

ЛИТЕРАТУРА

1. Керкхоф Ф. Модуляция хрупкой трещины упругими волнами.— В кн.: Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. М., «Мир», 1971.
2. Смит К. Основы физики металлов. М., 1959.
3. Златин Н. А. и др. Временные закономерности процесса разрушения металлов при интенсивных нагрузках.— ФТТ, 1974, т. 16, вып. 6.
4. Бахрах С. М. и др. Исследование свойств металлов в условиях динамического многоосного растяжения.— В кн.: Тезисы докл. I Всесоюз. симпозиума по импульсному давлению. М., 1973.
5. Мирзаев И. М., Никифоровский В. С. Исследование распространения плоских волн и разрушения в упругих и неидеально упругих конструкциях.— ФТПРПИ, 1973, № 2.
6. Никифоровский В. С., Сабитова С. И., Стреляев А. Е. О постановке некоторой обратной задачи изучения прочностных характеристик материалов.— В кн.: V Всесоюз. симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн. Алма-Ата, «Наука», 1971. К вопросу о разрушении твердых тел при динамическом нагружении.— ФТПРПИ, 1970, № 5.
7. Schall R., Thomer G. Zur Bestimmung Dynamischer Zugfestigkeiten aus dem Abplatzeffect.— «Wehrtechnische Monatshefte», 1965, Н. 7.
8. Kumaо H. Fragmentation of rock through blasting.— «J. Industr. Explos. Soc. Japan», 1956, N 1.
9. Юревич Г. Г., Беляков В. Д., Севастьянов Б. Н. Охрана горных выработок от воздействия взрывов. М., «Недра», 1972.
10. Broberg K. Some aspects of the mechanism of scabbing.— In: Stress wave propagation in materials. N. Y., 1960.
11. Кольский Г., Рейдер Д. Волны напряжений и разрушение.— В кн.: Разрушение. Ч. 1. М., «Мир», 1973.
12. Огурцов К. И. Волны напряжений в упругой плите.— ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
13. Никифоровский В. С., Онисьюк Н. И. К вопросу о тыльном отколе в упругой плите.— ФТПРПИ, 1967, № 6.
14. Гаек Ю. В. Исследование процесса разрушения уступа и выбор рационального замедления при взрывании скважинных зарядов на карьерах. Автореф. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Ленингр. ун-т, 1961.
15. Беляков В. Д. Исследование методом фотоупругости действия упругих волн напряжений на обнаженные поверхности горных выработок. Автореф. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. М., ИГД АН СССР, 1968.

УДК 534.26

О ДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СИСТЕМ ТРЕЩИН
В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

П. А. Мартынюк, Э. Б. Поляк

(Новосибирск)

Задачи о динамическом воздействии на изолированную трещину, расположенную в бесконечном упругом теле, решались в работах [1—4]. Представляет интерес получить решение динамических задач, отвечающих более сложной геометрии, и выяснить влияние наличия соседних трещин, систем трещин, границ тела.

Для антиплоской деформации математическое описание упругой среды существенно проще, чем для плоской деформации, но характерные черты явления она отражает верно. В данном случае удастся получить точные решения предельных задач, когда длина трещин много больше или расстояния между ними, или расстояния до границы полупространства. Используемый метод решения без особых затруднений переносится и на случай плоской деформации.

1. Система параллельных трещин. Рассматривается упругое изотропное пространство, содержащее бесконечно большое число трещин длиной $2l_0$ и $2L$, расположенных параллельно друг другу на расстоянии $2h$ одна

от другой. В условиях антиплоской деформации единственная отличная от нуля компонента вектора перемещения $w = w(x, y, t)$. Введем безразмерные переменные

$$(1.1) \quad \langle L, h, x, y, w \rangle' = \langle L, h, x, y, w \rangle / l_0; \quad \tau' = \tau / \mu; \quad t' = tc / l_0,$$

где c — скорость поперечных волн; μ — модуль сдвига. Штрихи в дальнейшем для простоты записи опустим. Тогда уравнение движения изотропного упругого тела и ненулевые компоненты тензора напряжения имеют вид

$$(1.2) \quad \partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 - \partial^2 w / \partial t^2 = 0; \quad \tau_{yz} = \partial w / \partial y; \quad \tau_{xz} = \partial w / \partial x.$$

Полагаем, что при $t < 0$ $w = 0$ всюду, а при $t = 0$ $w = 0$ и $\dot{w} = 0$ и прилагаемые напряжения τ_{yz} — четные функции по x . В силу симметрии задачи относительно любой прямой, проходящей через одну из трещин, ограничимся рассмотрением бесконечной полосы $-h < y < +h$. Граничные условия при $t > 0$ имеют вид

$$(1.3) \quad \tau_{yz} = \begin{cases} -p(x, t), & y = h, |x| < L, \\ +p(x, t), & y = -h, |x| < L; \\ w = 0, & y = h, |x| > L \text{ и } y = -h, |x| > L. \end{cases}$$

Сделаем интегральные преобразования Лапласа по t и косинус-преобразование Фурье по x , для уравнения движения (1.2) получим

$$\partial^2 \bar{w} / \partial y^2 - (s^2 + p^2) \bar{w} = 0, \quad \bar{w} = w(s, y, p).$$

Общее решение этого уравнения

$$w(s, y, p) = A(s, p) \operatorname{sh} \alpha y + B(s, p) \operatorname{ch} \alpha y, \quad \alpha = \sqrt{s^2 + p^2}.$$

