

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОБ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА РАВНОМЕРНЫМ ПОТОКОМ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Методом мультипольных разложений построено решение линейной стационарной задачи о бесциркуляционном обтекании равномерным потоком горизонтального кругового цилиндра, расположенного полностью либо в верхнем, либо в нижнем слое двухслойной жидкости. Направление потока перпендикулярно оси цилиндра. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а течение в каждом слое — потенциальным. Верхний слой может быть ограничен как свободной поверхностью, так и твердой крышкой, нижний ограничен твердым горизонтальным дном.

В последние годы интенсивно развиваются методы расчета гидродинамических нагрузок, действующих на погруженное тело произвольной формы, движущееся в стратифицированной жидкости [1–5]. При этом актуальной является проблема тестирования используемых численных методов, для чего полезно иметь решение задачи обтекания для тела простой геометрии, гарантирующее высокую точность расчетов. Наиболее распространенным примером такого тела в плоском случае является круговой контур. Явное решение задачи обтекания кругового профиля потоком безграничной двухслойной жидкости получено в [6] с помощью конформного отображения, однако данный метод не применим для жидкости конечной глубины. В этом случае удобно использовать метод мультипольных разложений (ММР), с помощью которого были полностью изучены задачи радиации и дифракции поверхностных волн движущимся погруженным круговым цилиндром в однородной полубезграничной жидкости [7]. Стационарная задача обтекания является одной из составляющих этих задач. Равномерное обтекание кругового цилиндра потоком безграничной двухслойной жидкости исследовано в [8]. Дифракция поверхностных и внутренних волн на круговом цилиндре в двухслойной жидкости с верхним слоем конечной глубины и нижним безграничным слоем рассмотрена в [9]. В [7–9] содержится полный обзор применения ММР для решения различных волновых задач. Решения, полученные ММР, представляют и большой самостоятельный интерес, так как с их помощью можно относительно легко исследовать влияние различных параметров задачи на волновые характеристики течения.

Численным методом, позволяющим с любой заданной точностью получить решение рассматриваемой задачи для цилиндра произвольного сечения, является метод моделирования границ особенностями [2]. Однако для кругового цилиндра ММР требует минимальных вычислительных затрат и может быть распространен на пространственную задачу обтекания сферы при использовании точечных мультиполей аналогично [10].

1. Постановка задачи. В невозмущенном состоянии верхний слой жидкости плотности ρ_1 и толщины H_1 занимает область $|x| < \infty$, $0 < y < H_1$, а нижний слой плотности $\rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) и толщины H_2 — область $|x| < \infty$, $-H_2 < y < 0$ (x, y — горизонтальная и вертикальная координаты). Равномерный поток со скоростью U набегаем на тело

в отрицательном направлении оси x . В каждом слое течение жидкости предполагается потенциальным, полный потенциал скоростей $\Phi_j(x, y)$ можно представить в виде

$$\Phi_j = -Ux + U\varphi_j,$$

где $\varphi_j(x, y)$ — потенциалы скоростей, отвечающие равномерному обтеканию тела с единичной скоростью; индекс $j = 1, 2$ введен для верхнего и нижнего слоя соответственно. В жидкости

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (0 < y < H_1), \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad (-H_2 < y < 0). \quad (1.1)$$

Согласно линейной теории волн граничные условия на свободной поверхности и границе раздела выполняются на горизонтальных плоскостях, соответствующих невозмущенному состоянию жидкости,

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (y = H_1); \quad (1.2)$$

$$(1 + \varepsilon) \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \quad (y = 0). \quad (1.3)$$

Остальные граничные условия имеют вид:

— на дне

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0 \quad (y = -H_2); \quad (1.4)$$

— в дальнем поле

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad \left| \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \right| < \infty \quad (x \rightarrow -\infty), \quad j = 1, 2; \quad (1.5)$$

— на круговом контуре S ($x^2 + [y + (-1)^q h]^2 = a^2$)

$$\frac{\partial\varphi_q}{\partial n} = n_x \quad (x, y \in S). \quad (1.6)$$

В формулах (1.2)–(1.6) $\mu = g/U^2$; g — ускорение силы тяжести; $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — внутренняя нормаль к контуру; a — радиус цилиндра; h — расстояние от центра цилиндра до границы раздела ($h > a$); $q = 1$ ($q = 2$) при расположении цилиндра в верхнем (нижнем) слое.

