

На фиг. 4 показаны зависимости давления газа и скорости движения от координаты при  $t = 0,25; 1,0; 5,0; 9,5$  (кривые 1—4) для линейной зависимости силы сопротивления от скорости ( $\sigma_1 = 1$ ).

В отличие от плоского движения при сферически-симметричном течении газа давление уменьшается с расстоянием от  $r = r_0$  до  $r = r^* \sim 8$ . Начиная с  $r > r^*$ , давление газа возрастает, и в некоторый момент времени  $t = t^* \sim 0,5$  также образуется ударная волна.

Кратко остановимся на результатах работы. Решения системы уравнений (1.1)—(1.3) при некоторых условиях асимптотически совпадают с решениями уравнений фильтрации газа. Однако при скоростях втекания газа, больших скорости звука, возможен режим движения, при котором в среде образуется отраженная ударная волна. Образование ударных волн может происходить как в начальный момент времени, так и спустя некоторое время после начала движения. Возникновение отраженных ударных волн при изотермическом движении газа с силами сопротивления является устойчивым фактом, не зависящим от геометрической задачи.

Авторы благодарят Е. Е. Ловецкого и Б. Л. Рождественского за полезное обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Механика сплошных сред. М.: Наука, 1981.
2. Полубаринова-Кочина Н. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
3. Николаевский В. П., Басинев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
4. Нигматуллин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
7. Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4.
8. Бондаренко А. Г., Колабашкин В. М., Кудряшов Н. А. Автомодельное решение задачи о течении газа через пористую среду в режиме турбулентной фильтрации. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3.
9. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
10. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
11. Борис Дж. П., Бук Д. Л. Решение уравнений непрерывности методом коррекции потоков. — В кн.: Вычислительные методы в физике плазмы/Под ред. Дж. Киллина. М.: Мир, 1980.
12. Boris J. P., Book D. L. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. — J. Comput. Phys., 1979, v. 11, N 38.

Поступила 23/IV 1984 г.

УДК 533.6.013.12

### ВЛИЯНИЕ УДАРНОГО СЛОЯ НА ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНЯМИ

Г. И. Щепановская, В. А. Щепановский

(Красноярск)

Вопрос соотношения волнового сопротивления, определяемого интенсивностью соответствующего ударного слоя, и вязкого сопротивления, обусловленного трением поверхности, для пространственных тел с выпуклым поперечным сечением практически ясен, но для звездообразных конфигураций требует еще детальной разработки. Расчеты по линейной теории [1], где получено, что волновое сопротивление звездообразных форм меньше волнового сопротивления эквивалентного по длине и объему тела вращения, только подчеркивают целесообразность такого исследования.

При фиксированной длине конфигурации с плоскими боковыми гранями волновое сопротивление определяется величиной относительной толщины и слабо зависит от числа лепестков [2, 3]. С уменьшением толщины волновое сопротивление убывает, тогда как вязкое сопротивление растет — при неизменных длине тела и числе лепест-

ков для фиксированного объема увеличивается размах лучей, что приводит к значительному росту площади омываемой поверхности [4]. Внешним невязким потоком для пограничного слоя на поверхности конфигурации является течение за головной ударной волной (ударный слой). При расчете коэффициента вязкого сопротивления предлагается рассматривать каждый лепесток как пластинку со скошенной передней кромкой [2, 5, 6]. Сопротивление трения определяется интегрированием по поверхности от местного коэффициента.

В данной работе исследуется влияние ударного слоя на характеристики пограничного слоя и сопротивление трения. Рассчитывается коэффициент трения в зависимости от параметров набегающего потока и геометрии формы. Проводится сравнение коэффициентов волнового и вязкого сопротивления.