Подставляя его в (1.3), получим систему уравнений для определения $A(s, p)$ и $B(s, p)$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} 2/\pi \int_0^\infty [A(s, p) \operatorname{sh} \alpha h + B(s, p) \operatorname{ch} \alpha h] \cos(sx) ds &= 0, \quad x > L; \\ 2/\pi \int_0^\infty [-A(s, p) \operatorname{sh} \alpha h + B(s, p) \operatorname{ch} \alpha h] \cos(sx) ds &= 0, \quad x > L; \\ 2/\pi \int_0^\infty \alpha [A(s, p) \operatorname{ch} \alpha h + B(s, p) \operatorname{sh} \alpha h] \cos(sx) ds &= -P(x, p), \quad 0 < x < L; \\ 2/\pi \int_0^\infty \alpha [A(s, p) \operatorname{ch} \alpha h - B(s, p) \operatorname{sh} \alpha h] \cos(sx) ds &= +P(x, p), \quad 0 < x < L, \end{aligned}$$

где
$$P(x, p) = \int_0^\infty p(x, t) e^{-pt} dt.$$

Из теории трещин известно, что перемещения в носике трещины должны вести себя следующим образом:

$$\begin{aligned} w(x, h, p) &\sim (1 - x^2)^{1/2}, \quad x = 1 - \varepsilon; \\ w(x, -h, p) &\sim (L^2 - x^2)^{1/2}, \quad x = L - \varepsilon; \quad \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение две функции $\varphi(t, p)$ и $\psi(t, p)$, определенные по t на интервалах $[0, 1]$ и $[0, L]$ соответственно равенствами

$$(1.5) \quad w(x, h, p) = \int_x^1 \frac{t\varphi(t, p)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt; \quad w(x, -h, p) = \int_x^L \frac{t\psi(t, p)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt.$$

С использованием (1.5) первые два уравнения из (1.4) можно записать в виде

$$(1.6) \quad A(s, p) \operatorname{sh} \alpha h + B(s, p) \operatorname{ch} \alpha h = \pi/2 \int_0^1 t\varphi(t, p) J_0(st) dt = \pi\Phi/2;$$

$$-A(s, p) \operatorname{sh} \alpha h + B(s, p) \operatorname{ch} \alpha h = \pi/2 \int_0^L t\psi(t, p) J_0(st) dt = \pi\Psi/2.$$

Отсюда находим $A(s, p)$ и $B(s, p)$

$$(1.7) \quad A(s, p) = \pi/4 \cdot [\Phi - \Psi] \operatorname{sh}^{-1} \alpha h; \quad B(s, p) = \pi/4 \cdot [\Phi + \Psi] \operatorname{ch}^{-1} \alpha h.$$

Проинтегрировав третье и четвертое уравнения из (1.4) по x от 0 до x и используя (1.6), (1.7), получим

$$(1.8) \quad \int_0^\infty \frac{\alpha F}{2s} \Phi \sin(sx) ds - \int_0^\infty \frac{\alpha G}{2s} \Psi \sin(sx) ds = - \int_0^x P(x, p) dx;$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha G}{2s} \Phi \sin(sx) ds - \int_0^\infty \frac{\alpha F}{2s} \Psi \sin(sx) ds = \mp \int_0^x P(x, p) dx,$$

где $F = \operatorname{cth} \alpha h + \operatorname{th} \alpha h$; $G = \operatorname{cth} \alpha h - \operatorname{th} \alpha h$. Первое уравнение справедливо при $0 \leq x \leq 1$, а второе — при $0 \leq x \leq L$.

Приведем уравнения (1.8) к двум интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Покажем это на примере первого уравнения из (1.8). Введем функцию $g(s, p)$ равенством

$$(1.9) \quad \alpha F/(2s) = 1 + g(s, p), \quad g(s) \sim 0(s^{-2}) \text{ при } s \rightarrow \infty.$$

Подставляя ее в первое уравнение из (1.8), получаем интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^x \frac{t\varphi(t, p)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = H(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$H(x) = - \int_0^x P(x, p) dx - \int_0^1 t\varphi(t, p) dt \int_0^\infty g(s, p) J_0(st) \sin(sx) ds +$$

$$+ \int_0^L t\psi(t, p) dt \int_0^\infty \frac{\alpha G}{2s} J_0(st) \sin(sx) ds,$$

решение которого $\varphi(t, p) = 2/\pi \int_0^t \frac{H'(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}$. Подставив сюда $H'(x)$ и проинтегрировав по x , получим

$$(1.10) \quad \varphi_1(t, p) + \int_0^1 \varphi_1(\tau, p) K_2(\tau, t) d\tau - \int_0^L \psi_1(\tau, p) K_1(\tau, t) d\tau = -\sqrt{t},$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

Совершенно аналогично и для второго уравнения из (1.8) получаем при $0 \leq t \leq L$

$$(1.11) \quad \psi_1(t, p) + \int_0^L \psi_1(\tau, p) K_2(\tau, t) d\tau - \int_0^1 \varphi_1(\tau, p) K_1(\tau, t) d\tau = \pm \sqrt{t},$$

$$\text{где} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1(t, p) \\ \psi_1(t, p) \end{bmatrix} = \sqrt{t} \begin{bmatrix} \varphi(t, p) \\ \psi(t, p) \end{bmatrix} \left[2/\pi \int_0^t \frac{P(x, p)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \right]^{-1};$$

$$(1.12) \quad K_1(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^\infty \alpha G/2 \cdot J_0(st) J_0(s\tau) ds;$$

$$K_2(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^\infty g(s, p) s J_0(st) J_0(s\tau) ds.$$