Если вместо свободной поверхности верхний слой ограничен твердой горизонтальной крышкой, то граничное условие (1.2) упрощается:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (y = H_1).$$

Гидродинамические силы $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$, действующие со стороны жидкости на обтекаемое тело, определяются интегрированием давления жидкости (без учета гидростатического члена)

$$p = -\rho_q U^2 \left(\frac{\partial\varphi_q}{\partial x} - \frac{1}{2} |\nabla\varphi_q|^2 \right)$$

по контуру S :

$$\mathbf{F} = \int_S p \mathbf{n} ds.$$

Вводя полярную систему координат r, θ с началом в центре контура S

$$x = r \sin \theta, \quad y + (-1)^q h = r \cos \theta \quad (q = 1, 2) \quad (1.7)$$

и учитывая, что для кругового контура

$$n_x = -\sin \theta, \quad n_y = -\cos \theta, \quad (1.8)$$

аналогично [7] получаем

$$(F_x, F_y) = \frac{\rho_q U^2}{2a} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial(\varphi_q - x)}{\partial \theta} \right]^2 (\sin \theta, \cos \theta) d\theta. \quad (1.9)$$

Далее рассмотрим решение поставленной задачи при расположении цилиндра в верхнем и нижнем слоях.

2. Цилиндр в верхнем слое. Используя мультиполи как фундаментальные решения уравнения Лапласа, решение уравнений (1.1) с учетом граничного условия (1.4) запишем в виде

$$\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a^{r^m} \left[p_m \left(\frac{\cos m\theta}{r^m} + f_m \right) + q_m \left(\frac{\sin m\theta}{r^m} + g_m \right) \right]; \quad (2.1)$$

$$\varphi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} a^m (p_m F_m + q_m G_m), \quad (2.2)$$

где

$$f_m = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \cos kx \{ A_1(k) \exp[k(y-h)] + B_1(k) \exp[k(h-y)] \} dk; \quad (2.3)$$

$$g_m = \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \sin kx \{ A_2(k) \exp[k(y-h)] + B_2(k) \exp[k(h-y)] \} dk; \quad (2.4)$$

$$F_m = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \cos kx C_1(k) \operatorname{ch} k(y+H_2) dk; \quad (2.5)$$

$$G_m = \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \sin kx C_2(k) \operatorname{ch} k(y+H_2) dk. \quad (2.6)$$

Используя известные соотношения

$$\frac{\exp(im\theta)}{r^m} = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \exp[k(y-h-ix)] dk & (y < h), \\ \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \exp[k(h-y+ix)] dk & (y > h) \end{cases} \quad (2.7)$$

и граничные условия (1.2), (1.3), можно определить неизвестные функции

$$A_{1,2}(k) = \frac{(k+\mu)(1+t_1)}{2Z_1(k)} [T_1'(k) \pm (-1)^m P_1(k) \exp(2kh)] \exp(-2kH_1); \quad (2.8)$$

$$B_{1,2}(k) = \frac{(1+t_1)T_1(k)}{2Z_1(k)} [(\mu-k) \exp(-2kh) \pm (-1)^m (k+\mu) \exp(-2kH_1)]; \quad (2.9)$$

$$C_j(k) = [(1+A_j) \exp(-kh) - B_j \exp(kh)] / \operatorname{sh} kH_2 \quad (j=1, 2). \quad (2.10)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Z_1(k) &= (k^2 + \varepsilon\mu^2)t_1t_2 + (1 + \varepsilon)k[k - \mu(t_1 + t_2)], \\ (T_1, P_1) &= (\varepsilon\mu \pm k)t_2 - k(1 + \varepsilon), \quad t_1 = \operatorname{th} kH_1, \quad t_2 = \operatorname{th} kH_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подынтегральные выражения в (2.3)–(2.6) могут иметь простые полюсы, являющиеся корнями уравнения

$$Z_1(k) = 0. \quad (2.12)$$

Как известно (см., например, [11]), в двухслойной жидкости конечной глубины, ограниченной свободной поверхностью, существуют две критические скорости набегающего потока U_1 и U_2 ($U_1 > U_2$):

$$U_{1,2}^2 = \frac{g}{2} \left[H \pm \sqrt{H^2 - \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon} H_1 H_2} \right],$$

где $H = H_1 + H_2$. При $U > U_1$ волновых движений в жидкости нет, при $U_2 < U < U_1$ возникает волна с максимальной амплитудой на свободной поверхности (поверхностная волна), при $U < U_2$ дополнительно к ней появляется внутренняя волна, максимальная амплитуда которой имеет место на границе раздела.