1. Рассматривается сверхзвуковое обтекание звездообразной конфигурации с плоскими боковыми гранями равномерным потоком. Скорость невозмущенного течения  $U_\infty$  направлена вдоль оси тела. Геометрия формы полностью определяется заданием линейного размера  $D$  (диаметра эквивалентного по длине и объему конуса) и трех безразмерных параметров:  $\lambda$  — удлинение (отношение длины  $L$  звезды к  $D$ ),  $r$  — отношение диаметра вписанной в мидель окружности к  $D$ ,  $n$  — целочисленный параметр, определяющий число лепестков. Из определения параметров следует, что  $r < 1$ , а величина  $\xi = r/(2\lambda)$  характеризует относительную толщину конфигурации.

Отдельный лепесток звезды представляет собой с точки зрения газодинамического конструирования [7] пространственный аналог плоского клина. Тогда давление на обтекаемой поверхности для заданного числа Маха  $M_\infty$  получается из соотношения [8]

$$(1.1) \quad \frac{p_1}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2\xi}{\xi + \zeta} + \frac{2}{\kappa M_\infty^2},$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты;  $\zeta$  — корень уравнения

$$\zeta^3 + \xi \left( 1 + \frac{\kappa+1}{2} M_\infty^2 \right) \zeta^2 + (1 - M_\infty^2) \zeta + \xi \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2 \right) = 0.$$

В соответствии с этой моделью находятся распределения плотности, температуры и скоростей в ударном слое:

$$(1.2) \quad \frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{\xi + \zeta}{\zeta(1 - \xi\zeta)},$$

$$(1.3) \quad \frac{T_1}{T_\infty} = \frac{[2\kappa M_\infty^2 - (\kappa - 1)(1 + \zeta^2)] [(\kappa - 1)M_\infty^2 + 2(1 + \zeta^2)]}{(\kappa + 1)^2 (1 + \zeta^2) M_\infty^2},$$

$$(1.4) \quad \frac{M_1}{M_\infty} = \frac{\zeta \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi + \zeta} \sqrt{\frac{T_\infty}{T_1}},$$

где величины с индексом  $\infty$  относятся к соответствующим параметрам невозмущенного течения.

Волновое сопротивление конфигурации с учетом (1.1) имеет вид

$$(1.5) \quad c_w = \frac{X_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S_M} = \frac{2}{\kappa M_\infty^2} + \frac{2\xi}{\xi + \zeta},$$

определяется только толщиной  $\xi = r/(2\lambda)$  и не зависит от числа лучей ( $S_M$  — площадь основания конфигурации). При вычислении волнового сопротивления (1.5) на донном срезе предполагается вакуум.

Приближенная модель описания невязкого обтекания (1.1)–(1.4) дает точное решение с учетом нелинейных взаимодействий [8] для числа Маха набегающего потока:

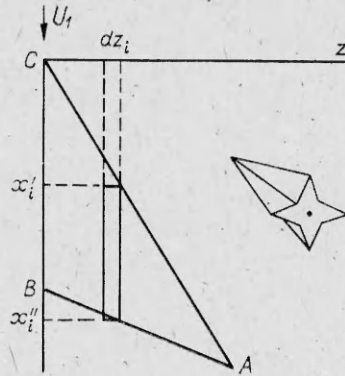
$$(1.6) \quad M_\infty^2 = \frac{(1 + 4\lambda^2 \varphi)(1 + 4r^2 \lambda^2 \varphi^2)}{4\lambda^2 \varphi \left( 1 - \frac{\kappa+1}{2} r^2 \varphi \right) - \frac{\kappa-1}{2}}, \quad \varphi = \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Соотношение (1.6) задает сверхзвуковой набегающий поток при

$$r^2 < 2 / [(\kappa + 1) \varphi], \lambda^2 > (\kappa - 1) / \left[ 8 \varphi \left( 1 - \frac{\kappa + 1}{2} r^2 \varphi \right) \right].$$

