УДК 517.956.3
DOI: 10.15372/PMTF202415515

ЗАМЕЧАНИЕ О СООТВЕТСТВИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

А. Г. Куликовский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия
E-mail: kulik@mi-ras.ru

Рассматриваются гиперболические системы уравнений некоторого типа, описывающие одномерные нелинейные волны, одинаковым образом распространяющиеся в обоих направлениях оси x. Каждой системе такого типа можно поставить в соответствие другую гиперболическую систему уравнений в два раза более низкого порядка, строящуюся на основе исходной системы уравнений. Изучается сходство решений этой системы уравнений и исходной.

Ключевые слова: гиперболические системы уравнений, автомодельное решение, простые волны

Рассматриваются гиперболические системы уравнений вида

$$a_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F(u_k)}{\partial u_i}\Big), \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad i,k = 1,2,\dots n, \qquad a_i = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где u_i, v_i — неизвестные величины; $F(u_k)$ — заданная функция, обеспечивающая гиперболичность системы уравнений (1) в некоторой области значений переменных u_i. Эта область гиперболичности может быть представлена всем пространством u_i. Система уравнений (1) одинаковым образом описывает возмущения, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси x. В этом можно убедиться, если перекрестным дифференцированием исключить v_i. К гиперболическому типу относятся одномерные уравнения нелинейной теории упругости, а также уравнения, описывающие волны, рассматриваемые в ряде других физических задач. Если рассматриваются возмущения, распространяющиеся в одном направлении, а возмущения противоположного направления равны нулю или пренебрежимо малы, то этой системе уравнений можно поставить в соответствие систему уравнений в два раза более низкого порядка, в которой неизвестными являются только u_i. Известным примером является уравнение Хопфа, которому соответствует значение $n = 1$ и которое получается из системы типа (1) при указанных выше условиях.

Подобным образом в случае $n = 2$ из систем типа (1) были получены и исследованы системы уравнений для u_i, описывающие волны одного направления в двух случаях: волны в полупространстве, заполненном слабоанизотропной несжимаемой упругой средой [1, 2]; и продольно-крутильные волны в полубесконечном упругом стержне при выполнении некоторых дополнительных условий [3]. В обоих случаях изучались автомодельные решения типа x/t, содержащие простые волны и разрывы, возникающие при смене знака напряжений на границе области, где разыскивается решение ($x \geqslant 0$).

Метод получения уравнений более низкого порядка для u_i основан на предположении о малости возмущений, что отмечалось в работах [1–3]. Однако в [3] было показано, что изменения u_i в разрывах и простых волнах, распространяющихся в направлении увеличения x, совпадают с изменением u_i в соответствующих возмущениях, описываемых уравнениями (1).

В данной работе рассматриваются уравнения типа (1) при произвольных n. Так же как в случае $n = 1$ и $n = 2$, системе уравнений типа (1) ставится в соответствие система уравнений более низкого порядка (только для u_i). Выясняется, что изменения величин u_i в соответствующих простых волнах и разрывах, движущихся в направлении увеличения x, остаются одинаковыми в системе (1) и в упрощенной системе (для u_i) не только в случае, если возмущения малы, но и в случае возмущений конечной амплитуды. Указаны условия, при которых разрывы в решениях исходной и упрощенной систем уравнений совпадают. Показано, что скорости распространения возмущений для исходной и упрощенной систем уравнений различны, но существует единая формула пересчета скоростей, которая связывает скорости возмущений исходной и упрощенной систем, справедлива для всех типов простых волн и разрывов и не зависит от их интенсивностей.

Проведем некоторые преобразования системы (1), подобные выполненным в [3]. Сначала путем изменения масштабов величины u_i устанавливаем, что все a_i равны единице. Затем выделяем из F квадратичную часть

$$a_i = 1, \qquad F(u_i) = \sum_{i,j} b_{ij} u_i u_j + Q(u_i).$$

При этом уравнения принимают вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j} b_{ij} u_j\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\Big), \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

Матрица b_{ij} симметричная, поскольку является матрицей вторых производных $F(u_i)$ при $u_i = 0$. Ортогональным преобразованием переменных u_i симметричную матрицу можно привести к диагональному виду. Коэффициенты при производных по времени остаются равными единице. Вторая группа уравнений сохраняет свой вид. Будем считать, что такие преобразования выполнены и в матрице b_{ij} отличны от нуля только диагональные элементы. Так как b_{ij} зависят от значений u_i, то, как и в случае $n = 2$ [3], путем сдвига величин u_i (т. е. прибавления к ним констант) можно достичь равенства всех b_{ii} ($b_{ii} = b$). Предполагается, что новое начало координат принадлежит области гиперболичности рассматриваемой системы. Таким образом, исходные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\Big), \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad c_0 = \sqrt{2b}\,. \tag{2}$$