Отсюда следует, что уравнение (2.12) не имеет вещественных корней при $\mu < \mu_1$, имеет один корень k_1 при $\mu_1 < \mu < \mu_2$ и два корня $k_{1,2}$ ($k_2 < k_1$) при $\mu > \mu_2$, где $\mu_{1,2} = g/U_{1,2}^2$. Корень k_1 соответствует поверхностной волне, k_2 — внутренней. При интегрировании в (2.3)–(2.6) полюсы $k_{1,2}$ обходятся снизу.

С учетом условия излучения в дальнем поле (1.5) соотношения (2.3), (2.4) примут вид

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \left\{ \text{p.v.} \int_0^\infty k^{m-1} \cos kx [A_1 \exp(k(y-h)) + B_1 \exp(k(h-y))] dk + \right. \\ &\quad \left. + \pi \sum_{l=1}^2 k_l^{m-1} \sin k_l x [A_1^0(k_l) \exp(k_l(y-h)) + B_1^0(k_l) \exp(k_l(h-y))] \right\}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!} \left\{ \text{p.v.} \int_0^\infty k^{m-1} \sin kx [A_2 \exp(k(y-h)) + B_2 \exp(k(h-y))] dk - \right. \\ &\quad \left. - \pi \sum_{l=1}^2 k_l^{m-1} \cos k_l x [A_2^0(k_l) \exp(k_l(y-h)) + B_2^0(k_l) \exp(k_l(h-y))] \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

(символы *p.v.* означают интеграл в смысле главного значения, индекс 0 — вычет соответствующей функции в точке $k = k_l$). В (2.13), (2.14) слагаемые под знаком суммы учитываются только при наличии соответствующих корней уравнения (2.12).

Построенное решение удовлетворяет уравнениям (1.1) и всем граничным условиям задачи (1.2)–(1.5), кроме условия на обтекаемом теле. Для учета граничного условия (1.6) на поверхности тела используются известные соотношения

$$\begin{aligned} \exp[k(y-h+ix)] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr)^m}{m!} \exp(im\theta), \\ \exp[k(h-y+ix)] &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(kr)^m}{m!} \exp(-im\theta). \end{aligned}$$

Тогда (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \sum_{m=1}^{\infty} p_m a^m \frac{\cos m\theta}{r^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m}{r_0^m} \cos m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{(n-1)!} \left[p_n I_{n+m-1} + \right. \\ & \left. + \pi q_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} J_{n+m-1}(k_l) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} q_m a^m \frac{\sin m\theta}{r^m} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m!} \sin m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{(n-1)!} \left[q_n M_{n+m-1} + \pi p_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} L_{n+m-1}(k_l) \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$I_{n+m-1} = \text{p.v.} \int_0^{\infty} k^{n+m-1} [A_1 + (-1)^m B_1] dk; \quad (2.16)$$

$$M_{n+m-1} = \text{p.v.} \int_0^{\infty} k^{n+m-1} [(-1)^m B_2 - A_2] dk; \quad (2.17)$$

$$J_{n+m-1}(k_l) = A_2^0(k_l) + (-1)^m B_2^0(k_l); \quad (2.18)$$

$$L_{n+m-1}(k_l) = A_1^0(k_l) - (-1)^m B_1^0(k_l). \quad (2.19)$$

При этом в выражениях (2.8), (2.9) для $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ следует заменить m на n .

Дифференцируя (2.15) по r и учитывая (1.8), получим бесконечную систему линейных уравнений для определения p_m и q_m

$$p_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{m+n}}{m!(n-1)!} \left[p_n I_{n+m-1} + \pi q_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} J_{n+m-1}(k_l) \right] = 0, \quad (2.20)$$

$$q_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{m+n}}{m!(n-1)!} \left[q_n M_{n+m-1} + \pi p_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} L_{n+m-1}(k_l) \right] = -a \delta_{m1},$$

где δ_{m1} — символ Кронекера. При численном решении этой системы используется метод редукции и учитывается только конечное число членов, необходимое для достижения заданной точности.