Учитывая зависимость  $\varphi$  от числа лепестков, получим условия существования (1.6), не зависящие от  $n$ :

$$(1.7) \quad r^2 < \frac{2}{(\kappa + 1) \varphi(3)}, \quad \lambda^2 > \frac{\kappa - 1}{8 \left[ 1 - \frac{\kappa + 1}{2} r^2 \varphi(3) \right]}.$$



Фиг. 1

2. Сопротивление трения смачиваемой поверхности звездообразной конфигурации с плоскими боковыми гранями вычисляется в предположении, что каждая боковая грань  $ABC$  (фиг. 1) обтекается как пластинка со скошенной передней кромкой сверхзвуковым потоком со скоростью  $U_1$  (1.4) в направлении внутреннего ребра  $CB$ . Распределение газодинамических величин на границе пограничного слоя определено из невязкого обтекания (1.1)–(1.4).

Грань лепестка  $ABC$  разбивается на элементарные полосы шириной  $dz_i$  (см. фиг. 1). При отсутствии взаимодействия течений между полосами ламинарный пограничный слой  $i$ -й полосы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp_1}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0, \\ \rho \left( u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu u}{R} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \Theta &= T + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{u^2}{R}, \quad p_1 = \rho RT, \quad \mu = \mu_0 (T/T_0)^n, \end{aligned}$$

где  $u, v$  — составляющие вектора скорости на оси  $x, y$  соответственно; ось  $y$  направлена перпендикулярно плоскости грани  $x, z$ ;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости;  $\mu_0 T_0$  — соответствующие параметры адиабатически заторможенного потока. Число Прандтля определяется через коэффициенты теплоемкости  $c_p$  и теплопроводности  $\sigma$ :  $Pr = \mu c_p / \sigma$ .

Краевые условия на обтекаемой поверхности для скоростей и температуры в предположении, что грань теплоизолирована, имеют вид  $u = v = 0, \partial T / \partial y = 0$  и  $u = U_1, T = T_1$  в бесконечном удалении от поверхности. Величины с индексом 1 найдены решением невязкой задачи (1.1)–(1.4).

Решение поставленной задачи для числа Прандтля, равного единице, известно [9]. Напряжение трения в зависимости от координаты  $x$   $i$ -й полосы определяется соотношением

$$(2.1) \quad \tau_w(x) = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{12} \frac{1}{\sqrt{Re_x}},$$

$$\text{где } A_{1,2} = 0,664 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{m-1}{2}}; \quad Re_x = \frac{\rho_1 U_1}{\mu_1} (x - x'_i);$$

$x'_i$  — абсцисса начала  $i$ -й полосы;  $x \geq x'_i$ .

Для турбулентного пограничного слоя, следуя результатам [10], напряжение трения  $i$ -й полосы запишем в виде

$$(2.2) \quad \tau_w(x) = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{15} Re_x^{-\frac{1}{5}}.$$

В дальнейшем выражения (2.1) и (2.2) рассматриваются одновременно:

$$(2.3) \quad \tau_w(x) = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{1k} \operatorname{Re}_x^{-1/k}$$

( $k = 2$  соответствует ламинарному течению,  $k = 5$  — турбулентному).

Длина  $i$ -й полосы задается величиной  $x_i'' - x_i'$ , где  $x_i'$ ,  $x_i''$  — координаты соответственно начала и конца полосы. Если ввести величины  $S_\Delta = \bar{S}_\Delta D^2$  (площадь треугольника  $ABC$  (см. фиг. 1)) и  $a = \bar{a}D = D\lambda\sqrt{1+\xi^2}$  (длину стороны  $BC$  (внутреннее ребро конфигурации)), то для длины  $i$ -й полосы следует выражение

$$(2.4) \quad l_i = x_i'' - x_i' = \left( \frac{2S_\Delta}{a} - z_i \right) \frac{a^2}{2S_\Delta}$$