В частном случае $L = 1$ уравнения (1.10), (1.11) для одинаковых знаков в правых частях сводятся к уравнению

$$(1.13) \quad \varphi_1(t, p) + \int_0^1 \varphi_1(\tau, p) K_3(\tau, t) d\tau = -\sqrt{t},$$

$$K_3(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^\infty [\alpha \operatorname{th} \alpha h - s] J_0(st) J_0(s\tau) ds,$$

а для разных знаков в правых частях — к уравнению

$$(1.14) \quad \varphi_1(t, p) + \int_0^1 \varphi_1(\tau, p) K_4(\tau, t) d\tau = -\sqrt{t},$$

$$K_4(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^\infty [\alpha \operatorname{cth} \alpha h - s] J_0(st) J_0(s\tau) ds.$$

Эти уравнения отвечают задаче о центрально расположенной трещине в слое толщиной $2h$, границы которого свободны ($\tau_{yz} = 0$ (1.13)) и зажаты ($w = 0$ (1.14)).

Основной характеристикой задач теории трещин является коэффициент интенсивности напряжения K в носике трещины при особенности порядка $(\Delta x)^{-1/2}$ ($L \geq 1$, $\Delta x \ll 1$). Рассмотрим выражения для $\tau_{yz}(x, \pm h, p)$, покажем, что они имеют особенность нужного порядка, и найдем коэффициенты при этой особенности

$$\tau_{yz}(x, h, p) = \int_0^\infty \alpha F/2 \cdot \Phi \cos(sx) ds - \int_0^\infty \alpha G/2 \cdot \Psi \cos(sx) ds,$$

$$\tau_{yz}(x, -h, p) = - \int_0^\infty \alpha F/2 \cdot \Psi \cos(sx) ds + \int_0^\infty \alpha G/2 \cdot \Phi \cos(sx) ds.$$

Проинтегрировав в (1.6) по частям, получим

$$\Phi = 1/s \cdot [\varphi(1, p) J_1(s) - \int_0^1 \varphi'(t, p) t J_1(st) dt];$$

$$\Psi = 1/s \cdot \left[\psi(L, p) L J_1(sL) - \int_0^L \psi'(t, p) t J_1(st) dt \right].$$

Очевидно, что вторые слагаемые в выражениях для τ_{yz} не имеют особенностей. Беря в выражениях для Φ и Ψ неинтегральные части и учитывая (1.9), запишем только члены, дающие особенность,

$$\begin{aligned}\tau_{yz}(x, h, p) &= \int_0^\infty \varphi(1, p) J_1(s) \cos(sx) ds + \dots, \\ \tau_{yz}(x, -h, p) &= - \int_0^\infty \psi(L, p) L J_1(Ls) \cos(sx) ds + \dots\end{aligned}$$

Используя известную формулу [5]

$$\int_0^\infty J_1(Ls) \cos(sx) ds = - \frac{L}{\sqrt{x^2 - L^2} [x + \sqrt{x^2 - L^2}]},$$

можно выписать коэффициенты при особенностях в носиках трещин

$$\begin{aligned}(1.15) \quad \tau_{yz}(l_0 + \Delta x, h, p) &\simeq - \frac{\varphi(1, p)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l_0}{\Delta x}} = \\ &= \frac{K_1(p)}{\sqrt{\Delta x}} = - \frac{P_1 \varphi_1(1, p)}{\sqrt{2}} \sqrt{l_0} (\Delta x)^{-1/2}, \\ \tau_{yz}(L + \Delta x, -h, p) &\simeq \frac{\psi(L, p)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{L l_0}{\Delta x}} = \frac{K_2(p)}{\sqrt{\Delta x}} = \\ &= \frac{P_L \psi_1(L, p)}{\sqrt{2}} \sqrt{l_0} (\Delta x)^{-1/2},\end{aligned}$$

где

$$P_1 = 2/\pi \int_0^1 \frac{P(x, p)}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad P_L = 2/\pi \int_0^L \frac{P(x, p)}{\sqrt{L^2-x^2}} dx.$$

Уравнения (1.10)–(1.14) считались численно. Ядра уравнений $K_i(\tau, t)$ ($i = 2, 3, 4$) можно записать в виде, более удобном для вычисления на машине,

$$\begin{aligned}(1.16) \quad K_i(\tau, t) &= p^2 \sqrt{\tau t} \left\{ 1/2 \left[I_0\left(\frac{\tau p}{2}\right) K_0\left(\frac{tp}{2}\right) \right]_{\tau < t}^{\tau < t} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \omega_i(\xi) J_0(\xi p t) J_0(\xi p \tau) d\xi \right\},\end{aligned}$$

$$\omega_2(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}/2 \cdot [\operatorname{cth} ph \sqrt{1 + \xi^2} + \operatorname{th} ph \sqrt{1 + \xi^2}] - \xi - 2\xi/(4\xi^2 + 1),$$