После определения p_m и q_m можно найти все характеристики течения. Подставляя соотношения (2.20) в (2.15), получим выражение для потенциала на контуре тела

$$\varphi_1|_{r=a} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (p_m \cos m\theta + q_m \sin m\theta) + a \sin \theta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{(m-1)!} \left[p_m I_{m-1} + \pi q_m \sum_{l=1}^2 k_l^{m-1} J_{m-1}(k_l) \right]. \quad (2.21)$$

С учетом (1.9) гидродинамические силы равны

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{2\pi \rho_1 U^2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(p_m q_{m+1} - q_m p_{m+1}), \\ F_y &= \frac{2\pi \rho_1 U^2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(p_m p_{m+1} + q_m q_{m+1}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Согласно (2.1) вдали от тела потенциал верхнего слоя имеет вид

$$\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a^m (p_m f_m + q_m g_m) \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

причем при $x \rightarrow \infty$ $f_m = g_m = 0$, а при $x \rightarrow -\infty$

$$f_m = \frac{2\pi(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=1}^2 k_l^{m-1} \sin k_l x [A_1^0(k_l) \exp(k_l(y-h)) + B_1^0(k_l) \exp(k_l(h-y))],$$

$$g_m = \frac{2\pi(-1)^m}{(m-1)!} \sum_{l=1}^2 k_l^{m-1} \cos k_l x [A_2^0(k_l) \exp(k_l(y-h)) + B_2^0(k_l) \exp(k_l(h-y))].$$

С учетом (2.10) нетрудно определить и потенциал нижнего слоя φ_2 в дальнем поле. Волновое движение существует только за телом и в общем случае представляет собой суперпозицию двух волн: поверхностной и внутренней с волновыми числами k_1 и k_2 соответственно. Зная потенциалы в дальнем поле, можно определить вертикальные возвышения свободной поверхности $\eta_1(x)$ и границы раздела $\eta_2(x)$ вдали за телом

$$\eta_1(x) = \frac{U^2}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{y=H_1}, \quad \eta_2(x) = \frac{U^2}{\varepsilon g} \frac{\partial}{\partial x} [(1+\varepsilon)\varphi_2 - \varphi_1]_{y=0}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения данной задачи. При $\varepsilon = 0$ имеем однослойную жидкость глубины H . Этот случай наиболее изучен, и расчеты различных характеристик волнового движения для кругового профиля представлены в [12–14]. В данном течении возникает только поверхностная волна при выполнении условия $U < \sqrt{gH}$.

При бесконечной глубине нижнего слоя в двухслойной жидкости ($H_2 \rightarrow \infty$) в (2.11) $Z_1(k) = (\mu - k)[(\varepsilon\mu - k)t_1 - k(1 + \varepsilon)]$. Поверхностная волна возбуждается при любой скорости набегающего потока, и ей соответствует полюс $k_1 = \mu$. Внутренняя волна возникает только при $U < \sqrt{\varepsilon g H_1 / (1 + \varepsilon)}$.

Полученное решение значительно упрощается для безграничной двухслойной жидкости ($H_1, H_2 \rightarrow \infty$). В этом случае внутренняя волна существует при любых скоростях потока и соотношения (2.13), (2.14) в комплексной записи принимают вид

$$f_m + i g_m = \frac{(-1)^m \gamma}{(m-1)!} \left[\text{p.v.} \int_0^\infty k^{m-1} \frac{k-\mu}{k-\nu} \exp(-k(y+h+ix)) dk + \right. \\ \left. + i\pi \nu^{m-1} (\nu - \mu) \exp(-\nu(y+h+ix)) \right]$$

($\nu = \gamma\mu$, $\gamma = \varepsilon/(2 + \varepsilon)$). Введем представление

$$S_m = p_m + i q_m, \quad (2.23)$$

тогда система (2.20) имеет вид

$$S_m - (-1)^m \gamma \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{n+m} S_n}{m!(n-1)!} [I_{n+m-1} - i\pi \nu^{n+m-1} (\nu - \mu) \exp(-2\nu h)] = -i a \delta_{m1}.$$

Здесь

$$I_N = \text{p.v.} \int_0^\infty k^N \frac{k-\mu}{k-\nu} \exp(-2kh) dk$$

и вычисляется по рекуррентной формуле

$$I_N = \left(\frac{N}{2h} - \mu \right) \frac{(N-1)!}{(2h)^N} + \nu I_{N-1}, \quad I_0 = \frac{1}{2h} - (\nu - \mu) \text{Ei}(2\nu h) \exp(-2\nu h), \quad (2.24)$$

где $\text{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция (см., например, [15]). Расчеты гидродинамической нагрузки для этого случая приведены в [8].