Сопrotивление трения  $i$ -й полосы получается интегрированием (2.3) по длине

$$X_F^i = dz_i \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{1k} \left( \frac{\rho_1 U_1}{\mu_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \int_{x_i'}^{x_i''} (x - x_i')^{-\frac{1}{k}} dx$$

С учетом (2.4) имеем

$$X_F^i = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{1k} \left( \frac{\rho_1 U_1}{\mu_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \left[ \frac{a^2}{2S_\Delta} \left( \frac{2S_\Delta}{a} - z_i \right) \right]^{1 - \frac{1}{k}} dz_i$$

Интегрированием по  $z$  находится вязкое сопротивление всей поверхности треугольной грани  $ABC$ :

$$\begin{aligned} X_F &= \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{1k} \left( \frac{\rho_1 U_1}{\mu_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \left( \frac{a^2}{2S_\Delta} \right)^{1 - \frac{1}{k}} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \int_0^{\frac{2S_\Delta}{a}} \left( \frac{2S_\Delta}{a} - z \right)^{1 - \frac{1}{k}} dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{1k} \left( \frac{\rho_1 U_1}{\mu_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \left( \frac{a^2}{2S_\Delta} \right)^{1 - \frac{1}{k}} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{k}} \left( \frac{2S_\Delta}{a} \right)^{2 - \frac{1}{k}} = \\ &= \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 A_{1k} [1 + \xi^2]^{-\frac{1}{2k}} \lambda^{-\frac{1}{k}} \frac{2k^2 S_\Delta}{(2k-1)(k-1)} \left( \frac{\rho_1 U_1 D}{\mu_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Боковая поверхность всей конфигурации состоит из  $2n$  одинаковых треугольников  $ABC$  и равна  $S_* = 2nS_\Delta$ . Для коэффициента вязкого сопротивления находим

$$\begin{aligned} c_F &= \frac{2n X_F}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 S_M} = \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_\infty U_\infty^2} \left( \frac{\rho_1 U_1 \mu_\infty}{\rho_\infty U_\infty \mu_1} \right)^{-\frac{1}{k}} \lambda^{-\frac{1}{k}} (1 + \xi^2)^{-\frac{1}{2k}} \times \\ &\quad \times \frac{2k^2}{(2k-1)(k-1)} \frac{S_*}{S_M} A_{1k} \left( \frac{\rho_\infty U_\infty D}{\mu_\infty} \right)^{-\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Используя выражения газодинамических величин в ударном слое (1.2)–(1.4) и учитывая связь скорости звука и температуры ( $c_1/c_\infty =$

$= \sqrt{T_1/T_\infty}$ , для коэффициента вязкого сопротивления окончательно получим

$$(2.5) \quad c_F = A_{1k} A_{2k} \lambda^{-\frac{1}{r}} (1 + \xi^2)^{-\frac{1}{2k}} \frac{2k^2}{(2k-1)(k-1)} \frac{S_*}{S_M} \operatorname{Re}^{-\frac{1}{k}} \frac{1}{D},$$

$$A_{2k} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_\infty} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left( \frac{M_1}{M_\infty} \right)^{\frac{2k-1}{k}} \left( \frac{T_1}{T_\infty} \right)^{\frac{2(k+m)-1}{2k}},$$

где  $\operatorname{Re}_D = \rho_\infty U_\infty D / \mu_\infty$  — число Рейнольдса, вычисленное по параметрам невозмущенного течения; в качестве линейного размера взят диаметр эквивалентного конуса. Переход в (2.5) к числу Рейнольдса, вычисленному по длине конфигурации  $L$ , осуществляется по формуле  $\operatorname{Re}_L = \lambda \operatorname{Re}_D$ .