Здесь для переменных в первой группе уравнений сохранены обозначения u_i, v_i, несмотря на то что это переменные, подвергнутые описанным выше преобразованиям. В уравнениях (2) $c_0 = \mathrm{const}$. Значение этой величины зависит от величины сдвига переменных. Очевидно, что c_0 — скорость малых линейных возмущений для системы (2). Как и в случае $n = 2$, для каждого значения i запишем уравнение для изменения инварианта $u_i - v_i/c_0$ линеаризованной системы (2) вдоль характеристик $x = c_0 t + \mathrm{const}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u_i - \frac{1}{c_0}\, v_i\Big) + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\Big(u_i - \frac{1}{c_0}\, v_i\Big) = -\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\Big).$$

Если положить равными константе инварианты Римана $u_i + v_i/c_0$ линеаризованной системы уравнений, связанные с характеристиками отрицательного направления

$x = -c_0 t + \mathrm{const}$, то, исключая v_i, подобно тому как это сделано в [1–3], получим систему уравнений для u_i

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{1}{2c_0} \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\Big). \tag{3}$$

Сравним свойства некоторых решений уравнений (2) и (3). Покажем, что изменения u_i в простых волнах, распространяющихся в положительном направлении, для систем уравнений (2) и (3) совпадают. В случае простых волн производные любой величины q по t и по x связаны соотношением

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -c \frac{\partial q}{\partial x} = -cq'. \tag{4}$$

Здесь c — характеристическая скорость; штрихом обозначена производная вдоль интегральной кривой простой волны. С учетом этого при использовании второй группы уравнений (2) первая группа уравнений (2) принимает вид

$$\sum_j Q_{ij} u_j' - (c^2 - c_0^2) u_i' = 0. \tag{5}$$

Следовательно, $c^2 - c_0^2$ — одно из собственных значений матрицы Q_{ij}, а величины u_j', $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие системе (5) (собственный вектор матрицы Q_{ij}, соответствующий данному собственному значению), образуют касательный вектор к интегральной кривой системы (5).

Уравнения для интегральных кривых простых волн системы (3) имеют вид

$$\sum_j Q_{ij} u_j' - 2c_0(\tilde c - c_0) u_i' = 0, \tag{6}$$

где $\tilde c$ — характеристическая скорость, соответствующая простой волне системы (3). Из равенства (6) следует, что значение $2c_0(\tilde c - c_0)$ — собственное значение матрицы Q_{ij}, а соответствующее решение u_j' ($j = 1, 2, \ldots, n$) — собственный вектор матрицы Q_{ij}. Сравнение равенств (5) и (6) показывает, что собственные векторы матрицы Q_{ij}, представляющие собой касательные к интегральным кривым уравнений (5) и (6), совпадают, а соответствующие собственным значениям этой матрицы значения c и $\tilde c$ связаны соотношением

$$c^2 - c_0^2 = 2c_0(\tilde c - c_0). \tag{7}$$

Отсюда следует

$$\frac{\tilde c}{c_0} = \frac{1}{2}\Big(\frac{c^2}{c_0^2} + 1\Big), \qquad c^2 = 2c_0\tilde c - c_0^2,$$

где $c > 0$ и $\tilde c$ — соответствующие друг другу характеристические скорости систем (2) и (3). Поскольку система (2) полагается гиперболической, $c^2 > 0$, поэтому $\tilde c > c_0/2$. Согласно (7) увеличение и уменьшение c и $\tilde c$ происходит одновременно, т. е. опрокидывание простых волн и образование ударных волн в системах уравнений (2) и (3), если происходит, то при одних и тех же значениях u_i.

Рассмотрим соответствие разрывов и структур разрывов решений систем уравнений (2) и (3). Для этого в данные системы уравнений должны быть добавлены члены, которые несущественны для медленно меняющихся в пространстве решений и не учитываются при построении решений гиперболической системы уравнений, но становятся важными в случае быстроменяющихся решений, препятствуя образованию разрывов. Обычно

это члены, выражающиеся через высшие производные неизвестных величин с малыми коэффициентами. При этом возникают узкие области, в которых решение испытывает существенные изменения, называемые структурами разрывов. Запишем уравнения (2) с учетом таких членов:
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial Q}{\partial u_i} + L_i(v_k)\Big], \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}. \tag{8}$$
Здесь L_i — дополнительные члены, препятствующие образованию разрывов. Во многих задачах механики под $L_i(v_k)$ понимаются вязкие напряжения:
$$L_i = \sum_k \mu_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x}. \tag{9}$$

Далее будем использовать выражение (9), учитывая, однако, что возможны другие, более сложные выражения для L_i, содержащие более высокие производные от v_k. Матрица μ_{ik} должна обеспечивать диссипацию механической энергии, т. е. быть положительно определенной.