Представляет интерес исследование данной задачи в предельных случаях $U \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow \infty$) и $U \rightarrow \infty$ ($\mu \rightarrow 0$). При $\mu \rightarrow \infty$ гравитационные силы преобладают над инерционными, граничные условия (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (y = H_1, \quad y = 0),$$

свободная поверхность, так же как и граница раздела, становится эквивалентной твердой стенке независимо от величины скачка плотности. Задача сводится к обтеканию кругового профиля, расположенного между горизонтальными твердыми стенками в слое толщины H_1 . Интегралы в (2.16), (2.17) сводятся к сумме интегралов вида

$$V_N = \int_0^{\infty} k^N \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th} \beta k}\right) \exp(-\alpha k) dk \quad (N > 0, \quad \alpha > 0),$$

которые могут быть вычислены с использованием дзета-функции Римана ζ (формула (3.551(3)) из [16]):

$$V_N = \frac{N!}{2^N \beta^{N+1}} \zeta\left(N+1, \frac{\alpha}{2\beta}\right).$$

В [3] отмечено, что подъемная сила F_y терпит разрыв при $\varepsilon = 0$ и $\mu \rightarrow \infty$, так как, полагая вначале $\varepsilon = 0$, а затем переходя к пределу при $\mu \rightarrow \infty$, получим обтекание тела, расположенного между твердыми стенками в слое толщины H .

Для невесомой жидкости ($\mu \rightarrow 0$) граничное условие (1.2) и первое условие в (1.3) на поверхности раздела принимают вид

$$\varphi_1 = 0 \quad (y = H_1), \quad (1 + \varepsilon)\varphi_2 = \varphi_1 \quad (y = 0).$$

Здесь также не возникает волновых движений, и, следовательно, волновое сопротивление F_x равно нулю. При $\varepsilon = 0$ разрыв подъемной силы отсутствует.

Рассмотрим также случай, когда верхний слой ограничен сверху не свободной поверхностью, а непроницаемой плоской крышкой. При этом выражения (2.1)–(2.6) будут иметь прежний вид, а вместо (2.8)–(2.11) получим

$$A_{1,2}(k) = \frac{1 + t_1}{2Z_2(k)} [T_1(k) \pm (-1)^m P_1(k) \exp(2kh)] \exp(-2kH_1),$$

$$B_{1,2}(k) = \frac{(1 + t_1)T_1(k)}{2Z_2(k)} [\exp(-2kh) \pm (-1)^m \exp(-2kH_1)],$$

где $Z_2(k) = \varepsilon \mu t_1 t_2 - k[t_2 + (1 + \varepsilon)t_1]$. Единственный вещественный корень уравнения $Z_2(k) = 0$ существует только при $U < \sqrt{\varepsilon g H_1 H_2} / [H_2 + (1 + \varepsilon)H_1]$ и соответствует внутренней волне. Вводя указанные изменения, получим, что представленное выше решение полностью повторяется и в этом случае.

3. Цилиндр в нижнем слое. При расположении цилиндра под границей раздела метод решения во многом повторяет изложенный выше и будет описан кратко. Решение уравнений (1.1) представим в виде

$$\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a^m (p_m F_m + q_m G_m), \quad \varphi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} a^m \left[p_m \left(\frac{\cos m\theta}{r^m} + f_m \right) + q_m \left(\frac{\sin m\theta}{r^m} + g_m \right) \right],$$

где

$$F_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{\infty} k^{m-1} \cos kx [C_1(k) \operatorname{ch} k(y - H_1) + D_1(k) \operatorname{sh} k(y - H_1)] dk,$$

$$G_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} \sin kx [C_2(k) \operatorname{ch} k(y-H_1) + D_2(k) \operatorname{sh} k(y-H_1)] dk,$$

$$f_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} \cos kx \{A_1(k) \exp [k(y+h)] + B_1(k) \exp [-k(y+h)]\} dk,$$

$$g_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty k^{m-1} \sin kx \{A_2(k) \exp [k(y+h)] + B_2(k) \exp [-k(y+h)]\} dk.$$