Коэффициент  $A_{1k}$  относится к вязкому решению (2.3) и учитывает сжимаемость течения в пограничном слое,  $A_{2k}$  учитывает влияние ударного слоя. Для ламинарного пограничного слоя  $k = 2$  в таблице приведены численные значения коэффициентов в зависимости от числа Маха набегающего потока для конфигурации  $\lambda = 2$ ;  $r = 0,5$ ,  $n = 4$ ,  $\kappa = 1,4$ ,  $m = 0,76$ ,  $\operatorname{Re}_D = 6,5 \cdot 10^4$ ,  $M_1$  — число Маха для течения в ударном слое (1.4). Величина  $A_\infty = A_{12} A_{22} = 0,664 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2 \right)^{(m-1)/2}$  характеризует поправочный коэффициент в (2.5), когда ударный слой отсутствует, т. е. внешнее течение для пограничного слоя совпадает с невозмущенным потоком. В этом случае  $M_1 = M_\infty$ ,  $A_{22} = 1$ .

3. Расчеты сопротивления звездообразных конфигураций для ламинарного течения в пограничном слое  $k = 2$  в зависимости от параметров геометрии и условий обтекания приведены на фиг. 2—6. В расчетах принято  $\kappa = 1,4$ ,  $m = 0,76$ .

На фиг. 2 показан расчет коэффициента вязкого сопротивления (2.5) для звездообразной конфигурации  $r = 0,5$  с четырьмя лепестками в зависимости от удлинения формы  $\lambda$  и числа Маха набегающего потока. Сплошные линии соответствуют числу Рейнольдса  $\operatorname{Re}_D = 6,5 \cdot 10^4$ , штриховые —  $\operatorname{Re}_D = 6,5 \cdot 10^5$ . С увеличением  $\lambda$  сопротивление трения увеличивается, так как растет относительная величина омываемой поверхности. Зависимость сопротивления трения от величины числа Маха набегающего потока более сложная. До некоторого значения  $\lambda$  с увеличением числа Маха сопротивление трения возрастает, а для более удлиненных конфигураций обратная картина: большему числу Маха набегающего потока соответствует меньшее значение коэффициента вязкого сопротивления (2.5).

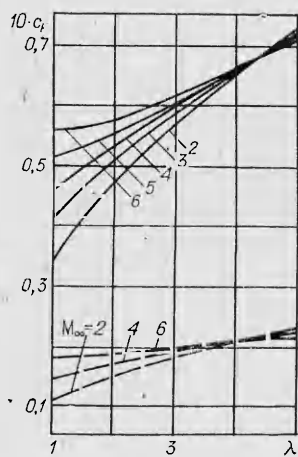
На фиг. 3 приведены результаты аналогичного расчета при тех же значениях, но влияние ударного слоя на формирование вязкого течения не учитывалось, т. е.  $A_{22} = 1$ . Видно, что качественная зависимость  $c_F$  от  $M_\infty$  такая же, как на фиг. 2 для больших удлинений ( $\lambda \gg 1$ ). Следовательно, зависимость вязкого сопротивления от числа Маха набегающего потока на фиг. 2 объясняется влиянием нелинейных процессов формирования течения в ударном слое за головным скачком уплотнения. Для больших значений удлинения ( $\lambda \gg 1$ ) относительная толщина конфигурации  $\xi = r/2\lambda$  мала и течение в ударном слое (1.2)—(1.4) (для пограничного слоя — внешний поток) отличается от набегающего потока незначительно, величина  $A_{22} \approx 1$  и качественная зависимость  $c_F$  от  $M_\infty$  для больших  $\lambda$  (см. фиг. 2) такая же, как на фиг. 3.

