

УДК 539.32

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОБОСНОВАНИЯ И ВЕРИФИКАЦИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. А. Адамов

Институт механики сплошных сред УрО РАН — филиал Пермского  
федерального исследовательского центра УрО РАН, 614013 Пермь, Россия  
E-mail: adamov@icmm.ru

Рассмотрены проблемы методического и экспериментального обоснования модели разномодульной линейной упругости при механических испытаниях образцов твердых материалов различного происхождения и структуры. Проведен анализ причин различия значений модуля Юнга при растяжении-сжатии. Показано, что при использовании корректных методик испытаний и способов регистрации деформаций при однородном одноосном напряженном состоянии можно получить значения модуля Юнга образцов из ряда материалов, имеющие статистически не значимые различия при растяжении и сжатии.

**Ключевые слова:** разномодульная теория упругости, методика испытаний, растяжение-сжатие, углепластик, графит, сверхвысокомолекулярный полиэтилен.

DOI: 10.15372/PMTF20200611

**Введение.** В работе [1] приведен обзор экспериментальных исследований механических свойств материалов. В частности, отмечается, что в ряде экспериментов получены различные значения модулей упругости при растяжении и сжатии образцов различной формы. В 1948 г. С. Ф. Гровер, У. Мунро и Б. Чалмерс провели испытания цилиндрических образцов из алюминиевого сплава на оригинальной установке с непрерывным переходом от растяжения к сжатию через нулевое напряжение [1. С. 192]. Полученные диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  были гладкими в точке смены знака напряжения.

В настоящее время проведение испытаний механических свойств различных материалов при растяжении и сжатии в случае одноосного напряженного состояния (ОНС) регламентировано различными стандартами для определенных классов материалов, но обычно испытания на сжатие имеют характер технологических проб, т. е. испытаний материала для качественной или сравнительной оценки его свойств. Проведение технологической пробы устанавливается техническими условиями. При испытании образцов на сжатие вследствие трения торцов не во всех сечениях образца имеет место однородное ОНС, что легко выявляется при численном анализе (с помощью САЕ-программ ANSYS, ABAQUS и др.) соответствующих краевых задач для испытываемых на сжатие образцов.

---

Работа выполнена в рамках Государственного задания № АААА-А16-116121410009-8.

В основе разномодульной (бимодульной) теории упругости [2–11] лежат результаты экспериментальных исследований, в которых получены различные значения модулей упругости при растяжении и сжатии [2–5].

Результаты анализа определяющих соотношений с различным числом упругих констант для разномодульного изотропного упругого тела, приведенные в работах [2–11], показывают, что эти соотношения построены на основе экспериментальных данных, полученных при регистрации жесткостных характеристик испытываемых образцов конкретных материалов. Часто значения модулей упругости определяются по диаграммам, полученным при нагружении до разрушения, без выявления диссипативных эффектов и необратимых компонент деформации при разгрузке, а также без выявления диапазона линейности поведения материала. При регистрации эффектов разномодульности материалов не анализируются факторы, влияющие на результаты определения материальных параметров. Авторы разномодульных (бимодульных) моделей, в которых учитывается зависимость свойств материала от вида напряженно-деформированного состояния, ссылаются на подобные экспериментальные работы, идеализируют и обобщают результаты частных испытаний конкретных материалов, а затем экстраполируют предлагаемые ими модели на широкие классы материалов: стали, бетоны, стекла, графиты, полимеры, композиты и т. д., считая их разномодульными.

Существуют материалы, в частности сыпучие и близкие к ним сильнотрещиноватые среды, которые при смене знака напряжения при различных видах напряженно-деформированного состояния имеют различную жесткость. Примером таких материалов являются калийные соли, которые при извлечении на земную поверхность переходят из состояния естественного трехмерного сжатия в состояние, свободное от напряжений.

Деформируемые сплошные природные и искусственные конструкционные материалы имеют многоуровневую структуру, определяющую их жесткость при различных силовых воздействиях. Поэтому такие материалы имеют различные характеристики при испытаниях на растяжение-сжатие в областях нелинейного поведения и в состояниях, предшествующих разрушению.

