

УДК 519.6

Кубические мультивейвлеты, ортогональные многочленам, и алгоритм с расщеплением

Б.М. Шумилов

Государственный архитектурно-строительный университет, пл. Соляная, 2, Томск, 634003
E-mail: sbm@tsuab.ru

Шумилов Б.М. Кубические мультивейвлеты, ортогональные многочленам, и алгоритм с расщеплением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 3. — С. 287–301.

В статье исследован неявный метод разложения эрмитовых кубических сплайнов, использующий новый тип мультивейвлетов с суперкомпактными носителями. Обосновано расщепление алгоритма вейвлет-преобразования на параллельное решение двух трехдиагональных систем линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: эрмитовы сплайны, мультивейвлеты, неявные соотношения разложения, распараллеливание.

Shumilov B.M. Cubic multiwavelets orthogonal to polynomials and a splitting algorithm // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 3. — P. 287–301.

In this paper, an implicit method of decomposition of hermit cubic splines using the new type multiwavelets with supercompact supports is investigated. The splitting algorithm of wavelet-transformations on the parallel solution of two three-diagonal systems of the linear equations with strict diagonal domination is reasonable. The results of numerical experiments are presented.

Key words: hermit splines, multiwavelets, implicit relations of decomposition, parallelization.

1. Введение

Мультивейвлетами называются короткие или быстро затухающие волновые функции (всплески), множество сжатий и смещений которых в совокупности порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1–7]. В частности, в [7] были найдены мультивейвлеты третьей степени, полуортогональные относительно скалярного произведения с производными. Данные мультивейвлеты имеют суперкомпактный носитель $[0, 2]$, который меньше носителя $[0, 3]$ обычных полуортогональных мультивейвлетов. Более того, для них существуют конечные неявные соотношения разложения, с помощью которых в [8] был получен алгоритм вейвлет-преобразования с расщеплением на параллельное решение двух трехдиагональных систем. Недостаток состоит в том, что у них равны нулю только два первых момента. Это ухудшает сжатие числовых данных по сравнению с обычными мультивейвлетами. В данной работе, используя подход [9], мы построим базисные мультивейвлеты третьей степени с суперкомпактными носителями, у которых равны нулю четыре первых момента, что эквивалентно ортогональности любым многочленам третьей степени. Кроме этого, мы получим для них конечные неявные соотношения разложения и обоснуем распараллеливание алгоритма вейвлет-преобразования.

2. Построение системы базисных сплайн-мультивейвлетов

Исходным для построения вейвлет-преобразования является наличие набора вложенных пространств $\dots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \dots$. В данном случае пространство V_L является пространством эрмитовых кубических сплайнов на отрезке $[a, b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L : x_i = a + (b-a)i/2^L, i = 0, 1, \dots, 2^L, L \geq 0$, и базисными функциями $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v-i), k = 0, 1, \forall i$, где $v = 2^L(x-a)/(b-a)$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами двух масштабирующих функций вида [10] (рис. 1, а):

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} (1+t)^2(1-2t), & -1 \leq t \leq 0, \\ (1-t)^2(1+2t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases} \quad \varphi_1(t) = \begin{cases} (1+t)^2t, & -1 \leq t \leq 0, \\ (1-t)^2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

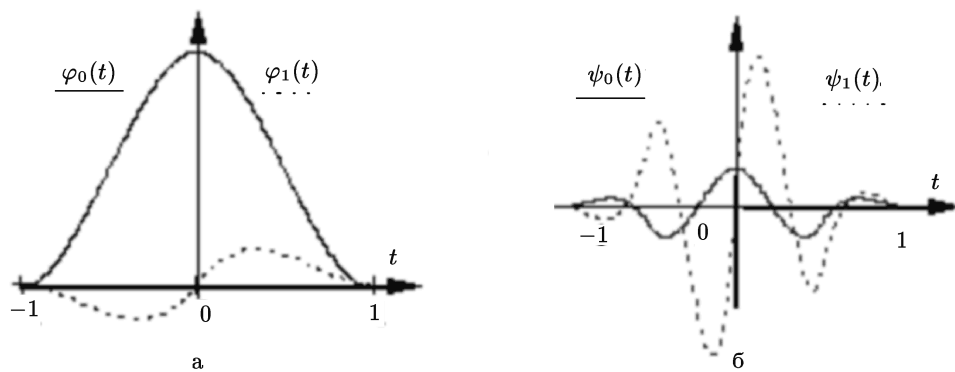


Рис. 1. а: графики масштабирующих функций $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$; б: вид симметричного и антисимметричного “материнских” вейвлетов $\psi_0(t), \psi_1(t)$

Поскольку сетка $\Delta^{L-1}, L \geq 1$, получается из сетки Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то базисными функциями для V_{L-1} будут функции $N_{i,k}^{L-1}(x)$ с носителями в два раза большими по ширине и центрами в четных целых числах. В соответствии с масштабными соотношениями [2]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \varphi_0(2t+1) + \frac{1}{2}(\varphi_0(2t+2) + \varphi_0(2t)) + \frac{3}{4}(\varphi_1(2t+2) - \varphi_1(2t)), \\ \varphi_1(t) &= \frac{1}{2}\varphi_1(2t+1) - \frac{1}{8}(\varphi_1(2t+2) + \varphi_1(2t) + \varphi_0(2t+2) - \varphi_0(2t)), \end{aligned} \quad (1)$$

каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям отрезка из двух, пар узких базисных функций. Обратное, очевидно, возможно только приближенно. Остается некоторое пространство W_{L-1} , содержащее уточняющие подробности, которые и позволяют восстановить V_L из V_{L-1} : $V_L = V_{L-1} + W_{L-1}$. Следующим этапом является определение вейвлетов как базиса W_{L-1} . В классической теории полуортогональных вейвлетов базисные функции W_{L-1} ортогональны всем базисным сплайнам на прореженной сетке V_{L-1} по отношению к некоторому скалярному произведению. Это означает, что пространство V_L представляет прямую сумму V_{L-1} и W_{L-1} : $V_L = V_{L-1} \oplus W_{L-1}$.