Используя (1.7) и аналог соотношений (2.7) для данного случая, а также граничные условия (1.2)–(1.4), получим

$$A_{1,2}(k) = \frac{(k+\mu)(1+t_2)T_2(k)}{2Z_1(k)} [\exp(-2kh) \pm (-1)^m \exp(-2kH_2)],$$

$$B_{1,2}(k) = \frac{(1+t_2)}{2Z_1(k)} \exp(-2kH_2) [(k+\mu)T_2(k) \mp (-1)^m (k-\mu)P_2(k) \exp(2kh)], \quad (3.1)$$

$$C_j(k) = \frac{\mu[A_j \exp(kh) - (1+B_j) \exp(-kh)]}{k \operatorname{ch} kH_1 - \mu \operatorname{sh} kH_1}, \quad D_j = \frac{k}{\mu} C_j \quad (j=1, 2),$$

где $(T_2, P_2) = (\varepsilon\mu \pm k)t_1 - k(1+\varepsilon)$. Потенциал в нижнем слое

$$\varphi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} p_m a^m \frac{\cos m\theta}{r^{m+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^m}{m!} \cos m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \left[p_n I_{n+m-1} + \pi q_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} J_{n+m-1}(k_l) \right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} q_m a^m \frac{\sin m\theta}{r^{m+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m!} \sin m\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} \left[q_n M_{n+m-1} + \pi p_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} L_{n+m-1}(k_l) \right]. \quad (3.2)$$

Выражения для I_N и L_N совпадают по форме с приведенными в (2.16), (2.19), а выражения для M_N и J_N отличаются от (2.17), (2.18) знаком.

Система для определения p_m и q_m имеет вид

$$p_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m+n}}{m!(n-1)!} \left[p_n I_{n+m-1} + \pi q_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} J_{n+m-1}(k_l) \right] = 0,$$

$$q_m - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{m+n}}{m!(n-1)!} \left[q_n M_{n+m-1} + \pi p_n \sum_{l=1}^2 k_l^{n+m-1} L_{n+m-1}(k_l) \right] = -a\delta_{m1}. \quad (3.3)$$

Для потенциала φ_2 на контуре цилиндра справедливо выражение (2.21). Соотношения для гидродинамических сил после замены ρ_1 на ρ_2 полностью совпадают с (2.22). Для безграничной двухслойной жидкости ($H_1, H_2 \rightarrow \infty$)

$$f_m + ig_m = -\frac{\gamma}{(m-1)!} \left[\text{p.v.} \int_0^\infty k^{m-1} \frac{k+\mu}{k-\nu} \exp(k(y-h+ix)) dk - i\pi\nu^{m-1}(\nu+\mu) \exp(\nu(y-h+ix)) \right].$$

Система уравнений для определения S_m (2.23) имеет вид

$$S_m + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+m} S_n}{m!(n-1)!} [I_{n+m-1} + i\pi\nu^{n+m-1}(\nu+\mu) \exp(-2\nu h)] = -ia\delta_{m1},$$

где

$$I_N = \text{p.v.} \int_0^{\infty} k^N \frac{k + \mu}{k - \nu} \exp(-2kh) dk.$$

Значения I_N могут быть определены по рекуррентным формулам аналогично (2.24). Расчеты гидродинамических нагрузок для безграничной двухслойной жидкости представлены в [6, 8].

При замене свободной поверхности твердой крышкой вместо (3.1) получим

$$A_{1,2}(k) = \frac{T_3(1+t_2)}{2Z_2(k)} [\exp(-2kh) \pm (-1)^m \exp(-2kH_2)],$$

$$B_{1,2}(k) = \frac{(1+t_2)}{2Z_2(k)} [T_3 \pm (-1)^m \exp(2kh)] \exp(-2kH_2),$$

$$C_j = [(1+B_j) \exp(-kh) - A_j \exp(kh)] / \text{sh } kH_1, \quad D_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

где $(T_3, P_3) = [\mu\epsilon \pm k(1+\epsilon)]t_1 - k$. С учетом этих изменений выражения (3.2), (3.3) полностью повторяются и в этом случае.

4. Численные расчеты. Проведенное сопоставление численных расчетов для частных случаев изложенных задач совпало с известными результатами [6-8, 12-14].