Однако в линейной теории разномодульной упругости, являющейся моделью равновесного состояния материала, предполагаются равенство и постоянство модулей упругости при испытаниях по “трапецеидальным” историям деформации  $\varepsilon(t)$  или напряжения  $\sigma(t)$  (с постоянными значениями задаваемой величины после нагружения и разгрузки) (рис. 1).

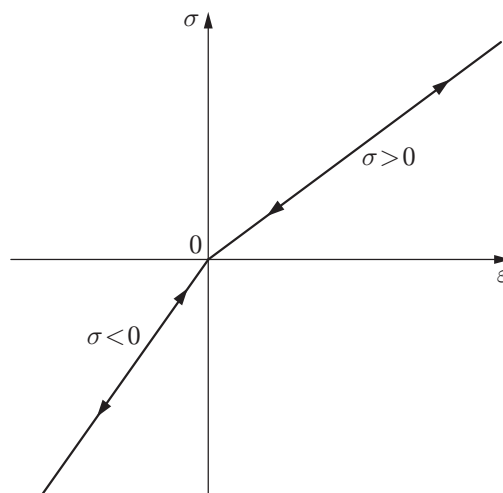


Рис. 1. Диаграммы испытаний по “трапецеидальным” историям нагружения при растяжении и сжатии

При использовании подхода, в котором модули упругости определяются только по участкам активного нагружения, невозможно обосновать разномодульность материала влиянием релаксационных процессов, возникновением пластических деформаций, образованием трещин и другими изменениями структуры материала.

**Причины проявления разномодульности.** Различие жесткости при растяжении-сжатии является характерным свойством сыпучих, трещиноватых и подобных им материалов. Для таких материалов диаграммы, подобные диаграмме, представленной на рис. 1, при ОНС отсутствуют. Например, для калийных солей модуль Юнга  $E^-$  определяется по участку диаграммы, соответствующему сжатию при разгрузке и существенно отличающемуся от участка диаграммы, соответствующего нагружению.

Для других классов материалов различие значений модуля Юнга, получаемых при испытаниях на растяжение-сжатие, обуславливают следующие основные факторы:

1) испытания образцов различной формы с разными граничными условиями закрепления и приложения нагрузок (фактически с разными видами напряженно-деформированного состояния, отличающимися от ОНС);

2) испытания образцов, различающихся технологией изготовления и механической обработки;

3) существенное влияние краевых эффектов на результаты экспериментов при испытании образцов композитов;

4) существенное влияние конечных и (или) неупругих составляющих деформации в области измерения модулей;

5) измерение деформаций по перемещениям захватов испытательной машины.

Важным, но зачастую пренебрегаемым фактором при проведении испытаний на растяжение и сжатие является отличие напряженно-деформированного состояния образцов при сжатии от ОНС вследствие трения на торцах.

Исследуем совместное влияние на результаты измерений модулей упругости трех факторов: трения торцов образца при сжатии, геометрической нелинейности и способа определения модуля упругости по диаграмме деформирования.

Проведены экспериментальные исследования образцов полиуретана ДУОТАН® QA900/A 250 MX (переданных в 2014 г. Институтом гидродинамики СО РАН) на растяжение (диаметр образца  $d = 7$  мм, отношение длины образца к его диаметру  $L/d = 20$ , на торцах образцов имелись залитые в материал стальные захваты (рис. 2, а)) и сжатие ( $d = 35$  мм,  $L/d = 0,8$ ). При испытаниях на сжатие имело место естественное трение торцов цилиндрического образца о шлифованную стальную поверхность захвата испытательной машины (рис. 2, б). В работе [12] приведены результаты испытаний этого материала при различных видах термосилового нагружения при больших значениях деформаций.