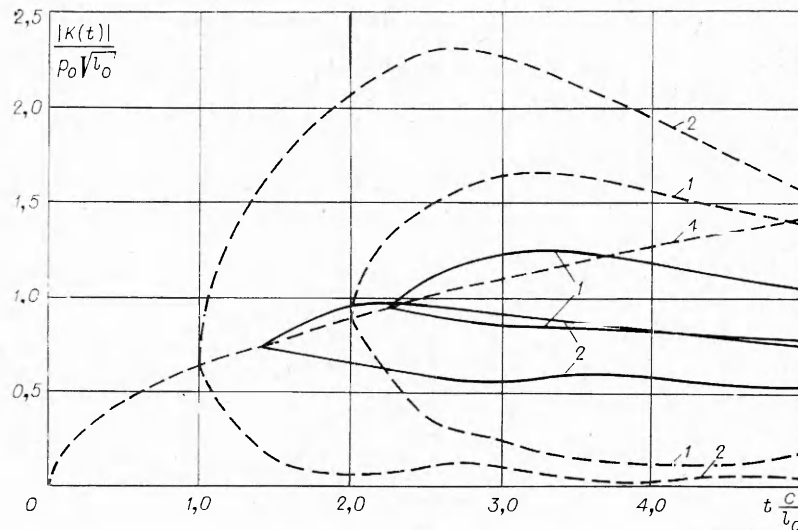
$$\omega_3(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2} \operatorname{th} ph \sqrt{1 + \xi^2} - \xi - 2\xi/(4\xi^2 + 1),$$

$$\omega_4(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2} \operatorname{cth} ph \sqrt{1 + \xi^2} - \xi - 2\xi/(4\xi^2 + 1),$$

$$\omega_i(\xi) \sim 0(\xi^{-5}) \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

Здесь $I_0(x)$, $K_0(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента. При расчетах всюду полагалось $p(x, t) = p_0$.

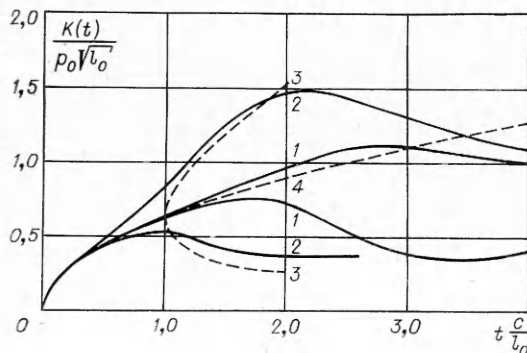
Для построения зависимости $K_i(t)$ ($i = 1, 2$) по формулам (1.15) использовался метод численного нахождения обратного преобразования Лапласа, изложенный в [6].



Фиг. 1

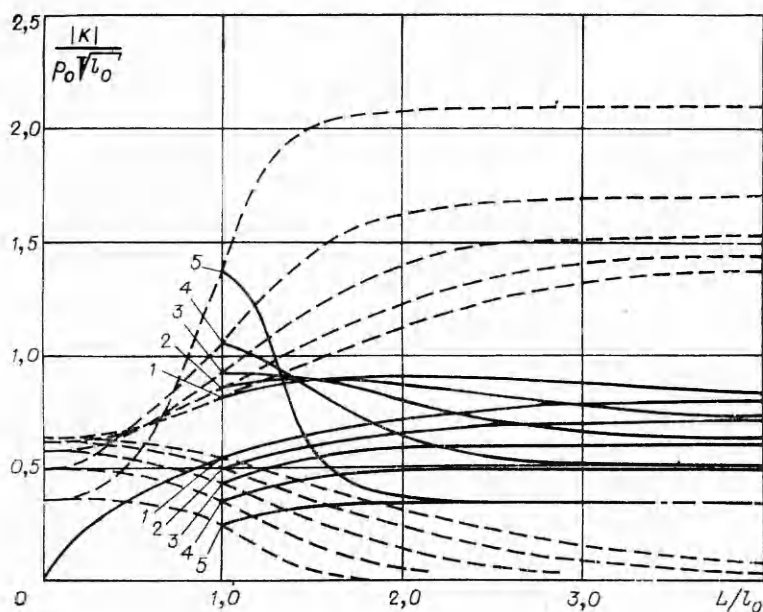
В качестве примера на фиг. 1 представлены результаты счета на ЭВМ уравнений (1.10)–(1.12) и последующего численного обращения преобразования Лапласа. Штриховые кривые 1, 2 изображают значения $K_1(t)/(p_0 \sqrt{l_0})$, а сплошные $K_2(t)/(p_0 \sqrt{l_0})$. Кривые построены при $L/l_0 = 2$; 1 отвечает отношению $l_0/h = 1$, а 2 — отношению $l_0/h = 2$. Верхние кривые соответствуют одинаковому знаку действующих напряжений на трещинах, а нижние — противоположным. В последнем случае особенно наглядно проявляется экранирующий эффект длинной трещины, ее наличие приводит к резкому падению значения коэффициента интенсивности напряжения в носике короткой трещины. На фиг. 2 сплошными линиями изображены зависимости $K(t)/(p_0 \sqrt{l_0})$ от времени при $l_0/h = 1$ (кривые 1) и $l_0/h = 2$ (кривые 2). При этом верхние кривые соответствуют свободным границам слоя, т.е. решению уравнения (1.13), а нижние — границам слоя, жестко заделанным, т.е. решению уравнения (1.14).