Расчеты гидродинамической нагрузки в зависимости от числа Фруда $\text{Fr} = U/\sqrt{ga}$ представлены на рис. 1 для цилиндра, помещенного в верхнем слое, на рис. 2 — в нижнем слое. Введены обозначения $(\bar{F}_x, \bar{F}_y) = (-F_x, F_y)/\rho_q a U^2$ ($q = 1, 2$) и различные масштабы на оси абсцисс в интервалах $[0; 0, 2]$ и $[0, 2; 4]$.

На рис. 1, 2 кривыми 1, 2 показаны результаты расчетов для случая, когда верхний слой ограничен свободной поверхностью при $\epsilon = 0,03$, кривыми 3, 4 — аналогичные результаты при $\epsilon = 0$ (однослойная жидкость глубины H), кривыми 5, 6 — результаты расчетов для двухслойной жидкости под крышкой ($\epsilon = 0,03$). Результаты расчетов, представленные на рис. 1, получены при постоянных значениях толщины верхнего слоя и глубины погружения цилиндра: $H_1/a = 4$, $h/a = 2$. Нечетные номера кривых соответствуют $H_2/a = 1$, четные — $H_2/a = 10$. Стрелками указаны значения критических чисел Фруда, при этом стрелки, направленные вверх, отвечают $H_2/a = 1$, вниз — $H_2/a = 10$. На рис. 2 представлены результаты расчетов для цилиндра в нижнем слое при $H_1/a = 1$, $h/a = 2$. Нечетные номера кривых соответствуют $H_2/a = 4$, четные — $H_2/a = 10$. На рис. 2 стрелки, направленные вверх, показывают критические числа Фруда при $H_2/a = 4$, вниз — при $H_2/a = 10$. На рис. 1, б и 2, б указаны критические числа Фруда для двухслойной жидкости, ограниченной свободной поверхностью, на рис. 1, в и 2, в — для двухслойной жидкости под крышкой и однослойной жидкости со свободной поверхностью. Горизонтальными штрихпунктирными отрезками на рис. 1, 2 показаны предельные значения подъемной силы в невесомой жидкости ($\text{Fr} \rightarrow \infty$).

Проведенное сопоставление с результатами работы [6] показало, что для получения точности расчетов до 10^{-4} достаточно учитывать только восемь членов при решении линейных систем (2.20), (3.3).

Особенность поведения различных компонент гидродинамической нагрузки в жидкости конечной глубины — появление разрывов при переходе через критические скорости. Это наиболее выражено при сопоставимых размерах диаметра цилиндра и полной глубины жидкости. С увеличением толщины слоев разрывы в значениях гидродинамических сил уменьшаются и полностью исчезают при бесконечной глубине (см., например, [1]). Разрывы в значениях гидродинамических характеристик при переходе через критическую скорость являются недостатком используемого линейного приближения, и в [13]

