева О. М.** Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.
3. **Shapiro A.** An analytical solution of the Navier — Stokes equations for unsteady backward stagnation point flow with injection or suction // J. Appl. Math. Mech. 2006. V. 86, N 4. P. 281–290.
4. **Sin V. K., Chio C. K.** Unsteady reversed stagnation-point flow over a flat plate // ISRN Appl. Math. 2012. V. 2012. Article ID 430432.
5. **Proudman I., Johnson K.** Boundary-layer growth near a rear stagnation point // J. Fluid Mech. 1962. V. 12, N 2. P. 161–168.
6. **Robins A., Howarth J.** Boundary-layer development at a two dimensional rear stagnation point // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, N 1. P. 161–171.
7. **Кузнецов В. В., Пухначев В. В.** Новое семейство точных решений уравнений Навье — Стокса // Докл. АН. 2009. Т. 425, № 1. С. 40–44.
8. **Гайфуллин А. М.** Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 4. С. 29–35.
9. **Петрова А. Г., Пухначев В. В., Фроловская О. А.** Нестационарное движение вблизи критической точки // Сб. докл. междунар. конф., приуроч. к 75-летию акад. В. А. Левина “Успехи механики сплошных сред”, Владивосток, 28 сент. — 4 окт. 2014 г. Иркутск: Мегатрип, 2014. С. 385–388.

*Поступила в редакцию 18/XII 2014 г.,
в окончательном варианте — 12/II 2015 г.*
