

ственно. Фрагменты расчетных кривых разрядных токов в 21—25-х каскадах ( $i_{21}^* \div i_{25}^*$ ) и суммарного тока, протекающего в проводнике ( $i^*$ ), представлены на рис. 3, где  $i_h^* = i_h/i_*$ ,  $i_* = U_* \sqrt{C_*/L_*}$ .

На рис. 4 изображено расчетное распределение плотности тока  $j^* = j/j_*$  по сечению проводника и магнитного потока  $\Phi^* = \Phi/\Phi_*$  в канале ускорителя. Здесь  $j_* = i_*/x_*^2$ ,  $\Phi_* = \mu_0 i_*/x_*^3$ , кривые отвечают максимуму разрядного тока в 10-м каскаде. На рис. 5 приведены расчетные и экспериментальные кривые, соответствующие границам оплавления проводника при различных скоростях движения  $v^*$ , штриховая линия — граница оплавления проводника по окончании ускорения, полученная в эксперименте. Согласно расчету, при увеличении числа каскадов более 80 предельная скорость, отвечающая разрушению проводника в результате плавления, составила бы  $v^* \simeq 0,18$ . Таким образом, экспериментально достигнута скорость метания, составляющая 78 % от предельной по условию плавления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бондалетов В. Н., Иванов Е. Н. Бесконтактное индукционное ускорение проводников до гиперзвуковых скоростей // ПМТФ.— 1975.— № 5.
2. Чемерис В. Т., Подольцев А. Д. Исследование магнитно-импульсного взаимодействия проводящих контуров на ЭЦВМ с учетом движения вторичного контура // Техн. электродинамика.— 1979.— № 1.
3. Бондалетов В. П., Иванов Е. П., Петров С. Р. и др. Исследование эффективности ускорения проводников в импульсном магнитном поле соленоида // ПМТФ.— 1983.— № 2.
4. Бер Г. З., Бондалетов В. Н., Гусаров А. А. Ускорение проводников в импульсном магнитном поле цилиндрического многовиткового индуктора // ПМТФ.— 1984.— № 4.
5. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей.— Л.: Энергоатомиздат, 1986.

г. Истра

Поступила 21/III 1988 г.,  
в окончательном варианте — 12/VII 1988 г.

УДК 539.3:537.8

А. Б. Алексеев, В. В. Елисеев

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ, ТЕПЛОВЫЕ И УПРУГИЕ ПОЛЯ В ПРОВОДЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ СКАЧКЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В связи с созданием мощных электромагнитных систем проводятся расчеты термомеханических процессов в этих конструкциях. Особо интересны расчеты полей в комбинированных сверхпроводниках для оценки нежелательных последствий внезапного перехода в нормальное состояние [1].

В данной работе рассматриваются процессы в одиночном прямом бесконечнодлинном комбинированном проводе кругового сечения, представляющем собой жилу из идеального проводника, покрытую толстым слоем обычного металла. Считается, что в начальный момент времени удельное сопротивление жилы скачкообразно меняется от нуля до уровня окружающего металла. При этом ток, первоначально протекающий по идеальному проводнику, вытесняется в окружающий металл, выделяется тепло и возникают механические напряжения от перепада температуры и от пондеромоторных сил.

Расчет состоит из трех этапов: сначала определяется векторное поле плотности тока, затем — вызванное джоулевым теплом температурное поле, результаты этих двух этапов применяются далее в расчете механических напряжений.

**1. Диффузия плотности тока.** Используя систему уравнений Максвелла и линейные материальные соотношения для изотропной среды [2], получим уравнение для плотности тока

$$(1.1) \quad \frac{1}{\mu_0 \mu \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{j}) + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{j}(r, t)$  — вектор плотности тока как функция радиуса-вектора и времени;  $\mu$  и  $\varepsilon$  — магнитная и диэлектрическая проницаемости среды;

$\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  — магнитная и электрическая постоянные;  $\sigma$  — удельная проводимость. Поскольку для металлических проводников токами смещения по сравнению с токами проводимости можно пренебречь [2], то из (1.1) получим  $\Delta \mathbf{j} = \mu_0 \mu \sigma \partial \mathbf{j} / \partial t$  ( $\Delta$  — оператор Лапласа).

В рассматриваемой задаче о бесконечном прямом проводе вектор  $\mathbf{j}$  направлен вдоль оси, с учетом симметрии кругового сечения придем к следующему:

$$(1.2) \quad \partial^2 j / \partial r^2 + (1/r) \partial j / \partial r = \mu_0 \mu \sigma \partial j / \partial t.$$

Будем считать, что в исходном состоянии ток  $I_0$  равномерно распределен по сечению жилы радиуса  $e$ . Тогда начальное условие для уравнения (1.2) имеет вид

$$(1.3) \quad j(r, 0) = \frac{I_0}{\pi e^2} \mathbf{1}(e - r),$$

где  $\mathbf{1}(\dots)$  — функция единичного скачка. Граничными условиями для (1.2) служат требования ограниченности  $j(0, t)$ , а также соотношение  $\partial j(a, t) / \partial r = [\mu_0 \mu \sigma / (2\pi a)] (dI_0 / dt)$ , являющееся результатом интегрирования (1.2) по сечению провода — кругу радиуса  $a$ . Считая далее полный ток  $I_0$  неизменным, получим  $\partial j(a, t) / \partial r = 0$ .