Минимизация трения на торцах образца обеспечивается за счет использования трех пленок фторопласта толщиной 50 мкм с литиевой смазкой. В этом случае “бочка” при сжатии не образуется, т. е. в образце реализуется состояние, близкое к ОНС. Поэтому осевую деформацию можно измерять на базе, длина которой близка к длине образца  $L$ , но требуются специальные приспособления для центрирования сжатого образца и предотвращения его смещения из центральной зоны сжатия с последующим опасным вылетом из нее.

На рис. 2, в представлены диаграммы растяжения-сжатия в координатах  $\sigma-\varepsilon$  (инженерное напряжение — относительное удлинение) с полным и минимизированным трением на торцах образца.

Влияние фактора трения на торцах сжимаемого образца и вызванного им неоднородного напряженно-деформированного состояния на определение модуля упругости проявляется следующим образом: отношение касательных модулей при сжатии  $E^-$  в окрестности

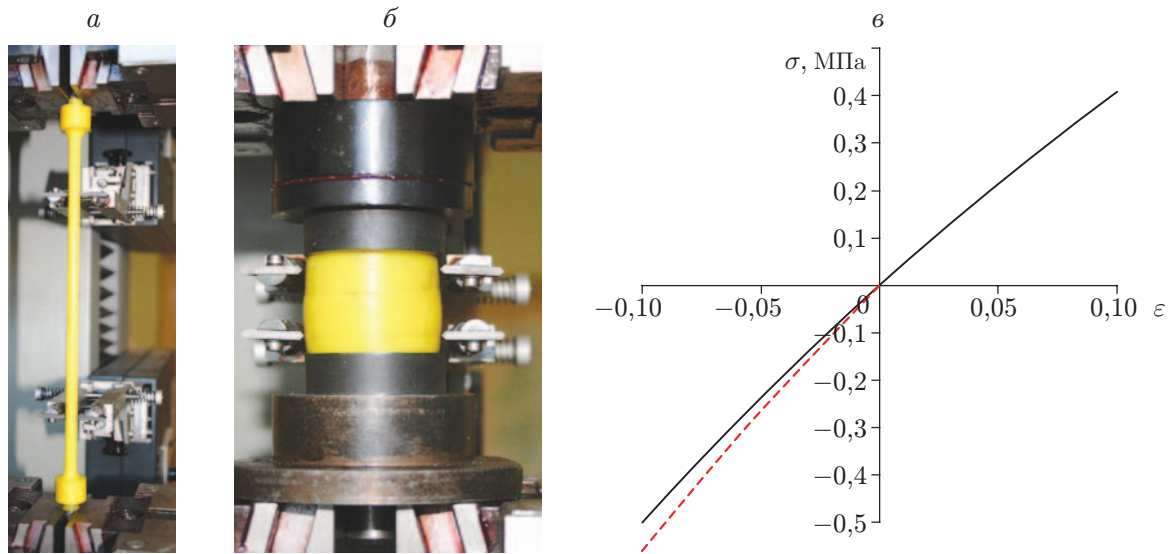


Рис. 2. Экспериментальное исследование образцов дуотана на машине Zwick Z100/SN5A: *a* — эксперимент на растяжение, *б* — эксперимент на сжатие, *в* — диаграмма растяжения-сжатия; сплошная линия — минимизированное трение, штриховая — полное трение