В отличие от этого мы, при условии обнуления сплайна в конечных точках отрезка, будем искать базисные функции полученного пространства W_L^0 как линейные комбинации

ции базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1} , удовлетворяющие условиям ортогональности всем многочленам четвертого порядка, т. е.

$$\int_a^b M_{i,k}^L(x)x^m dx = 0, \quad k = 0, 1, \forall i \quad (m = 0, 1, 2, 3). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} M_{i,k}^L(x) &= \psi_k(v - i), \quad i = 1, 2, \dots, 2^L - 1 \quad (k = 0, 1), \\ M_{0,1}^L(x) &= w_1(v), \quad M_{2^L,1}^L(x) = -w_1(2^L - v), \end{aligned}$$

где $v = 2^L(x - a)/(b - a)$,

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= -2\varphi_0(2t + 2) + 4\varphi_0(2t + 1) - 2\varphi_0(2t) - 15\varphi_1(2t + 2) + 15\varphi_1(2t), \\ \psi_1(t) &= 7\varphi_0(2t + 2) - 7\varphi_0(2t) + 39\varphi_1(2t + 2) + 132\varphi_1(2t + 1) + 39\varphi_1(2t), \\ w_1(t) &= \varphi_0(2t + 1) - 4\varphi_0(2t) + 36\varphi_1(2t + 2) + 63\varphi_1(2t + 1) + 24\varphi_1(2t). \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда система функций $\{M_{0,1}^L(x), M_{i,k}^L(x), i = 1, 2, \dots, 2^L - 1 \quad (k = 0, 1), M_{2^L,1}^L(x)\}$ удовлетворяет условиям (2) и образует базис с суперкомпактными носителями в пространстве W_L^0 , $L \geq 1$.

Доказательство. Условия ортогональности (2) определяют однородную систему четырех уравнений относительно коэффициентов вейвлета $M_{i,k}^L(x)$. Если предположить, что носитель вейвлета равен трем шагам сетки Δ^{L+1} , то однородная система становится квадратной и, будучи невырожденной, может иметь только тривиальное решение. Поэтому будем далее считать, что носитель вейвлета равен четырем шагам сетки Δ^{L+1} , т. е. вейвлет построен из шести базисных сплайнов. Разложение $M_{i,k}^L(x)$ подставим в (2) и вычислим все необходимые интегралы, учитывая при этом, что по краям отрезка $[a, b]$ остается по половине от выступающих за края отрезка функций φ_1 . Полученные однородные системы решаем нетривиальным образом, выбирая наиболее подходящие симметричные и антисимметричные решения.

Разберем более подробно случай вейвлетов, полностью лежащих внутри отрезка. После пересчета двух соседних шагов сетки Δ^L к сетке с единичным шагом $[-1, 1]$ имеем

$$M(t) = \sum_{k=-1}^1 (\alpha_k \varphi_0(2t - k) + \beta_k \varphi_1(2t - k)).$$

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_0(2t - k) dt &= \frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^1 \varphi_1(2t - k) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 t\varphi_0(2t - k) dt = \frac{k}{4}, \\ \int_{-1}^1 t\varphi_1(2t - k) dt &= \frac{1}{60}, \quad \int_{-1}^1 t^2\varphi_1(2t - k) dt = \frac{k}{60}, \quad \int_{-1}^1 t^3\varphi_0(2t - k) dt = \frac{7k}{80}, \quad k = -1, 0, 1; \\ \int_{-1}^1 t^2\varphi_0(2t - k) dt &= \frac{17}{120}, \quad \int_{-1}^1 t^3\varphi_1(2t - k) dt = \frac{23}{1680}, \quad k = -1, 1; \\ \int_{-1}^1 t^2\varphi_0(2t) dt &= \frac{1}{60}, \quad \int_{-1}^1 t^3\varphi_1(2t) dt = \frac{1}{840}. \end{aligned}$$

Ранг полученной в результате матрицы равен 4. Поэтому однородная система четырех уравнений с шестью неизвестными имеет два линейно независимых частных решения, одно из которых (симметричное) имеет равную нулю производную в точке $t = 0$, тогда как другое (антисимметричное) обращается там в нуль. Аналогично разбираются случаи граничных вейвлетов с нулевыми значениями в точках $t = \pm 1$, причем они антисимметричны относительно начала координат. Результаты представлены в условиях теоремы и, частично, на графиках (рис. 1, б).

Данные вейвлеты линейно независимы, так как представляют собой множество сдвигов ненулевых функций с компактными носителями. Вдобавок, их количество составляет как раз разность между размерностями пространств V_{L+1}^0 и V_L^0 : $2 \cdot 2^{L+1} - 2 \cdot 2^L = 2^{L+1}$. Носители равны носителям базисных сплайнов на сетке Δ^L . \square

На нулевом уровне разрешения вейвлетов, ортогональных кубическим многочленам и обращающихся в нуль в точках 0, 1, не существует.

3. Построение блока фильтров

На любой сетке Δ^L , $L \geq 1$, кубический эрмитов сплайн с нулевыми значениями при $x = a, b$ может быть представлен как

$$S^L(x) = \sum_{i=1}^{2^L-1} C_i^{L,0} N_{i,0}^L(x) + \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,1} N_{i,1}^L(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (4)$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}$, $k = 0, 1$, являются значениями и, соответственно, производными аппроксимируемой функции в узлах.