На фиг. 3 изображено статическое решение, получающееся из (1.10)–(1.12) в результате предельного перехода при $p \rightarrow 0$, что соответствует $t \rightarrow \infty$. Сплошные линии изображают зависимость отношения $K_2/(p_0 \sqrt{l_0})$,



Фиг. 2

а штриховые — $K_1/(p_0 \sqrt{l_0})$ от величины L/l_0 . Кривые 1–5 отвечают значениям $l_0/h = 1,0; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2$ соответственно. Верхние кривые соответствуют одинаковому знаку у напряжений, действующих на трещинах, а нижние — противоположным знакам. На фиг. 4 изображены зависимости коэффициентов интенсивности напряжения $K/(p_0 \sqrt{l_0})$ статической задачи от величины h/l_0 , полученные в результате чис-



Фиг. 3

ленного счета уравнений (1.13), (1.14) при $p \rightarrow 0$. Верхняя кривая отвечает условию $\tau_{yz} = 0$ на границах слоя, а нижняя — граничному условию $w = 0$. Построенные решения совпадают с точными решениями соответствующих статических задач.

2. Трещина, параллельная границе полупространства. Рассматривается упругое изотропное полупространство $y \geq -h$, содержащее изолированную трещину длиной 2 и расположенную при $y = 0$, $|x| < 1$. Полагаем, что при $t > 0$ на трещине действует напряжение $\tau_{yz} = \mp p(x, t)$ соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза. Рассматриваемую область разобьем на две. Первая — бесконечная полоса $-h < y < 0$. Величины, относящиеся к ней, имеют индекс 1. Вторая область с индексом 2 — полуплоскость $y > 0$. Тогда граничные условия при $t > 0$ следующие:

$$(2.1) \quad w_{(1)} = 0 \text{ при } y = -h, |x| < \infty; \tau_{yz} = \mp p(x, t) \text{ при } y = 0, |x| < 1; \\ w_{(1)} - w_{(2)} = 0 \text{ при } y = 0, |x| > 1; \tau_{(1)yz} - \tau_{(2)yz} = 0 \text{ при } y = 0, |x| < \infty.$$

Вместо первого граничного условия можно брать

$$(2.2) \quad \tau_{(1)yz} = 0 \text{ при } y = -h, |x| < \infty.$$

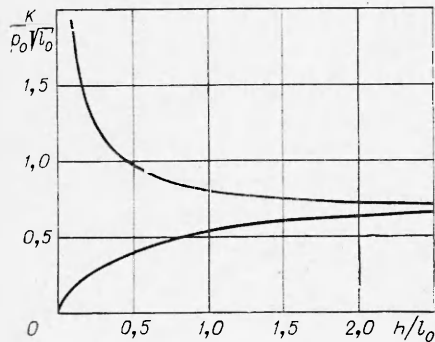
Общие решения уравнения движения в соответствующих областях

$$w_{(1)}(s, y, p) = A_1(s, p) \operatorname{sh} \alpha y + B_1(s, p) \operatorname{ch} \alpha y; \\ w_{(2)}(s, y, p) = A_2(s, p) e^{-\alpha y}.$$

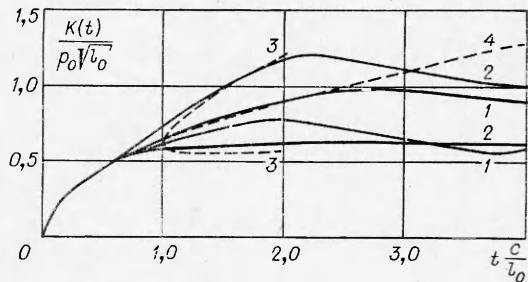
Подставляя их в граничные условия (2.1), получаем систему уравнений

$$\int_0^\infty B(s, p) \cos(sx) ds = 0, \quad |x| > 1; \\ \int_0^\infty B(s, p) 2\alpha / [1 + \operatorname{th} \alpha h] \cdot \cos(sx) ds = \pi/2 \cdot P(x, p), \quad |x| < 1,$$

где $2B(s, p) = A_1(s, p) [1 + \operatorname{th} \alpha h]$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Так же, как и раньше, введем в рассмотрение функцию $\varphi(t, p)$, определенную по t на интервале $[0, 1)$ равенством

$$w_{(1)}(x, 0, p) - w_{(2)}(x, 0, p) = \int_x^1 \frac{t\varphi(t, p)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt.$$

Поступая аналогично вышеизложенному, получаем для нее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$(2.3) \quad \varphi_1(t, p) + \int_0^1 \varphi_1(\tau, p) K_1(\tau, t) d\tau = -\sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$K_1(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^\infty \{2\alpha [1 + \text{th } \alpha h]^{-1} - s\} J_0(st) J_0(s\tau) ds.$$

Используя граничное условие (2.2), получим

$$(2.4) \quad \varphi_1(t, p) + \int_0^1 \varphi_1(\tau, p) K_2(\tau, t) d\tau = -\sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$K_2(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^\infty \{2\alpha [1 + \text{cth } \alpha h]^{-1} - s\} J_0(st) J_0(s\tau) ds,$$