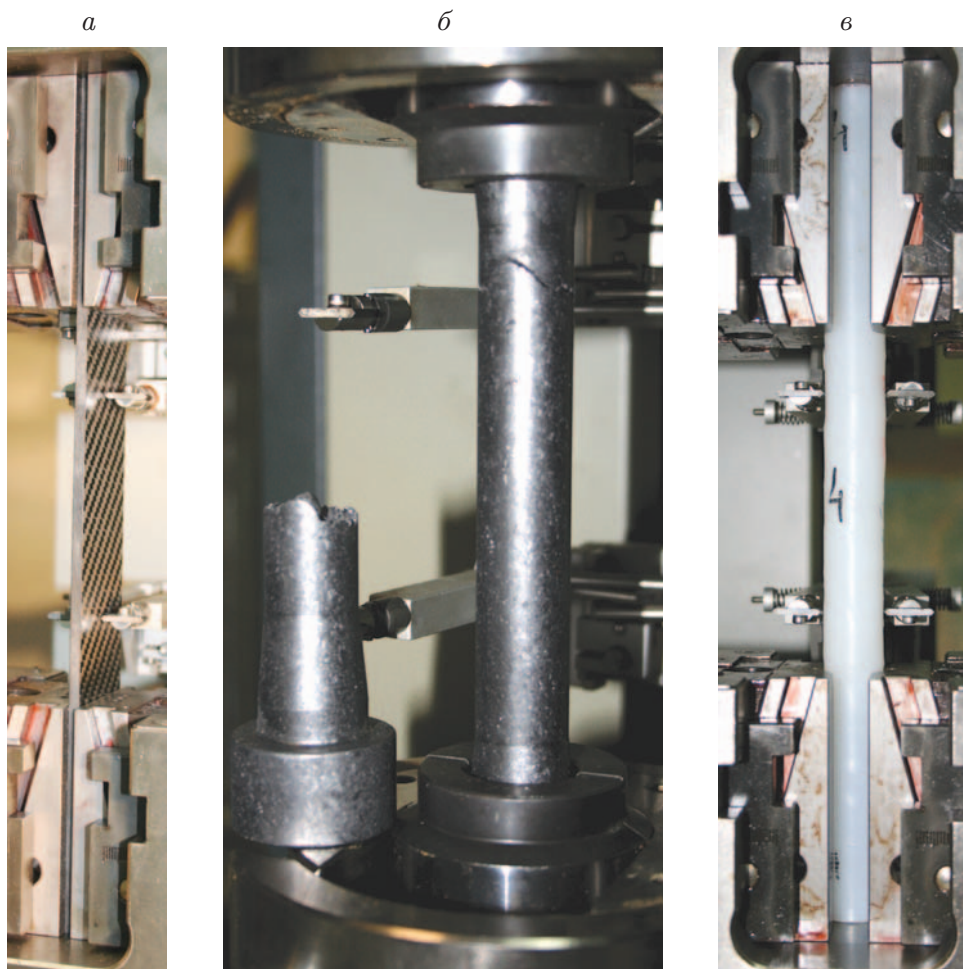


Рис. 3. Образцы из углепластика (*a*), графита (*б*), СВМПЭ (*в*), с использованием которых определялся модуль Юнга при растяжении-сжатии в захватах испытательной машины

начала координат при испытаниях с минимизированным и полным трением составляет приблизительно 0,89. Касательный модуль при сжатии  $E^-$  при испытаниях с минимизированным трением незначительно отличается от касательного модуля при растяжении  $E^+$  в окрестности начала координат.

Влияние фактора геометрической нелинейности проявляется следующим образом: отношение секущих модулей при растяжении и сжатии в диапазоне  $|\varepsilon| \leq 0,1$  в случае минимизированного трения торцов образца составляет  $E^+/E^- = 0,82$ , в случае полного трения  $E^+/E^- = 0,73$ .

Для композиционных материалов существенно влияние краевых эффектов и масштабного фактора на корректное определение модулей упругости при растяжении и сжатии [13].

Для проведения более углубленного анализа способов определения модуля Юнга упругих материалов в области их линейного поведения при растяжении-сжатии требуется уточнить многие дополнительные детали. Например, для конкретной партии образцов из слоистого углепластика должны быть выполнены следующие условия.

1. Образцы, испытываемые на растяжение и сжатие, должны быть вырезаны из одной и той же заготовки одинаковыми инструментами по одной и той же технологии.

2. Изготовленные образцы должны быть подвергнуты кондиционированию (выдержке при постоянной температуре в течение некоторого промежутка времени).

3. Испытаниям должны подвергаться образцы с одинаковыми отношениями длины к ширине и ширины к толщине рабочей зоны с однородным ОНС.

4. Измерения деформаций должны проводиться с одинаковой точностью на одинаковых базах измерения, базы измерения должны быть удалены от захватов на одно и то же расстояние. Необходимо контролировать изгиб образцов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях при растяжении и сжатии.