Если записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки

$$\varphi^L = [N_{0,1}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,1}^L]$$

и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора

$$C^L = [C_0^{L,1}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,1}],$$

то уравнение (4) переписывается как $S^L(x) = \varphi^L(x)C^L$. Аналогично запишем базисные вейвлет-функции на уровне разрешения L в виде матрицы-строки

$$\psi^L = [M_{0,1}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, \dots, M_{2^L,1}^L].$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты будем собирать в вектор

$$D^L = [D_0^{L,1}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, \dots, D_{2^L}^{L,1}].$$

Тогда с использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [11]:

$$C^L = [P^L \mid Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}, \quad L \geq 2. \quad (5)$$

Ниже представлен пример матрицы $[P^L \mid Q^L]$, соответствующий $L = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x \leq \frac{1}{3}, \\ |\sin(4\pi x)|, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Эта функция обращается в нуль в точках $x = 0$ и 1 . Начиная с верхнего уровня разрешения $L = 5$, т. е. при числе разбиений $n = 2^L = 32$, на отрезке $0 \leq x \leq 1$ с длиной шага $\Delta x = 1/n$ находим последовательно при

$$L = 5 : D^4 = [0.1137; 0.07997; 0.01737; -0.01463; 0.0343; -0.02646; -0.02214; -0.007566; \\ -0.07127; 0.06415; -0.07003; -0.1181; 0.006072; -0.06806; -0.1972; 0.2212; \\ 0.0001886; -0.06669; 0.1981; -0.1117; -0.002341; -0.02224; -0.09441; 0.017; \\ -0.07676; 0.02858; -0.02337; 0.01511; 0.03402; -0.07984; 0.01732; 0.1137]^\top;$$

$$L = 4 : D^3 = [0.06155; 0.05184; -0.03682; 0.01136; 0.03402; 0.1266; -0.06542; -0.2236; \\ -0.006744; 0.08071; 0.02816; 0.005637; 0.03555; -0.04744; -0.0379; 0.6058]^\top;$$

$$L = 3 : D^2 = [0.03952; -0.009264; -0.04617; -0.3339; 0.02502; -0.1534; 0.03935; 0.07519]^\top;$$

$L = 2$: на последнем шаге остается четыре коэффициента разложения, близких к значению функции в середине отрезка и трем значениям производной на концах и в середине интервала $C^1 = [3.474; 0.6398; 1.585; 5.245]^\top$, и четыре вейвлет-коэффициента разложения функции и производной $D^1 = [0.04667; 0.08798; -0.03226; -0.1252]^\top$.

На рис. 2 представлены результаты реконструкции коэффициентов эрмитового сплайна 3-й степени $S^5(x)$ при условии обнуления вейвлет-коэффициентов $D_2^2, D_5^2, D_4^3, D_9^3, D_{11}^3, D_{12}^3$ и $D_3^4, D_4^4, D_7^4, D_8^4, D_{13}^4, D_{17}^4, D_{21}^4, D_{22}^4, D_{24}^4, D_{27}^4, D_{28}^4, D_{31}^4$, по модулю меньших 0.026. Здесь сплошной линией обозначаются исходная функция и ее производная.

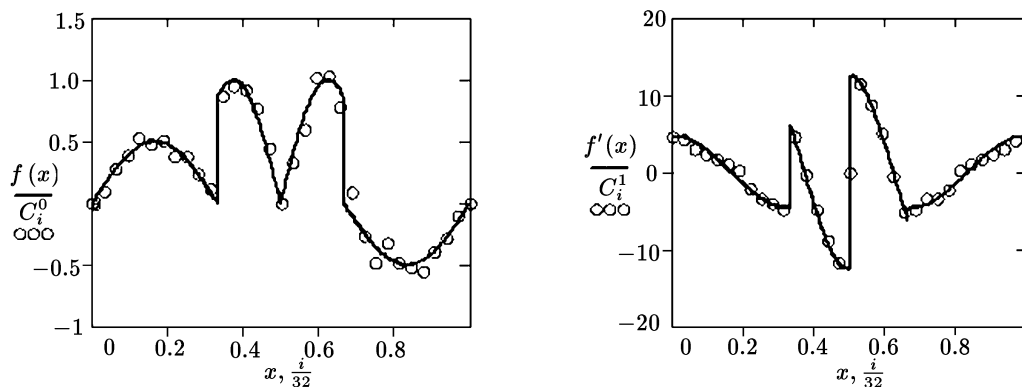


Рис. 2. Результаты вейвлет-реконструкции коэффициентов эрмитового сплайна 3-й степени (слева — функции; справа — производной)

Для функций, не равных нулю в концах отрезка, в [8, 13] предлагалось вычесть из исходных координат уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю точки. В результате алгоритм вейвлет-преобразования сводится к рассмотренному выше случаю, а уравнение прямой добавляется к полученному решению.

Пусть дана кубическая функция $f(x) = (x^2 - 1/4)(x - 1/2)$ с числом разбиений $n = 2^5$ на интервале $0 \leq x \leq 1$. Число используемых значений функции и производной при выполнении вейвлет-преобразования равно $2 \cdot (n + 1) = 66$.

При условии вычисления значений функции и производной из выражений $f(x) - (1-x)/8 - 3x/8$ и $2x(x-1/2) + x^2 - 1/2$ соответственно находим последовательно при

$$L = 5 : D^4 = [-0.0131; -0.01174; 0; 0; -0.01346; 0; 0; 0; -0.01408; -0.0007311; -0.01303; 0.00107; 0; 0.001395; -0.009092; 0.001718; 0; 0.002038; -0.002769; 0.00235; 0; 0; 0.005894; 0; 0.01101; 0.002128; 0; 0; 0.02032; -0.02803; 0; 0.03569]^T;$$

$$L = 4 : D^3 = [-0.003048; 0.002246; 0.01206; 0; 0.01392; -0.00214; 0.01135; -0.003572; 0; -0.004808; 0; 0; -0.01164; -0.008147; -0.02238; 0.01805]^T;$$

$$L = 3 : D^2 = [-0.008821; 0; -0.006394; 0.00193; 0; -0.01174; -0.003263; 0.02301]^T;$$

$L = 2$: на последнем шаге остается четыре коэффициента разложения, близких к значению функции в середине отрезка и трем значениям производной на концах и в середине интервала $C^1 = [-0.2215; -0.2475; -0.04449; 0.9297]^T$, и четыре вейвлет-коэффициента разложения функции и производной $D^1 = [0; -0.0135; 0; 0.01702]^T$.