где $\varphi_1(t, p)$ определена равенством (1.11). Коэффициент интенсивности напряжения при особенности в носике трещины определяется выражением

$$(2.5) \quad K(p) = -P_1 \varphi_1(1, p) \sqrt{l_0/2},$$

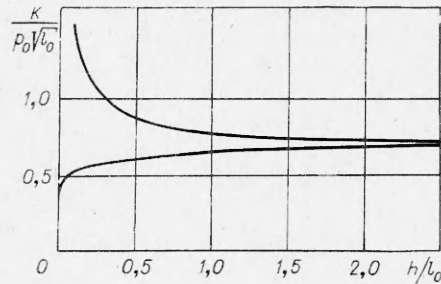
где $\varphi_1(1, p)$ — решения уравнений (2.3), (2.4). Для удобства вычислений на ЭВМ $K_i(\tau, t)$ ($i = 1, 2$) можно записать в виде (1.16), где в качестве $\omega_i(\xi)$ брать надо значения

$$\omega_1(\xi) = 2\sqrt{1 + \xi^2} [1 + \text{th } ph \sqrt{1 + \xi^2}]^{-1} - \xi - 2\xi/(4\xi^2 + 1),$$

$$\omega_2(\xi) = 2\sqrt{1 + \xi^2} [1 + \text{cth } ph \sqrt{1 + \xi^2}]^{-1} - \xi - 2\xi/(4\xi^2 + 1).$$

На фиг. 5 сплошными линиями изображены результаты численного счета зависимости отношения $K(t)/(p_0 \sqrt{l_0})$ от времени с использованием техники численного нахождения обратного преобразования Лапласа при $p(x, t) = p_0$. Кривые 1 отвечают отношению $l_0/h = 1$, а кривые 2 — отно-

пзнию $l_0/h = 2$. Верхние кривые соответствуют граничному условию $\tau_{yz} = 0$ при $y = -h$, а нижние — $w = 0$ при $y = -h$. На фиг. 6 представлены статические решения, полученные из (2.3), (2.4) при $p \rightarrow 0$. Верхняя кривая изображает изменение отношения $K/(p_0 \sqrt{l_0})$ от h/l_0 с условием $\tau_{yz} = 0$ при $y = -h$, а нижняя кривая отвечает условию $w = 0$ при $y = -h$.



Фиг. 6

3. Точные решения предельных задач ($l_0 \gg h$). Рассмотрим задачу о динамическом нагружении полубесконечной трещины, расположенной центрально в слое толщиной $2h$. Проведем такое же безразмеривание, как (1.1), заменив при этом l_0 на h . Трещина расположена при $y = 0$ и $x < 0$. В качестве рассматриваемой области возьмем $0 < y < 1$. Граничные условия задачи при $t > 0$ следующие:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \tau_{yz} &= -p_0, \quad y = 0, \quad x < 0; \\ w &= 0, \quad y = 0, \quad x > 0; \\ \tau_{yz} &= 0, \quad y = 1, \quad |x| < \infty. \end{aligned}$$

Вместо последнего условия в (3.1) можно взять

$$(3.2) \quad w = 0, \quad y = 1, \quad |x| < \infty.$$

Кроме граничных условий, искомое решение должно удовлетворять дополнительным условиям на краю разреза

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tau_{yz} &\sim x^{-1/2}, \quad x \rightarrow 0, \quad x > 0; \\ w &\sim x^{1/2}, \quad x \rightarrow 0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

После интегрального преобразования Лапласа по t и преобразования Фурье по x для уравнения (1.2) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d^2 w / dy^2 - (\lambda^2 + p^2) w = 0, \quad w = w(\lambda, y, p),$$

где $\lambda = \sigma + i\tau$ — комплексная переменная, а его общее решение

$$w(\lambda, y, p) = A(\lambda, p) \operatorname{sh} \alpha y + B(\lambda, p) \operatorname{ch} \alpha y, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + p^2}.$$

Используя граничные условия (3.1), получим функциональное уравнение Винера — Хопфа для неизвестных функций τ_+ и w_-

$$(3.4) \quad -\alpha \operatorname{th} \alpha \cdot w_-(\lambda, p) = \tau_+(\lambda, p) + iP_0/(\lambda p), \quad P_0 = (2\pi)^{-1/2} p_0,$$

где
$$\tau_+ = \tau_+(\lambda, p) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \tau_{yz}(x, 0, p) e^{i\lambda x} dx;$$

$$w_- = w_-(\lambda, p) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^0 w(x, 0, p) e^{i\lambda x} dx.$$

Уравнение (3.4) выполняется в полосе $-\gamma_0 < \operatorname{Im} \lambda < 0$ ($\gamma_0 > 0$), $-\infty < \operatorname{Re} \lambda < +\infty$ комплексной плоскости λ , причем $\tau_+(\lambda, p)$ — регулярная функция в области $\operatorname{Im} \lambda > -\gamma_0$, а $w_-(\lambda, p)$ — регулярная функция в области $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Представим функцию $K(\lambda) = \alpha \operatorname{th} \alpha$ в виде произве-

дения $K(\lambda) = K_+(\lambda)K_-(\lambda)$, где $K_+(\lambda)$ — функция регулярная и не имеющая нулей в области $\text{Im } \lambda > -\gamma_0$, а $K_-(\lambda)$ — в области $\text{Im } \lambda < 0$. Следуя [7], получим

$$(3.5) \quad K_+(-\lambda) = K_-(\lambda),$$

$$K_+(\lambda) = (p - i\lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + p^2 \pi^{-2} n^{-2}} - i\lambda (\pi n)^{-1}}{\sqrt{1 + p^2 \pi^{-2} (n-1/2)^{-2}} - i\lambda \pi^{-1} (n-1/2)^{-1}}.$$