$M_\infty$	$M_1$	$A_\infty$	$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{12} A_{22}$
2	1,74	0,61877	0,62721	1,06112	0,66554
3	2,64	0,58682	0,59791	1,18637	0,70934
4	3,48	0,55895	0,57276	1,29458	0,74148
5	4,27	0,53553	0,55215	1,39908	0,77250
6	5,02	0,51583	0,53512	1,50380	0,80471

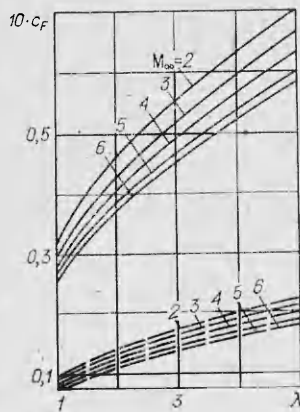
На фиг. 4—6 расчеты проведены с учетом ударного слоя  $A_{22} \neq 1$  для ламинарного режима течения в пограничном слое. На фиг. 4 показана зависимость  $c_F$  от параметров геометрии  $r$ ,  $\lambda$  для четырехлепестковой конфигурации  $Re_D = 10^5$  и чисел Маха набегающего потока 2; 4; 6. При фиксированном удлинении  $\lambda$  вязкое сопротивление растет с уменьшением  $r$ , так как при сохранении объема конфигурации с малыми  $r$  имеют больший размах лепестков и, следовательно, большую омываемую поверхность  $S_*$ . Значение удлинения  $\lambda$ , при котором происходит перестройка качественной зависимости вязкого сопротивления трения от числа Маха, смещается в сторону меньших  $\lambda$  с уменьшением  $r$ . Интенсивность ударного слоя (1.1)—(1.4) определяется величиной  $\xi$ . Из расчетов фиг. 2, 4 следует, что изменение качественной зависимости  $c_F$  от  $M_\infty$  происходит при  $\xi \approx 0,06$ ; поэтому для тонких конфигураций  $\xi \leq 0,05$  влиянием ударного слоя на вязкое течение пренебречь, т. е. в (2.5) положить  $M_1 = M_\infty$ ,  $A_{2k} = 1$ .

Сравнение величин волнового (1.5) и вязкого (2.5) сопротивлений показано на фиг. 5 для  $Re_D = 6,5 \cdot 10^4$  и  $M_\infty = 4$ . Значения коэффициентов даны в одном масштабе. Сплошными линиями нанесены кривые волнового сопротивления для  $r = 0,2—0,6$  в зависимости от удлинения. Штриховыми линиями показаны результаты расчетов коэффициента вязкого сопротивления для конфигурации с числом лепестков  $n = 7$  и штрихпунктирными — для  $n = 4$ . Волновое сопротивление, как следует из (1.5), от  $n$  не зависит, и условия на внешней границе пограничного слоя для  $n = 4$  и 7 одинаковы. Разница значений коэффициента вязкого сопротивления для  $n = 4$  и 7 определяется площадью смачиваемой поверхности, которая пропорциональна  $n$ . С уменьшением  $r$  вклад вязкого сопротивления становится значительным даже при четырех циклах. Этот вклад увеличивается с ростом удлинения конфигурации  $\lambda$ , и для  $\lambda \geq 3$  значения вязкого и волнового сопротивлений одного порядка. Волновое сопротивление с изменением  $r$  имеет обратную тенденцию, так как относительная толщина  $\xi = r/2\lambda$  уменьшается.

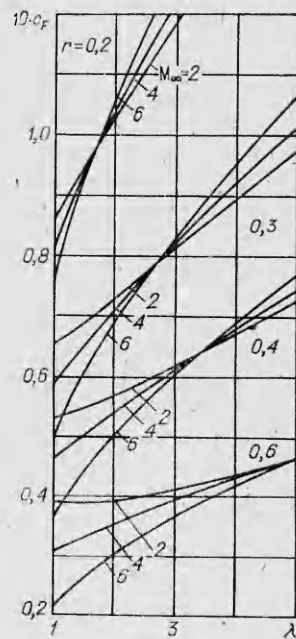
На фиг. 6 приведены значения полного сопротивления (сплошные линии)  $c_x = c_w + c_F$ , где  $c_w$ ,  $c_F$  рассчитаны по (1.5), (2.5) соответственно в зависимости от числа циклов для удлинения  $\lambda = 1,3$  и параметров набегающего потока  $M_\infty = 4$ ,  $Re_D = 2,7 \cdot 10^6$ . Полное сопротивление слабо зависит от числа  $n$ , так как для  $\lambda = 1,3$  основной вклад составляет волновое сопротивление (1.5), которое от  $n$  не зависит. Однако для  $r = 0,4$  эта зависимость от  $n$  заметна за счет величины  $c_F$  (2.5).