Все вейвлет-коэффициенты по модулю меньше 0.0357, так что их можно смело обнулить. На рис. 3 представлены результаты исправления реконструированных значений эрмитового сплайна 3-й степени $S^5(x)$ и его производной при неплохом качестве воспроизведения исходной функции. Таким образом, в данном случае для сжатия достаточно 4-х коэффициентов сплайна на нижнем уровне разрешения и 2-х поправочных коэффициентов, что дает коэффициент сжатия $66/6=11$. Это существенно лучше, чем коэффициент сжатия $66/40 = 1.65$ [8], достигнутый при использовании кубических мультивейвлетов, ортогональных с первыми производными.

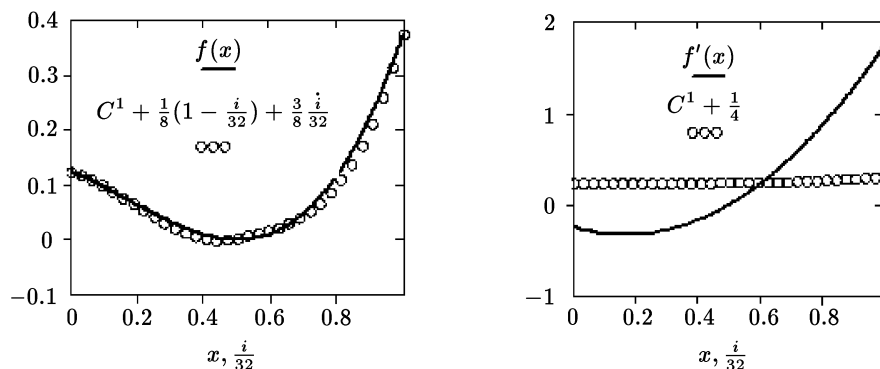


Рис. 3. Результаты исправления вейвлет-реконструкции значений эрмитового сплайна 3-й степени (слева — функции; справа — производной)

5. Получение неявных конечных соотношений разложения

Для ускорения вычислений матрицу $[P^L | Q^L]$ можно сделать ленточной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P^L и Q^L перемежались (см. [11]). Тем не менее, хотя разрешимость полученной системы и гарантирована линейной независимостью базисных функций, вопрос ее хорошей обусловленности остается открытым.

В [8, 13] для частных случаев кубических мультивейвлетов нами были получены неявные трехчленные соотношения разложения, с помощью которых систему (5) удастся расщепить по четным и нечетным узлам. Для представленного выше типа мультивейвлетов справедливы аналогичные результаты, которые, используя обозначения для блочных матриц, можно представить в следующем виде.

$$\sum_{i=-1}^3 a_i^k \varphi_k(2t - i) = \sum_{l=0}^1 \left(\sum_{j=0}^1 b_j^{k,l} \psi_l(t - j) + \sum_{j=0}^1 c_j^{k,l} \varphi_l(t - j) \right), \quad k = 0, 1, \quad (7)$$

где $\varphi_k(2t - i)$ — эрмитовы базисные сплайны на густой сетке, $\varphi_l(t - j)$ — эрмитовы базисные сплайны на прореженной сетке, $\psi_l(t - j)$ — базисные вейвлеты на прореженной сетке.

Поскольку по обе стороны равенств (7) присутствуют эрмитовы кубические сплайны, для их тождественного совпадения достаточно равенства соответствующих значений сплайнов и их производных в узлах густой сетки. В табл. 1, 2 выписаны значения масштабирующих функций, “материнских” вейвлетов и их производных, принимаемые в точках, принадлежащих соответствующим носителям. Прочерки в табл. 2 означают, что значения функции в данных точках не определены и далее нигде не используются.

Таблица 1. Значения масштабирующих функций и их производных в точках отрезка $[-1, 1]$

t	$\varphi_0(2t)$	$\varphi_0'(2t)$	$\varphi_1(2t)$	$\varphi_1'(2t)$	$\varphi_0(t)$	$\varphi_0'(t)$	$\varphi_1(t)$	$\varphi_1'(t)$
-1	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/2	0	0	0	0	1/2	3/2	-1/8	-1/4
0	1	0	0	2	1	0	0	1
1/2	0	0	0	0	1/2	-3/2	1/8	-1/4
1	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 2. Значения “материнских” вейвлетов и их производных в точках отрезка $[-1, 3/2]$

t	$\psi_0(t)$	$\psi_0'(t)$	$\psi_1(t)$	$\psi_1'(t)$	$w_1(t)$	$w_1'(t)$	$-w_1(1 - t)$	$-w_1'(1 - t)$
-1	0	0	0	0	-	-	0	0
-1/2	-2	-30	7	78	-	-	0	0
0	4	0	0	264	0	72	4	48
1/2	-2	30	-7	78	1	126	-1/8	126
1	0	0	0	0	-4	48	0	72
3/2	0	0	0	0	0	0	-	-