5. Испытания на растяжение и сжатие должны проводиться с одинаковыми по абсолютной величине скоростями деформации.

6. Испытания должны быть выполнены на образцах с одинаковым числом монослоев по толщине. При этом необходимо определить, на какую величину различаются средние толщины образцов при растяжении и сжатии.

7. Необходимо указать, на каких участках диаграмм деформирования и каким методом определялись модули упругости при растяжении и сжатии.

8. Должны быть указаны объемы выборок экспериментальных значений модулей упругости при растяжении и сжатии, а также их коэффициенты вариации.

9. Необходимо проверить статистическую значимость различия модулей упругости при растяжении и сжатии с использованием метода проверки статистических гипотез о равенстве средних значений, а также определить вероятность их различия.

При испытаниях образцов из углепластика на растяжение и сжатие в соответствии со стандартами ASTM D 3039 (стандартный метод определения механических свойств при растяжении композитных материалов на полимерной матрице), ASTM D 6641 (стандартный метод определения компрессионных свойств композитных материалов на полимерной матрице с использованием испытательной установки для сжатия с комбинированным нагружением) не выполнено только условие 3, поэтому обычно имеют место малые, но статистически значимые различия модулей упругости при растяжении  $E^+$  и сжатии  $E^-$  в различных направлениях анизотропии, но они часто не учитываются при анализе напряженно-деформированного состояния в композитных элементах конструкций (см., например, [14]).

**Экспериментальная методика определения модулей упругости при растяжении-сжатии образцов.** Рассмотрим методику определения модулей  $E^+$  и  $E^-$  по результатам испытаний при комнатной температуре  $23 \pm 1$  °С партий образцов из трех материалов разных классов (каждый образец испытывался сначала на растяжение, затем на сжатие после некоторой выдержки в ненагруженном состоянии, абсолютные значения максимальных напряжений одинаковы и заданы с коэффициентами запаса  $2 \div 3$  с учетом условия устойчивости образца при сжатии).

1. Углепластик (УП) (укладка [+45/90/-45/0]), количество слоев — 20, предел прочности на растяжение — более 600 МПа). Диаграммы растяжения-сжатия близки к линейным диаграммам до момента начала образования макротрещин, при квазистатических испытаниях релаксация и ползучесть проявлялись незначительно. Плоские образцы изготавливались из одной пластины и имели постоянное поперечное сечение с размерами  $(4,09 \pm 0,02) \times (48,2 \pm 0,1)$  мм.

2. Прессованный графит (Гр) (плотность  $(1,767 \pm 0,007)$  г/см<sup>3</sup>, равная плотности материала серийного цилиндрического штифта электроплавильных печей, предел прочности на растяжение более 12 МПа). Цилиндрические образцы (тип I по ГОСТ 1497-73) с диаметром рабочей части  $d = (20,02 \pm 0,01)$  мм изготовлены путем фрезерования с последующей токарной обработкой, ось образца параллельна оси штифта. При испытаниях образцов существенной зависимости свойств данного материала от времени не выявлено.

3. Сверхвысокомолекулярный полиэтилен (СВМПЭ), изготовленный методом экструзии. Характеризуется очень широким спектром времен релаксации и малым (до 1–2 % деформации при ОНС) диапазоном нагрузок, в котором ведет себя как вязкоупругий линейный материал, при этом практически отсутствуют необратимые компоненты деформации. Цилиндрические образцы с постоянным поперечным сечением ( $d = (19,98 \pm 0,17)$  мм) без механической обработки цилиндрической поверхности испытывались на растяжение через 2 мес после изготовления экструдата, еще через 7 сут испытывались на сжатие.

В табл. 1 приведены характеристики образцов и параметры их испытаний при растяжении-сжатии ( $n$  — количество образцов,  $L$  — длина образца,  $l$  — длина свободной части образца,  $L_0$  — длина базы измерения деформации,  $V$  — скорость перемещения траверсы,  $|\sigma_{\max}|$  — модуль максимального напряжения,  $|\sigma_1 \div \sigma_2|$  — интервал напряжений, на котором определен модуль Юнга методом построения уравнения линейной регрессии).