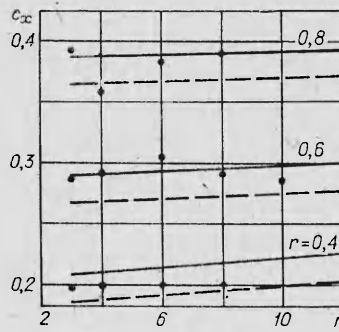
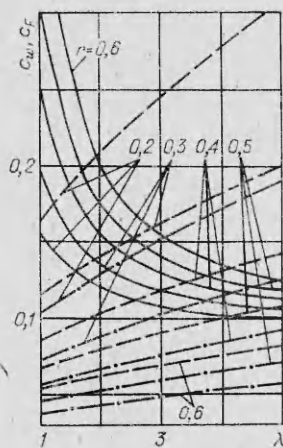
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Ф и г. 6

Ф и г. 5

Точками на фиг. 6 нанесены экспериментальные значения  $c_x$ , заимствованные из [2]. Для  $r = 0,6$  и  $0,8$  совпадение расчетных и экспериментальных данных удовлетворительное. Для  $r = 0,4$  расчет завывает значение полного сопротивления в пределах 5%. Донное давление при расчете (сплошные линии) полагалось равным нулю. Штриховыми линиями на фиг. 6 показаны значения полного сопротивления с учетом донного давления по аналогии с [11], что для рассматриваемых конфигураций даёт поправку  $\Delta c_x = -0,022$ . Экспериментальные точки лежат выше штриховых линий, в полосе, ширина которой с увеличением числа Маха набегающего потока  $M_\infty$  будет уменьшаться.

Отметим, что рассмотренные конфигурации удовлетворяют условиям (1.7) и, следовательно, выполняется (1.6). Приближенная модель расчета ударного слоя (1.1)–(1.4) и пограничного (2.1) будет для числа Маха (1.6) набегающего потока давать точное решение. В частности, для  $r = 0,6$ ,  $\lambda = 1,3$  такое число Маха равно 3,6. На фиг. 6 расчет проведен при  $M_\infty = 4,0$ , т. е. значения для  $r = 0,6$  близки к точным.

Для удлиненных конфигураций  $\xi \leq 0,05$  ( $\lambda > 5$ ,  $r < 0,5$ ) влияние ударного слоя на вязкое сопротивление незначительно, и его можно рассчитывать по невозмущенному потоку на внешней границе пограничного слоя [4]. Для  $\lambda < 5$  и  $r > 0,3$  основной вклад в полное сопротивление вносит волновое сопротивление, хотя уже для  $2 \leq \lambda \leq 5$  и  $0,2 \leq r \leq 0,5$  вязкое сопротивление может быть величиной того же порядка.