Найдем коэффициенты первого из соотношений (7). В точках отрезка $(-1, 2)$, согласно табл. 1, 2, для сплайнов слева и справа от знака равенства имеем соответственно при

$$\begin{aligned}
 t = -\frac{1}{2} : a_{-1}^0 &= b_0^{00}(-2) + c_0^{00} \frac{1}{2} + b_0^{01} \cdot 7 + c_0^{01} \left(-\frac{1}{8} \right), \\
 t = 0 : a_0^0 &= b_0^{00} \cdot 4 + c_0^{00}, \\
 t = \frac{1}{2} : a_1^0 &= b_0^{00}(-2) + b_1^{00}(-2) + c_0^{00} \frac{1}{2} + c_1^{00} \frac{1}{2} + b_0^{01}(-7) + b_1^{01} \cdot 7 + c_0^{01} \frac{1}{8} + c_1^{01} \left(-\frac{1}{8} \right), \\
 t = 1 : a_2^0 &= b_1^{00} \cdot 4 + c_1^{00}, \\
 t = \frac{3}{2} : a_3^0 &= b_1^{00}(-2) + c_1^{00} \frac{1}{2} + b_1^{01}(-7) + c_1^{01} \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Аналогично для производных при

$$\begin{aligned}
t = -\frac{1}{2} : 0 &= b_0^{00}(-30) + c_0^{00} \frac{3}{2} + b_0^{01} \cdot 78 + c_0^{01} \left(-\frac{1}{4} \right), \\
t = 0 : 0 &= b_0^{01} \cdot 264 + c_0^{01}, \\
t = \frac{1}{2} : 0 &= b_0^{00} \cdot 30 + b_1^{00}(-30) + c_0^{00} \left(-\frac{3}{2} \right) + c_1^{00} \frac{3}{2} + b_0^{01} \cdot 78 + b_1^{01} \cdot 78 + c_0^{01} \left(-\frac{1}{4} \right) + c_1^{01} \left(-\frac{1}{4} \right), \\
t = 1 : 0 &= b_1^{01} \cdot 264 + c_1^{01}, \\
t = \frac{3}{2} : 0 &= b_1^{00} \cdot 30 + c_1^{00} \left(-\frac{3}{2} \right) + b_1^{01} \cdot 78 + c_1^{01} \left(-\frac{1}{4} \right).
\end{aligned}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что полученная система уравнений дает симметричное относительно точки $t = 1/2$ трехчленное соотношение с коэффициентами: $a_0^0 = a_2^0 = 0$, $b_0^{00} = b_1^{00} = 2$, $c_0^{00} = c_1^{00} = -8$, $b_0^{01} = 1/2$, $b_1^{01} = -1/2$, $c_0^{01} = -132$, $c_1^{01} = 132$, $a_{-1}^0 = a_3^0 = 12$, $a_1^0 = -56$.

Имеются еще два симметричных относительно точки $t = 1/2$ решения, когда $a_{-1}^0 = a_0^0 = 0$, $b_1^{00} = 1/2$, $c_1^{00} = 10$, $b_0^{00} = c_0^{00} = b_0^{01} = b_1^{01} = c_0^{01} = c_1^{01} = 0$, $a_1^0 = a_3^0 = 4$, $a_2^0 = 12$; и $a_2^0 = a_3^0 = 0$, $b_0^{00} = 1/2$, $c_0^{00} = 10$, $b_1^{00} = c_1^{00} = b_1^{01} = b_0^{01} = c_1^{01} = c_0^{01} = 0$, $a_{-1}^0 = a_0^0 = 4$, $a_1^0 = 12$.

Найдем коэффициенты второго из соотношений (7). С помощью табл. 1, 2 для значений сплайнов имеем следующие соотношения соответственно в точках:

$$\begin{aligned}
t = -\frac{1}{2} : 0 &= b_0^{10}(-2) + c_0^{10} \frac{1}{2} + b_0^{11} \cdot 7 + c_0^{11} \left(-\frac{1}{8} \right), \\
t = 0 : 0 &= b_0^{10} \cdot 4 + c_0^{10}, \\
t = \frac{1}{2} : 0 &= b_0^{10}(-2) + b_1^{10}(-2) + c_0^{10} \frac{1}{2} + c_1^{10} \frac{1}{2} + b_0^{11}(-7) + b_1^{11} \cdot 7 + c_0^{11} \frac{1}{8} + c_1^{11} \left(-\frac{1}{8} \right), \\
t = 1 : 0 &= b_1^{10} \cdot 4 + c_1^{10}, \\
t = \frac{3}{2} : 0 &= b_1^{10}(-2) + c_1^{10} \frac{1}{2} + b_1^{11}(-7) + c_1^{11} \left(-\frac{1}{8} \right).
\end{aligned}$$

Для производных соответственно при

$$\begin{aligned}
t = -\frac{1}{2} : 2a_{-1}^1 &= b_0^{10}(-30) + c_0^{10} \frac{3}{2} + b_0^{11} \cdot 78 + c_0^{11} \left(-\frac{1}{4} \right), \\
t = 0 : 2a_0^1 &= b_0^{11} \cdot 264 + c_0^{11}, \\
t = \frac{1}{2} : 2a_1^1 &= b_0^{10} \cdot 30 + b_1^{10}(-30) + c_0^{10} \left(-\frac{3}{2} \right) + c_1^{10} \frac{3}{2} + b_0^{11} \cdot 78 + b_1^{11} \cdot 78 + c_0^{11} \left(-\frac{1}{4} \right) + c_1^{11} \left(-\frac{1}{4} \right), \\
t = 1 : 2a_2^1 &= b_1^{11} \cdot 264 + c_1^{11}, \\
t = \frac{3}{2} : 2a_3^1 &= b_1^{10} \cdot 30 + c_1^{10} \left(-\frac{3}{2} \right) + b_1^{11} \cdot 78 + c_1^{11} \left(-\frac{1}{4} \right).
\end{aligned}$$

Одно из решений полученной системы уравнений имеет вид: $a_0^1 = a_2^1 = 0$, $b_0^{10} = -5$, $b_1^{10} = 5$, $c_0^{10} = 20$, $c_1^{10} = -20$, $b_0^{11} = b_1^{11} = -1/2$, $c_0^{11} = c_1^{11} = 132$, $a_{-1}^1 = a_3^1 = 54$, $a_1^1 = -252$.