Будем рассматривать структуру разрывов в виде бегущих волн, т. е. исследовать решения системы (5), зависящие от комбинации переменных вида $\xi = -x + Wt$ ($W = \mathrm{const}$ — скорость структуры) и стремящиеся к постоянным значениям при $\xi \to -\infty$ и $\xi \to \infty$. После исключения из системы v_i и однократного интегрирования уравнений по ξ получаем
$$W \sum_k \mu_{ik} u_k' = \frac{\partial Q}{\partial u_i} - (W^2 - c_0^2) u_i + G_i, \qquad G_i = \mathrm{const}\,. \tag{10}$$
Здесь штрихом обозначены производные по ξ. Так как рассматриваемые решения уравнений (10) $u_i(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$ стремятся к конечным значениям u_i, это означает, что данные решения соответствуют интегральным кривым в пространстве u_i, начинающимся и заканчивающимся в особых точках, в которых правые части уравнений (10) обращаются в нуль. Если состояние $u_i = u_i^-$ перед структурой (при $\xi = -\infty$) задано, то значения G_i находятся путем приравнивания к нулю правых частей уравнений (10) при $u_i = u_i^-$. Возможные состояния за разрывом u_i^+ при заданном значении W определяются положением других особых точек. При изменении W они перемещаются и образуют кривую (возможно, состоящую из нескольких участков), которая называется ударной адиабатой. Если точка ударной адиабаты u_i^+, соответствующая некоторому W, соединяется с начальной точкой $u_i = u_i^-$ интегральной кривой, идущей с увеличением ξ от точки u_i^- к точке u_i^+, то будем говорить, что переход $u_i^- \to u_i^+$ соответствует разрыву со структурой.

Рассмотрим структуру разрывов для системы (3). При добавлении в правые части уравнений (3) "вязких" членов уравнения принимают вид
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{1}{2c_0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial Q}{\partial u_i}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x}\Big). \tag{11}$$

Решения, зависящие от $\xi = -x + \tilde{W}t$ ($\tilde{W}$ — скорость структуры), описываются системой обыкновенных уравнений. После однократного интегрирования этой системы по ξ получаем
$$2c_0 \sum_k \nu_{ik} u_k' = \frac{\partial Q}{\partial u_i} - 2c_0(\tilde{W} - c_0) u_k + H_i, \qquad H_i = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Постоянные H_i определяются, если известно состояние $u_i = u_i^-$ перед структурой разрыва при $\xi = -\infty$. Как и в рассмотренном выше случае, структуру разрыва, движущегося со скоростью $\tilde{W}$, представляет интегральная кривая, выходящая из особой точки $u_i = u_i^-$ и идущая в другую особую точку $u_i = u_i^+$ при $\xi \to \infty$.

Особые точки уравнений (10), (12) определяются равенством нулю правых частей этих уравнений. Правые части (10), (12) совпадают, если выполняется равенство

$$W^2 - c_0^2 = 2c_0(\tilde{W} - c_0) \tag{13}$$

или

$$\frac{\tilde{W}}{c_0} = \frac{1}{2}\Big(\frac{W^2}{c_0^2} + 1\Big).$$

При выполнении равенства (13) и одинаковых u_i^- все особые точки систем уравнений (10), (12) совпадают в пространстве u_i. Это означает совпадение ударных адиабат для уравнений (2) и (3). Подобие формул (7) и (13) для $\tilde{c}$ и $\tilde{W}$ свидетельствует о том, что условия Жуге, т. е. условия равенства скорости разрыва характеристической скорости, а также условия эволюционности, следуют из равенств (7), (13) при одинаковых значениях u_i. Если помимо равенства (13) задать пропорциональность матриц ν_{ik} и μ_{ik}:

$$\nu_{ik} = \lambda\mu_{ik}, \qquad \lambda > 0, \tag{14}$$

то интегральные кривые уравнений (10) и (12) совпадут. Иными словами, при выполнении (13) и (14) для систем уравнений (2) и (3) совпадут множества разрывов, имеющих структуру.

Во многих случаях требуется решить автомодельную задачу типа x/t в области $x > 0$ для системы уравнений (1). В этом случае, как показано выше, можно использовать более простую систему уравнений (3). Также можно получать автомодельные решения в виде асимптотик при $t \to \infty$, решая более простые системы уравнений только для u_i типа (11) при условии (14), что удобно в том случае, если задача решается численно. Такой подход применялся в [4] при $n = 2$.

Следует отметить, что для систем уравнений (2) и (3) для всех n типов простых волн и всех типов разрывов, движущихся в направлении $x > 0$, интегральные кривые простых волн, а также ударные адиабаты совпадают. Это справедливо при произвольных величинах амплитуд соответствующих волн. Скорости волн систем (2) и (3) различаются, но имеется единая формула для пересчета характеристических скоростей и скоростей ударных волн, представленная равенствами (7) и (13).

Автор выражает благодарность А. П. Чугайновой за обсуждение содержания работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Куликовский А. Г.** О уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабоанизотропном упругом теле // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 4. С. 597–604.
2. **Куликовский А. Г.** Нелинейные волны в упругих средах / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова. М.: Моск. лицей, 1998.
3. **Куликовский А. Г., Чугайнова А. П.** Продольно-крутильные волны в нелинейно-упругих стержнях // Тр. Мат. ин-та им В. А. Стеклова РАН. 2023. Т. 322. С. 157–166.
4. **Chugainova A. P.** Riemann problem for longitudinal-torsional waves in nonlinear elastic rods // Z. angew. Math. Phys. 2024. Bd 75. 106.

Поступила в редакцию 17/V 2024 г.,
после доработки — 17/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.