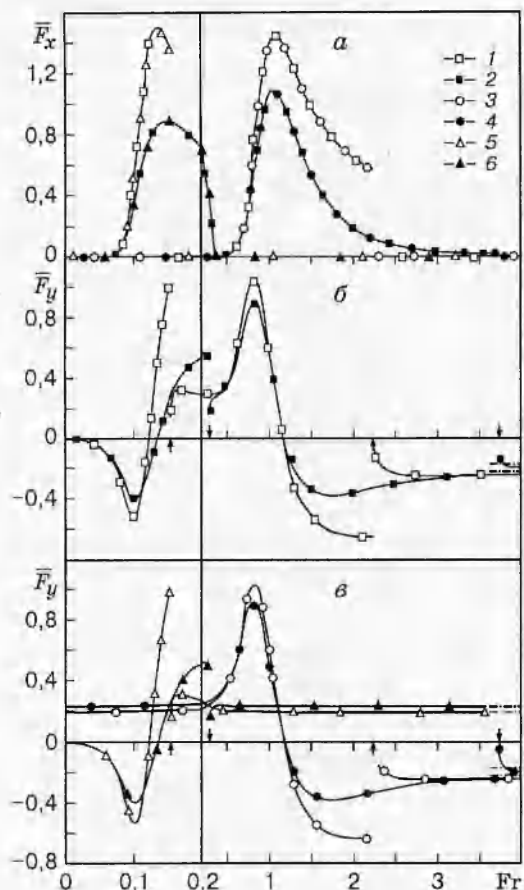


Рис. 1

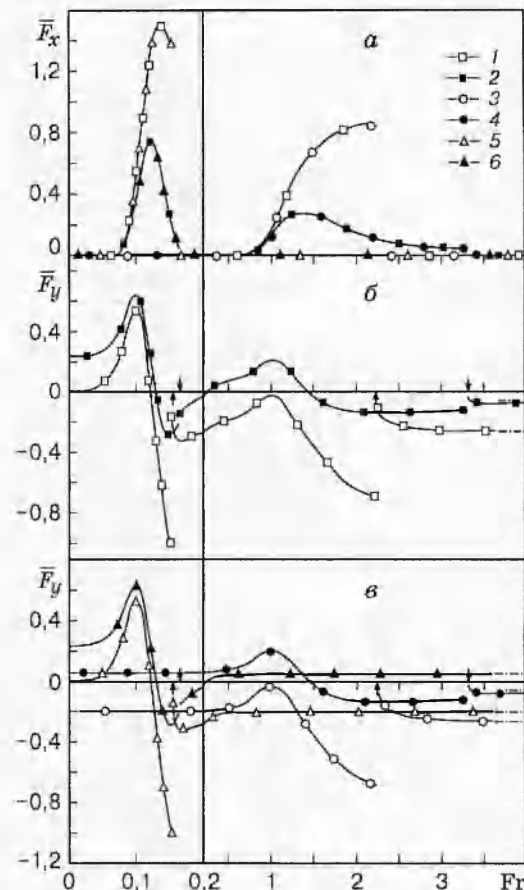


Рис. 2

предлагается в окрестности этих скоростей учитывать нелинейные эффекты с помощью длинноволнового приближения.

Волновое сопротивление существенно увеличивается при уменьшении полной глубины жидкости (рис. 1, *a* и 2, *a*), что связано с увеличением горизонтальной скорости в окрестности тела благодаря эффекту загромождения потока и возрастания вследствие этого амплитуд волн (подробнее см. [14]).

Из анализа рис. 1, 2 следует, что влияние стратификации незначительно при больших скоростях потока, когда возбуждается только поверхностная волна, а приближение «твердой крышки» удовлетворительно описывает гидродинамическую нагрузку при малых скоростях потока, когда наиболее интенсивно генерируется внутренняя волна.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта № 43 СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И. В. Влияние внутренних волн на гидродинамические характеристики погруженного тела // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 6. С. 732–738.
2. Лотфуллин М. В., Стурова И. В., Филиппов С. И. Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1994. Т. 3, № 8. С. 106–115.

3. **Wu G. X., Miloh T., Zilman G.** Numerical solution of a hydrofoil moving near an interface // *J. Ship Res.* 1996. V. 40, N 4. P. 269–277.
4. **Горелов Д. Н., Горлов С. И.** Линейная задача о движении профиля под границей раздела двух тяжелых жидкостей // *ПМТФ.* 1996. Т. 37, № 5. С. 43–47.
5. **Горлов С. И.** Движение профиля над границей раздела двух тяжелых жидкостей // Там же. С. 48–51.
6. **Хабахпашева Т. И.** Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 1996. № 1. С. 91–97.
7. **Wu G. X.** Radiation and diffraction of water waves by a submerged circular cylinder at forward speed // *J. Hydrodynam.* 1993. V. 5, N 4. P. 85–96.
8. **Wu G. X.** The wave resistance and lift on a circular cylinder in stratified fluid // *J. Hydrodynam.* 1990. V. 2, N 4. P. 52–58.
9. **Linton C. M., McIver M.** The interaction of waves with horizontal cylinders in two-layer fluids // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 304. P. 213–229.
10. **Wu G. X.** Radiation and diffraction by a submerged sphere advancing in water waves of finite depth // *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1995. V. 448, N 1932. P. 29–54.
11. **Овсянников Л. В.** Лагранжевы приближения в теории волн // *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.* Новосибирск: Наука, 1985. С. 10–77.
12. **Giesing J. P., Smith A. M. O.** Potential flow about two-dimensional hydrofoils // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28, pt 1. P. 113–129.
13. **Mei C. S., Chen H. S.** A hybrid element method for steady linearized free-surface flows // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* 1976. V. 10, N 5. P. 1153–1175.
14. **Eatock Taylor R., Wu G. X.** Wave resistance and lift on cylinders by a coupled element technique // *Intern. Shipbuild. Progr.* 1986. V. 33, N 377. P. 2–9.
15. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
16. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 21/III 1997 г.