Имеется еще одно решение, когда $a_{-1}^1 = a_0^1 = 0$, $b_1^{11} = 1/2$, $c_1^{11} = 28$, $b_0^{10} = b_1^{10} = c_0^{10} = 0$, $a_1^1 = a_3^1 = 16$, $a_2^1 = 80$.

И для случая, когда $a_2^1 = a_3^1 = 0$, решение симметрично предыдущему.

По краям отрезка аппроксимации, согласно построению, на каждом двух крайних шагах сетки Δ^L перекрываются по три широких базисных функции и вейвлета и по

семь узких базисных функций. В частности, на левом конце после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке $[0, 2)$ при условии $a_0^0 = 0$ можно записать ($k = 0, 1$):

$$\sum_{i=0}^3 a_i^k \varphi_k(2t-i) = b_1^{k,0} \psi_0(t-1) + b_0^{k,1} w_1(t) + b_1^{k,1} \psi_1(t-1) + c_1^{k,0} \varphi_0(t-1) + \sum_{j=0}^1 c_j^{k,1} \varphi_1(t-j). \quad (8)$$

Тогда для отыскания коэффициентов первого соотношения (8), согласно табл. 1, 2, имеем соответственно при

$$\begin{aligned} t = 0: \quad & 0 = b_0^{01} \cdot 72 + c_0^{01}, \\ t = \frac{1}{2}: \quad & a_1^0 = b_1^{00}(-2) + c_1^{00} \frac{1}{2} + b_0^{01} + b_1^{01} \cdot 7 + c_0^{01} \frac{1}{8} + c_1^{01} \left(-\frac{1}{8} \right), \\ & 0 = b_1^{00}(-30) + c_1^{00} \frac{3}{2} + b_0^{01} \cdot 126 + b_1^{01} \cdot 78 + c_0^{01} \left(-\frac{1}{4} \right) + c_1^{01} \left(-\frac{1}{4} \right), \\ t = 1: \quad & a_2^0 = b_1^{00} \cdot 4 + b_0^{01}(-4) + c_1^{00}, \\ & 0 = b_1^{01} \cdot 264 + b_0^{01} \cdot 48 + c_1^{01}, \\ t = \frac{3}{2}: \quad & a_3^0 = b_1^{00}(-2) + c_1^{00} \frac{1}{2} + b_1^{01}(-7) + c_1^{01} \frac{1}{8}, \\ & 0 = b_1^{00} \cdot 30 + c_1^{00} \left(-\frac{3}{2} \right) + b_1^{01} \cdot 78 + c_1^{01} \left(-\frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Нетривиальное решение полученной системы уравнений имеет вид: $a_2^0 = 0$, $b_1^{00} = 13$, $c_1^{00} = -28$, $b_0^{01} = 6$, $b_1^{01} = -7/2$, $c_0^{01} = -432$, $c_1^{01} = 636$, $a_1^0 = -192$, $a_3^0 = 64$.

Аналогично для отыскания коэффициентов второго соотношения (8) имеем:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad & 2a_0^1 = b_0^{11} \cdot 72 + c_0^{11}, \\ t = \frac{1}{2}: \quad & 0 = b_1^{10}(-2) + c_1^{10} \frac{1}{2} + b_0^{11} + b_1^{11} \cdot 7 + c_0^{11} \frac{1}{8} + c_1^{11} \left(-\frac{1}{8} \right), \\ & 2a_1^1 = b_1^{10}(-30) + c_1^{10} \frac{3}{2} + b_0^{11} \cdot 126 + b_1^{11} \cdot 78 + c_0^{11} \left(-\frac{1}{4} \right) + c_1^{11} \left(-\frac{1}{4} \right), \\ t = 1: \quad & 0 = b_1^{10} \cdot 4 + b_0^{11}(-4) + c_1^{10}, \\ & 2a_2^1 = b_0^{11} \cdot 48 + b_1^{11} \cdot 264 + c_1^{11}, \\ t = \frac{3}{2}: \quad & 0 = b_1^{10}(-2) + c_1^{10} \frac{1}{2} + b_1^{11}(-7) + c_1^{11} \left(\frac{1}{8} \right), \\ & 2a_3^1 = b_1^{10} \cdot 30 + c_1^{10} \left(-\frac{3}{2} \right) + b_1^{11} \cdot 78 + c_1^{11} \left(-\frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид: $a_0^1 = a_2^1 = 0$, $b_1^{10} = 5$, $c_1^{10} = -60$, $b_0^{11} = -10$, $b_1^{11} = 1/2$, $c_0^{11} = 720$, $c_1^{11} = 348$, $a_1^1 = -864$, $a_3^1 = 96$.

И имеется еще одно нетривиальное решение, когда $a_2^1 = 0$, $b_1^{11} = 1/2$, $c_1^{11} = 108$, $b_0^{11} = -5$, $b_1^{10} = 0$, $c_0^{11} = 200$, $c_1^{10} = -20$, $a_3^1 = 21$, $a_1^1 = -349$, $a_0^1 = -80$.