Используя такое представление $K(\lambda)$, уравнение (3.4) запишем в виде

$$(3.6) \quad -w_-(\lambda, p) K_-(\lambda) - iP_0/p \cdot \chi_-(\lambda) = \tau_+(\lambda, p) K_+^{-1}(\lambda) +$$

$$+ iP_0/p \cdot \chi_+(\lambda) = F(\lambda),$$

$$\text{где} \quad [\lambda K_+(\lambda)]^{-1} = \lambda^{-1} [K_+^{-1}(\lambda) - K_+^{-1}(0)] + \lambda^{-1} K_+^{-1}(0) =$$

$$= \chi_+(\lambda) + \chi_-(\lambda).$$

Левая часть уравнения представляет собой функцию, аналитическую в области $\text{Im } \lambda < 0$, а правая часть — в области $\text{Im } \lambda > -\gamma_0$. Аналитическим продолжением функцию $F(\lambda)$ можно определить на всей плоскости λ , причем $F(\lambda)$ будет регулярна во всей плоскости λ .

Найдем асимптотику $K_+(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\text{Im } \lambda > 0$. Для этого сравним функцию $K_1(\lambda) = K_+^{-1}(\lambda)(p - i\lambda)$ при $\lambda = i\tau$ с функцией

$$K_0(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \tau \pi^{-1} (n-1/2)^{-1}}{1 + \tau (\pi n)^{-1}} = \tau / \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\tau/\pi) \Gamma^{-1}(1/2 + \tau/\pi).$$

Можно показать, что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_1(\tau) \cdot K_0^{-1}(\tau) = 1$. Используя асимптотику Γ -функции, получим, что $K_0(\tau) = \sqrt{\tau}$ при $\tau \rightarrow \infty$. Отсюда следует

$$(3.7) \quad K_+(\lambda) = \sqrt{\tau} \text{ при } \lambda = i\tau, \tau \rightarrow \infty.$$

Из условий (3.3), используя соотношения, связывающие асимптотику функции с асимптотикой ее преобразования Фурье [7], получим

$$(3.8) \quad \tau_+(\lambda, p) \sim \lambda^{-1/2} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \text{Im } \lambda > -\gamma_0;$$

$$w_-(\lambda, p) \sim \lambda^{-3/2} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \text{Im } \lambda < 0.$$

Соотношения (3.7), (3.8) позволяют написать следующие неравенства:

$$|-w_-(\lambda, p) K_-(\lambda) - iP_0/p \cdot \chi_-(\lambda)| < C|\lambda|^{-1}; \text{Im } \lambda < 0, |\lambda| \rightarrow \infty;$$

$$|\tau_+(\lambda, p) K_+^{-1}(\lambda) + iP_0/p \cdot \chi_+(\lambda)| < C|\lambda|^{-1}; \text{Im } \lambda > -\gamma_0, |\lambda| \rightarrow \infty, C = \text{const}.$$

Тогда по обобщенной теореме Лиувилля функция $F(\lambda)$ из (3.6) равняется нулю и, следовательно,

$$w_-(\lambda, p) = -iP_0/p \cdot \chi_-(\lambda) K_+^{-1}(\lambda); \tau_+(\lambda, p) = -iP_0/p \cdot \chi_+(\lambda) K_+(\lambda).$$

Отсюда, используя (3.6), (3.7), получим

$$(3.9) \quad \tau_+(\lambda, p) = -p_0/p \cdot \{\tau^{-1} - K_+^{-1}(0) \tau^{-1/2}\} \text{ при } \lambda = i\tau, \tau \rightarrow \infty.$$

Используем формулы, связывающие асимптотики функции и ее преобразования Фурье [7]:

$$\tau(x) \sim Ax^n, \quad x \rightarrow 0, x > 0;$$

$$\tau_+(\lambda) \sim A(2\pi)^{-1/2} \Gamma(1 + \eta) e^{\pi i(1+\eta)/2} \lambda^{-1-\eta}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Как следует из (3.9), $\lambda = i\pi$, $\eta = -1/2$, при этом A равняется коэффициенту интенсивности напряжения $K(p)$ при особенности порядка $(\Delta x)^{-1/2}$ ($\Delta x \ll 1$) в носике трещины

$$(3.10) \quad K_1(p) = p_0/p \cdot \pi^{-1/2} \sqrt{p \operatorname{th} p}.$$

Если в (3.1) вместо последнего граничного условия взять условие (3.2), то решение задачи проводится так же и коэффициент интенсивности напряжения при этом

$$(3.11) \quad K_2(p) = p_0/p \cdot \pi^{-1/2} \sqrt{p \operatorname{th} p}.$$

Задача о динамическом нагружении полубесконечной трещины, параллельной границе полупространства и отстоящей от нее на расстоянии $h = 1$, является предельной, когда $l_0 \gg h$, для задачи, рассмотренной в п. 2. Рассматривается область $-1 < y < \infty$ с разрезом при $y = 0$, $x < 0$. Как и выше, эта область разбивается на две: первая с индексом (1) $0 > y > -1$, вторая — с индексом (2) $y > 0$, $|x| < \infty$. Граничные условия задачи при $t > 0$ следующие:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} w_{(1)} &= 0, & y &= -1, & |x| < \infty; \\ \tau_{(1)yz} &= -p_0, & y &= 0, & x < 0; \\ \tau_{(1)yz} - \tau_{(2)yz} &= 0, & y &= 0, & |x| < \infty; \\ v = w_{(1)} - w_{(2)} &= 0, & y &= 0, & x > 0. \end{aligned}$$