Эксперименты на растяжение и сжатие образцов с одинаковыми параметрами испытаний выполнены на испытательной машине Zwick Z100/SN5A, оснащенной универсальным экстензометром Multisens с двумя следящими каретками ( $L_0 = 10 \div 700$  мм).

Для закрепления образцов использованы захваты (рис. 3) в виде плоских рифленых губок длиной 80 мм (УП), байонетные захваты с разрезными втулками, рассчитанными на диаметр образцов  $d = 20$  мм (Гр), захваты в виде губок для цилиндрических образцов диаметром  $d = 10 \div 30$  мм и длиной 80 мм (СВМПЭ).

При испытаниях на растяжение и сжатие образцы из УП и СВМПЭ вставлялись без зазоров в клиновидные захваты и поджимались соответствующими губками, которые при растяжении обеспечивали приложение растягивающей нагрузки, а при сжатии предотвра-

Таблица 1

Характеристики образцов и параметры их испытаний

Материал	$n$	$L$ , мм	$l$ , мм	$L_0$ , мм	$V$ , мм/мин	$ \sigma_{\max} $ , МПа	$ \sigma_1 \div \sigma_2 $ , МПа
Углепластик	15	300	140	80	2,000	55	20 ÷ 50
Графит	5	200	100	60	3,000	4	2 ÷ 4
СВМПЭ	4	275	115	70	0,005	3	1 ÷ 2

Таблица 2

## Статистические оценки модулей Юнга материалов

Материал	$n$	$\mu_d(E)$ , ГПа	$E_{\min}$ , ГПа	$E_{\max}$ , ГПа	$\Delta_\sigma$ , ГПа	$\gamma$ , %
Углепластик:	растяжение	$45,800 \pm 0,400$	44,500	47,100	0,7500	1,6
	сжатие	$45,300 \pm 0,500$	44,000	47,300	0,9300	2,1
Графит:	растяжение	$12,500 \pm 0,800$	11,600	13,200	0,6500	5,1
	сжатие	$12,700 \pm 0,500$	12,300	13,200	0,3400	2,7
СВМПЭ:	растяжение	$0,539 \pm 0,023$	0,518	0,550	0,0145	2,7
	сжатие	$0,523 \pm 0,025$	0,505	0,542	0,0154	3,0

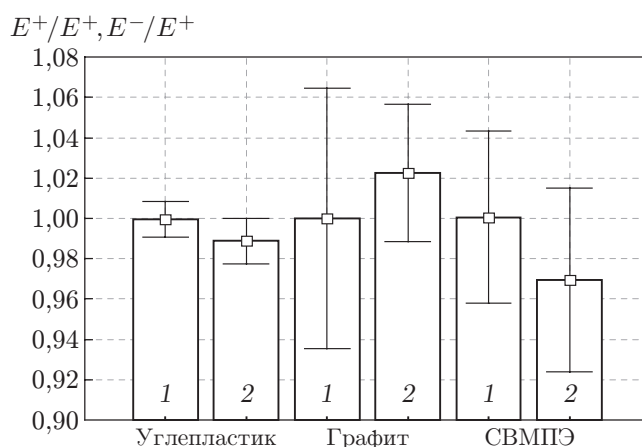


Рис. 4. Нормированные диаграммы размаха измеренных значений модуля Юнга при растяжении (1) и сжатии (2)

щали потерю устойчивости образцов за счет достаточно жесткого защемления их концов на расстоянии 80 мм. При сжатии нагрузка передавалась на рабочую часть образца за счет сжатия на торцах и не превышала  $1/3$  критического значения силы при жесткой заделке сжимаемого образца, вызывающей потерю его устойчивости. Образцы из графита при сжатии нагружались на торцах, которые опирались на байонетные захваты.

На диаграммах испытаний образцов имелись четко выраженные линейные участки, на которых определялись значения модуля Юнга. Для СВМПЭ модуль упругости близок к равносному модулю, определяемому по совокупности диаграмм нагружения и разгрузки. Равновесность процесса нагружения достигалась за счет заданной малой скорости движения траверсы испытательной установки.