На двух крайних справа шагах сетки Δ^L после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке $(-1, 1]$ при условии $a_2^0 = 0$ можно записать ($k = 0, 1$):

$$\sum_{i=-1}^2 a_i^k \varphi_k(2t-i) = b_0^{k,0} \psi_0(t) + b_0^{k,1} \psi_1(t) - b_1^{k,1} w_1(1-t) + c_0^{k,0} \varphi_0(t) + \sum_{j=0}^1 c_j^{k,1} \varphi_1(t-j). \quad (9)$$

Тогда для отыскания коэффициентов первого соотношения (9), согласно табл. 1, 2, имеем соответственно при

$$\begin{aligned}
 t = -\frac{1}{2}: \quad & a_{-1}^0 = b_0^{00}(-2) + c_0^{00}\frac{1}{2} + b_0^{01} \cdot 7 + c_0^{01}\left(-\frac{1}{8}\right), \\
 & 0 = b_0^{00}(-30) + c_0^{00}\frac{3}{2} + b_0^{01} \cdot 78 + c_0^{01}\left(-\frac{1}{4}\right), \\
 t = 0: \quad & a_0^0 = b_0^{00} \cdot 4 + c_0^{00} + b_1^{01} \cdot 4, \\
 & 0 = b_0^{01} \cdot 264 + c_0^{01} + b_1^{01} \cdot 48, \\
 t = \frac{1}{2}: \quad & a_1^0 = b_0^{00}(-2) + c_0^{00}\frac{1}{2} + b_0^{01}(-7) + b_1^{01}(-1) + c_0^{01}\frac{1}{8} + c_1^{01}\left(-\frac{1}{8}\right), \\
 & 0 = b_0^{00} \cdot 30 + c_0^{00}\left(-\frac{3}{2}\right) + b_0^{01} \cdot 78 + b_1^{01} \cdot 126 + c_0^{01}\left(-\frac{1}{4}\right) + c_1^{01}\left(-\frac{1}{4}\right), \\
 t = 1: \quad & 0 = b_1^{01} \cdot 72 + c_1^{01}.
 \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид: $a_0^0 = 0$, $b_0^{00} = 13$, $c_0^{00} = -28$, $b_0^{01} = 7/2$, $b_1^{01} = -6$, $c_0^{01} = -636$, $c_1^{01} = 432$, $a_{-1}^0 = 64$, $a_1^0 = -192$.

Аналогично для отыскания коэффициентов второго соотношения (9) имеем:

$$\begin{aligned}
 t = -\frac{1}{2}: \quad & 0 = b_0^{10}(-2) + c_0^{10}\frac{1}{2} + b_0^{11} \cdot 7 + c_0^{11}\left(-\frac{1}{8}\right), \\
 & 2a_{-1}^1 = b_0^{10}(-30) + c_0^{10}\frac{3}{2} + b_0^{11} \cdot 78 + c_0^{11}\left(-\frac{1}{4}\right), \\
 t = 0: \quad & 0 = b_0^{10} \cdot 4 + c_0^{10} + b_1^{11} \cdot 4, \\
 & 2a_0^1 = b_0^{11} \cdot 264 + c_0^{11} + b_1^{11} \cdot 48, \\
 t = \frac{1}{2}: \quad & 0 = b_0^{10}(-2) + c_0^{10}\frac{1}{2} + b_0^{11}(-7) + b_1^{11}(-1) + c_0^{11}\frac{1}{8} + c_1^{11}\left(-\frac{1}{8}\right), \\
 & 2a_1^1 = b_0^{10} \cdot 30 + c_0^{10}\left(-\frac{3}{2}\right) + b_0^{11} \cdot 78 + b_1^{11} \cdot 126 + c_0^{11}\left(-\frac{1}{4}\right) + c_1^{11}\left(-\frac{1}{4}\right), \\
 t = 1: \quad & 2a_2^1 = b_1^{11} \cdot 72 + c_1^{11}.
 \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид: $a_0^1 = a_2^1 = 0$, $b_0^{10} = -5$, $c_0^{10} = 60$, $b_1^{11} = -10$, $b_0^{11} = 1/2$, $c_1^{11} = 720$, $c_0^{11} = 348$, $a_{-1}^1 = 96$, $a_1^1 = -864$.

Имеется еще одно решение, когда $a_0^1 = 0$, $b_0^{11} = 1/2$, $c_0^{11} = 108$, $b_1^{11} = -5$, $b_0^{10} = 0$, $c_1^{11} = 200$, $c_0^{10} = 20$, $a_{-1}^1 = 21$, $a_1^1 = -349$, $a_2^1 = -80$.

Полученные выше трехчленные соотношения можно представить в виде равенства (6), где блоки матриц G^L и R^L составлены из коэффициентов левых и правых частей полученных разложений соответственно. \square

Следствие. Для любого уровня разрешения $L \geq 2$ матрица вейвлет-разложения эрмитовых кубических сплайнов удовлетворяет уравнению

$$[P^L \mid Q^L] R^L = G^L. \quad (10)$$

Доказательство. Из определения матрицы вейвлет-разложения следует, что

$$[\varphi^{L-1} \mid \psi^{L-1}] = \varphi^L [P^L \mid Q^L].$$

Подставляя полученное разложение в равенство (6) и учитывая линейную независимость базисных функций и вейвлетов, приходим к утверждению следствия. \square

Выражение (10) может служить как проверочным соотношением, так и способом факторизации матрицы вейвлет-преобразования.

6. Алгоритм с применением расщепления

Следующее утверждение дает возможность распараллеливания на два независимых процесса алгоритма вычисления коэффициентов вейвлет-разложения по известным коэффициентам сплайн-разложения на любом уровне разрешения L .