Вместо первого граничного условия можно взять

$$(3.13) \quad \tau_{(1)yz} = 0, \quad y = -1, \quad |x| < \infty.$$

Для краевой задачи (3.12) уравнение Винера — Хопфа имеет вид

$$\alpha_+ 1 + \operatorname{th} \alpha |^{-1} v_-(\lambda, p) = \tau_+(\lambda, p) + iP_0/(\lambda p).$$

Решение проводится, как и выше, при этом

$$K(\lambda) = \alpha [1 + \operatorname{th} \alpha |^{-1} = K_+(\lambda) K_-(\lambda), \quad K_+(-\lambda) = K_-(\lambda),$$

$$K_+(\lambda) = \sqrt{p - i\lambda} e^{-\varphi(\lambda) + i\alpha/\pi \cdot \ln [p^{-i}(-i\lambda + i\alpha)]} \prod_{n=1}^{\infty} [\sqrt{1 + p^2 \pi^{-2} (n - 1/2)^{-2}} - \\ - i\lambda \pi^{-1} (n - 1/2)^{-1}] e^{i\lambda/\pi (n - 1/2)},$$

$\varphi(\lambda) = -i\lambda/\pi \cdot \{1 - C + \ln[\pi/(2p)]\}$, $C = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера. Функция $\varphi(\lambda)$ определена таким образом, чтобы обеспечить алгебраический порядок поведения $K_+(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Для коэффициента интенсивности напряжения в этом случае получаем выражение

$$(3.14) \quad K_4(p) = p_0 p^{-3/2} (2\pi)^{-1/2} e^{p/2} \operatorname{ch}^{-1/2} p,$$

а с использованием граничного условия (3.13)

$$(3.15) \quad K_3(p) = p_0 p^{-3/2} (2\pi)^{-1/2} e^{p/2} \operatorname{sh}^{-1/2} p.$$

Используя связь асимптотики функции с асимптотикой ее преобразования Лапласа [7], из формул (3.10), (3.11) и (3.14), (3.15) получим, что при $t \rightarrow \infty$ $K_1(t) = p_0 t / \sqrt{\pi}$, $K_2(t) = p_0 / \sqrt{\pi}$, $K_3(t) = p_0 t / \sqrt{2\pi}$, $K_4(t) = p_0 / \pi \cdot \sqrt{2t}$. Сделав обратное преобразование Лапласа в формулах (3.10), (3.11) и (3.14), (3.15), получим

$$(3.16) \quad \begin{aligned} K_{1(2)}(t) &= (p_0/\pi) 2\sqrt{t} [1 \pm H(t-2) + (1/2)H(t-4) \pm (1/2)H(t-6) + \dots], \\ K_{3(4)}(t) &= (p_0/\pi) 2\sqrt{t} [1 \pm (1/2)H(t-2) + (3/8)H(t-4) \pm \\ &\quad \pm (5/16)H(t-6) + \dots], \end{aligned}$$

где $H(t-k) = \begin{cases} 1, & t > k \\ 0, & t < k \end{cases}$, нижние знаки в (3.16) соответствуют $K_2(t)$ и $K_4(t)$. Как видно из полученных решений при $t \leq 2$, т. е. пока не пришла отраженная волна от границы тела, они совпадают с точным решением для полубесконечной трещины в бесконечном упругом теле $K(t) = p_0/\pi \cdot 2\sqrt{t}$ [1].

Полученные точные решения (3.16) изображены штриховыми линиями 3 на фиг. 2 и 5 при $l_0 = 2h$. Решение для полубесконечной трещины в упругом теле изображено штриховой линией 4 на фиг. 2 и 5. Если для изолированной трещины отношение максимального значения динамического коэффициента интенсивности напряжения к статическому значению равняется 1,27 [4], то, как следует из сравнения кривых, отвечающих динамическому нагружению с соответствующими им кривыми для статических задач, видно, что это отношение зависит от геометрии задачи и может быть существенно больше.

Поступила 17 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. — ПММ, 1966, т. 30, № 6.
2. Sih G. C., Embley G. T., Ravera R. S. Impact response of a finite crack in plane extension. — «Int. J. Solids and Struct.», 1972, vol. 8, N 7, p. 977—993.
3. Stephen A. Thau, Tsin — Hwei Lu. Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave. — «Int. J. Solids and Struct.», 1971, vol. 7, N 7, p. 731—750.
4. Мартынюк П. А., Шер Е. Н. О дифракции упругой волны на конечной трещине в условиях антиплоской деформации. — ПМТФ, 1974, № 3.
5. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1963.
6. Bellman R., Kalaba R., Lockett J. Numerical inversion of the Laplace transform. Amsterdam, 1966.
7. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.

УДК 539.30

НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ЗВЕЗДЧАТОЙ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

П. А. Мартынюк, Е. Н. Шер

(Новосибирск)

Методом функционально-инвариантных решений Смирнова — Соболева [1—4] решается автомодельная плоская задача теории упругости о развитии из точки с постоянной скоростью в условиях антиплоской деформации системы равномерно распределенных по углу радиальных трещин.

Исследуемую постановку можно рассматривать как модельную для математически более сложной задачи плоской деформации.