Статистическая обработка результатов (с доверительной вероятностью 95 %) включала:

— вычисление параметров, приведенных в табл. 2 ( $n$  — объем выборки,  $\mu_d(E)$  — доверительный интервал определения модуля упругости,  $E_{\min}$ ,  $E_{\max}$  — минимальное и максимальное значения модуля упругости,  $\Delta_\sigma$  — среднеквадратичное отклонение модулей упругости,  $\gamma$  — коэффициент вариации);

— построение для каждого материала двух диаграмм размаха измеренных значений модуля Юнга при растяжении и сжатии, нормированных к значению модуля Юнга  $E^+$  при растяжении (рис. 4);

Таблица 3

Оценки статистических гипотез о равенстве средних значений независимых выборок

Материал	$\mu_d(E^+)$ , ГПа	$\mu_d(E^-)$ , ГПа	$t$	$c$	$p$
Углепластик	$45,800 \pm 0,400$	$45,300 \pm 0,500$	1,600	28	0,12
Графит	$12,500 \pm 0,800$	$12,700 \pm 0,500$	-0,856	8	0,42
СВМПЭ	$0,539 \pm 0,023$	$0,523 \pm 0,025$	1,590	6	0,16

— проверку статистических гипотез (табл. 3) о равенстве средних значений модулей Юнга при растяжении ( $E^+$ ) и сжатии ( $E^-$ ) ( $t$  — значение критерия для теста Стьюдента,  $c$  — число степеней свободы,  $p$  — вероятность принятия гипотезы).

При принятом уровне значимости  $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$  отсутствуют основания для отклонения гипотез о равенстве средних значений модулей при растяжении и сжатии для трех испытанных материалов, поскольку  $\alpha < p$ .

**Заключение.** Предложенные методики испытаний учитывают большинство отмеченных выше факторов и позволяют определить значения модулей Юнга образцов из трех испытанных материалов разного класса, не имеющие статистически значимых различий при растяжении и сжатии.

Аппроксимация нелинейного и (или) неравновесного поведения множества конструкционных и природных материалов при нагружении определяющими уравнениями разномодульной теории упругости должна проводиться на основе корректно полученных данных экспериментов при многоступенчатом нагружении с участками релаксации, ползучести и разгрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: В 2 ч. Ч. 1. Малые деформации. М.: Наука, 1984.
2. Ломакин Е. В. Определяющие соотношения механики разномодульных материалов. М., 1980. (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 159).
3. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
4. Матченко Н. М. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов / Н. М. Матченко, А. А. Трещев. Тула: Тул. гос. ун-т, 2004.
5. Мясников В. П. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред / В. П. Мясников, А. И. Олейников. Владивосток: Дальнаука, 2007.
6. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 6. С. 64–67.
7. Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
8. Березин А. В. О законах деформирования разномодульных дилатирующих сред // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2007. № 2. С. 70–72.
9. Цвелодуб И. Ю. О разномодульной теории упругости // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 157–164.
10. Баев Л. В. Распространение продольных и поперечных волн в упругой разномодульной среде // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 176–182.
11. Пахомов Б. М. Вариант модели изотропного разномодульного материала // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та. Сер. Машиностроение. 2017. № 6. С. 35–48.



12. **Ларичкин А. Ю., Карпов Е. В.** Закономерности деформирования полиуретанового материала при различных видах термосилового нагружения // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2012. Вып. 127. С. 43–47.
13. **Адамов А. А.** О гипотезе однородности, масштабных параметрах длины и краевом эффекте для изотропного континуума Коссера // Механика композиц. материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 3. С. 329–346.
14. **Максименко В. Н.** Методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций из композитов / В. Н. Максименко, И. П. Олегин, Н. В. Пустовой. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2015.

*Поступила в редакцию 30/I 2020 г.,  
после доработки — 30/I 2020 г.  
Принята к публикации 2/III 2020 г.*

---