Теорема 2. Пусть величины $\Xi^L = [\xi_0^{L,1}, \xi_1^{L,0}, \xi_1^{L,1}, \dots, \xi_{2^L}^{L,1}]$, $L \geq 2$, получены из соотношений вида:

$$\xi_i^{L,0} = \frac{1}{12}C_i^{L,0}, \quad i = 2, 4, \dots, 2^L - 2; \quad \xi_i^{L,1} = \frac{1}{80}C_i^{L,1}, \quad i = 0, 2, \dots, 2^L;$$

$$\begin{pmatrix} -192 & 12 & & & \\ & 64 & -56 & \ddots & 12 \\ & & 12 & \ddots & -56 & 64 \\ & & & & 12 & -192 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{L,0} \\ \xi_3^{L,0} \\ \vdots \\ \xi_{2^{L-1}}^{L,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{L,0} - \frac{1}{3}C_2^{L,0} \\ C_3^{L,0} - \frac{1}{3}(C_2^{L,0} + C_4^{L,0}) \\ \vdots \\ C_{2^{L-1}}^{L,0} - \frac{1}{3}C_{2^{L-2}}^{L,0} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -864 & 96 \\ 96 & -864 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{2,1} \\ \xi_3^{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{2,1} - \frac{1}{5}C_2^{2,1} - \frac{1}{80}(349C_0^{2,1} - 21C_4^{2,1}) \\ C_3^{2,1} - \frac{1}{5}C_2^{2,1} - \frac{1}{80}(349C_4^{2,1} - 21C_0^{2,1}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -864 & 54 & 0 \\ 96 & -252 & 96 \\ 0 & 54 & -864 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{3,1} \\ \xi_3^{3,1} \\ \xi_5^{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{3,1} - \frac{1}{5}C_2^{3,1} - \frac{349}{80}C_0^{3,1} \\ C_3^{3,1} - \frac{1}{5}C_2^{3,1} + C_4^{3,1} + \frac{21}{80}(C_0^{3,1} + C_6^{3,1}) \\ C_5^{3,1} - \frac{1}{5}C_4^{3,1} - \frac{349}{80}C_6^{3,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -864 & 54 & & & \\ 96 & -252 & \ddots & & 54 \\ & 54 & \ddots & -252 & 96 \\ & & & 54 & -864 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1^{L,1} \\ \xi_3^{L,1} \\ \vdots \\ \xi_{2^{L-1}}^{L,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{L,1} - \frac{1}{5}C_2^{L,1} - \frac{349}{80}C_0^{L,1} \\ C_3^{L,1} - \frac{1}{5}(C_2^{L,1} + C_4^{L,1}) + \frac{21}{80}C_0^{L,1} \\ C_5^{L,1} - \frac{1}{5}(C_4^{L,1} + C_6^{L,1}) \\ \vdots \\ C_{2^{L-3}}^{L,1} - \frac{1}{5}(C_{2^{L-4}}^{L,1} + C_{2^{L-2}}^{L,1}) + \frac{21}{80}C_{2^L}^{L,1} \\ C_{2^{L-1}}^{L,1} - \frac{1}{5}C_{2^{L-2}}^{L,1} - \frac{349}{80}C_{2^L}^{L,1} \end{pmatrix}, \quad L \geq 4.$$

Здесь точки, расставленные по диагонали, означают, что предшествующий столбец повторяется соответствующее число раз, сдвигаясь при этом вниз на одну позицию. Тогда коэффициенты вейвлет-разложения на низшем уровне представляют собой результат линейного отображения

$$\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right] = R^L \Xi^L. \quad (11)$$

Доказательство. Используя следствие, решение системы уравнений (5) можно записать в матричном виде как

$$\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right] = [P^L \mid Q^L]^{-1} C^L = R^L (G^L)^{-1} C^L.$$

Вычислим вспомогательные переменные Ξ^L из системы линейных уравнений $G^L \Xi^L = C^L$. При этом, как нетрудно видеть, матрица G^L представляет собой хорошо определенную ленточную матрицу со строгим диагональным преобладанием. Более того, после частичного исключения неизвестных алгоритм сводится к решению независимо двух трехдиагональных систем уравнений. После этого вычисление коэффициентов разложения эрмитового кубического сплайна с нулевыми значениями по концам отрезка аппроксимации в базисе мультивейвлетов, ортогональных многочленам, осуществляется по явным конечным формулам (11). \square

Вычисление в Mathcad'e показывает совпадение с матричным методом с точностью до $13 \div 15$ значащих цифр. Несомненным преимуществом полученных формул является возможность обработки практически неограниченных по длине сигналов.

7. Заключение

Представленные в статье схемы построения эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов, ортогональных многочленам, и получения для них неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам могут быть распространены и на сплайны более высокой степени и предоставляют широкие возможности для создания параллельных алгоритмов построения и использования эрмитовых сплайн-вейвлетов.

Литература

1. **Strela V.** Multiwavelets: Theory and Applications: Thesis PHD in Mathematics. — Cambridge, Massachusetts, 1996.
2. **Heil C., Strang G., and Strela V.** Approximation by translate of refinable functions // Numer. Math. — 1996. — Vol. 73. — P. 75–94.
3. **Warming R., Beam R.** Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp. — 2000. — Vol. 22, № 1. — P. 269–317.
4. **Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., and Kunoth A.** Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // Constr. Approx. — 2000. — Vol. 16. — P. 221–259.
5. **Han B.** Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // J. Approxim. Theory. — 2001. — Vol. 110. — P. 18–53.
6. **Zhang Qin-li, Wu Bo-ying, and He Chun-jiang.** Hermite multiwavelets // Harbin gongue daxue xuebao. J. Harbin Inst. Technol. — 2004. — Vol. 36, № 6. — P. 787–789.
7. **Jia R.-Q., Liu S.-T.** Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval // Advances Computational Mathematics. — 2006. — Vol. 25. — P. 23–39.
8. **Шумилов Б.М.** Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Механика. — 2010. — № 4. — С. 45–55.

9. **Koro K., Ade K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2001. — Vol. 25. — P. 149-164.
10. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
11. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике / Пер. с англ. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
12. **Arandiga F., Baeza A., and Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2004. — Vol. 9. — P. 263–273.
13. **Шумилов Б.М.** “Ленивые” вейвлеты эрмитовых кубических сплайнов и алгоритм с расщеплением // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2011. — № 1. — С. 64–72.

*Поступила в редакцию 26 марта 2012 г.,
в окончательном варианте 6 августа 2012 г.*