Авторы благодарят В. Г. Дулова за внимание к работе и ее обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фоллэ М. И. Волновое сопротивление удлиненных звездообразных тел при умеренных сверхзвуковых скоростях полета. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5.
2. Ведерников Ю. А., Гонор А. Л. и др. Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах  $M = 3-5$ . — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4.
3. Зубин М. А., Лапыгин В. И., Остапенко Н. А. Теоретическое и экспериментальное исследование структуры сверхзвукового обтекания тел звездообразной формы и их аэродинамических характеристик. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 3.
4. Бордюг В. А., Щепановская Г. И. Влияние удлинения и числа лучей звездообразной конфигурации на сопротивление в сверхзвуковом потоке. — В кн.: Тр. I Всесоюз. школы-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды. Красноярск, 1983 (Деп. 25.08.83, № 4623—83 Деп.).
5. Майкапар Г. И., Пятнова А. И. Сопротивление клина с шайбами при сверхзвуковых скоростях. — Учен. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 4.
6. Бордюг В. А., Щепановская Г. И. Вязкое сопротивление звездообразных тел при сверхзвуковом обтекании. Препринт ВЦ СО АН СССР. Красноярск, 1983, № 3.
7. Щепановский В. А. Специфика газодинамического конструирования звездообразных конфигураций. — В кн.: Тр. I Всесоюз. школы-семинара по многомерным задачам механики сплошной среды. Красноярск, 1983 (Деп. 25.08.83, № 4623—83 Деп.).

8. Бордюг В. А., Ведерников Ю. А. и др. Параметрическое исследование гиперзвуковых пространственных форм. — ПМТФ, 1983, № 1.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.
10. Гарбузов В. М., Колина П. П., Пятнова А. И. Расчет коэффициентов сопротивления трения и теплопередачи пластины и острого конуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком, при турбулентном течении в пограничном слое. — Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1881.
11. Майкапар Г. И., Пятнова А. И. Выбор основных параметров крыла с  $\Lambda$ -образным поперечным сечением. — Учен. зап. ЦАГИ, 1984, т. 15, № 1.

Поступила 14/VI 1984 г.

УДК 539.3

## ДИНАМИКА ТРЕХМЕРНОГО ПРОЦЕССА НЕСИММЕТРИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С ЖЕСТКОЙ СТЕНКОЙ

В. А. Горельский, И. Е. Хорев, Н. Т. Югов  
(Томск)

Проблеме несимметричного взаимодействия деформируемых тел при динамическом нагружении посвящен ряд экспериментальных работ [1—4]. Экспериментальные исследования трехмерных течений ограничиваются в основном регистрацией конечных интегральных параметров процесса. Проведенные к настоящему времени теоретические исследования возникающих при ударных нагрузках пространственных течений касаются изучения начальной стадии и имеют описательный характер [5]. В данной работе с помощью численного метода конечных элементов [5—7] рассмотрена трехмерная задача взаимодействия деформируемого тела вращения (цилиндра) с жесткой стенкой при скорости удара 300 м/с и углах подхода от 0 до 75°.

1. Система уравнений, описывающих нестационарные адиабатные движения твердой сжимаемой среды, имеет вид

$$(1.1) \quad \rho dv_i/dt = \sigma_{ij,j};$$

$$(1.2) \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho v = 0;$$

$$(1.3) \quad dE/dt = (1/\rho) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

где  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + S_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформаций;  $v_i$  — компоненты вектора скорости;  $\rho$  — плотность;  $E$  — удельная внутренняя энергия.

Шаровая часть тензора напряжений является функцией плотности и внутренней энергии:

$$(1.4) \quad P = \sum_{n=1}^3 K_n \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^n \left[ 1 - K_0 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) / 2 \right] + K_0 \rho_0 E_s$$

где  $K_n, \rho_0, K_0$  — константы материала.

Девятерные составляющие тензора напряжений находятся из соотношения [8]

$$(1.5) \quad 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{dS_{ij}^0}{dt} + \lambda S_{ij}$$

где  $dS_{ij}^0/dt$  — производная по Яуману, определяемая формулой

$$(1.6) \quad dS_{ij}^0/dt = dS_{ij}/dt - S_{ik} W_{jk} - S_{jk} W_{ik},$$

причем  $2W_{ij} = \partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i$ . Параметр  $\lambda$  тождественно равен 0 при упругой деформации, а при наличии пластической — определяется с помощью условия текучести Мизеса

$$(1.7) \quad S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_0^2.$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига;  $\sigma_0$  — динамический предел текучести.