Поставленная задача для плотности тока решается методом Фурье. В результате

$$(1.4) \quad j(r, t) = \frac{I_0}{\pi a^2} + \frac{2I_0}{\pi e a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\gamma_n \frac{e}{a}\right) J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)}{\gamma_n J_0'(\gamma_n)} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 t}{\mu_0 \mu \sigma a^2}\right)$$

( $J_0, J_1$  — функции Бесселя,  $\gamma_n$  — корни уравнения  $J_1(\gamma) = 0$ ).

С целью последующего аналитического расчета температуры и механических напряжений желательно аппроксимировать (1.4) каким-либо простым выражением. Для этого используем вариационное уравнение [3]

$$(1.5) \quad \int_0^a (\Delta j - \mu_0 \mu \sigma \partial j / \partial t) \delta j r dr = 0,$$

оно рассматривается на множестве функций, удовлетворяющих условию  $\partial j(a, t) / \partial r = 0$  и ограниченных при  $r \rightarrow 0$ . Зададим аппроксимацию

$$(1.6) \quad j_1 = \frac{I_0}{\pi a^2} q_1(t) \left(1 - \frac{r^2}{q_2^2(t)}\right) \mathbf{1}(q_2(t) - r).$$

Варьируемые функции  $q_1$  и  $q_2$  имеют смысл:  $q_1(t)$  — значение безразмерной плотности тока в центре провода,  $q_2(t)$  — координата фронта диффузии. Требование постоянства полного тока  $I_0 = 2\pi \int_0^a j_1 r dr$  связывает  $q_1$

с  $q_2$ :  $q_2^2 = 3a^2 / q_1$ .

В результате подстановки (1.6) в (1.5) получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1.7) \quad \frac{dq_1}{dt} + \frac{10}{3\mu_0 \mu \sigma a^2} q_1^2 = 0.$$

Начальное условие к нему зададим так, чтобы норма отклонения  $\int_0^a [j_1(r, 0) - j(r, 0)]^2 r dr$ , где  $j(r, 0)$  имеет вид (1.3), была минимальной. Тогда решением (1.7) будет  $q_1 = (10t / (3\mu_0 \mu \sigma a^2) + 0,737e^2 / a^2)^{-1}$ , но оно годится лишь при условии  $q_2(t) \leq a$ , т. е. пока фронт распространения плотности тока не дойдет до внешнего радиуса. Это произойдет в момент вре-

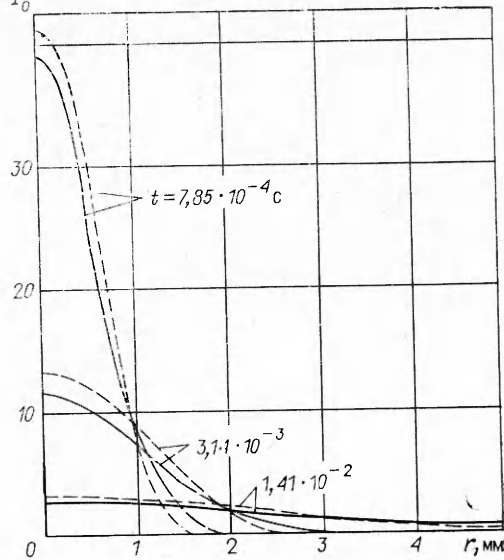
мени  $t_* = 0,1\mu_0\mu\sigma a^2(1 - 2,21e^2/a^2) \cdot \frac{\pi a^2}{I_0}$ .  
 При  $t \geq t_*$  выберем аппроксимацию

$$(1.8) \quad j_2 = \frac{I_0}{\pi a^2} \left[ (q_3(t) - q_4(t)) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + q_4(t) \right],$$

для которой получим

$$q_4 = 1 - \exp\left(-\frac{15(t - t_*)}{\mu_0\mu\sigma a^2}\right), \\ q_3 = 3 - 2q_4.$$

По формулам (1.4), (1.6), (1.8) проведены расчеты при  $a = 5$  мм,  $e = 0,5$  мм,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 5 \cdot 10^9$  (Ом·м)<sup>-1</sup> (медь при  $T = 18$  К). Результаты вычислений представлены на рис. 1 (сплошные линии — точное решение, штриховые — аппроксимация).



Р и с. 1

**2. Температурное поле.** Считается, что провод окружен бесконечной изотропной однородной средой с малой теплопроводностью. Введем безразмерные радиус  $\rho = r/a$  и время  $\tau = t\kappa_1/(a^2C_1)$ ;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — коэффициенты теплопроводности для провода и окружающей среды;  $C_1$  и  $C_2$  — теплоемкости на единицу объема для них.

Температурное поле описывается системой уравнений

$$(2.1) \quad \partial^2 T_1 / \partial \rho^2 + (1/\rho) \partial T_1 / \partial \rho + b = \partial T_1 / \partial \tau, \quad 0 < \rho < 1;$$

$$(2.2) \quad \lambda^2 \partial^2 T_2 / \partial \rho^2 = \eta^2 \partial T_2 / \partial \tau, \quad \rho > 1,$$

где  $\lambda^2 = \kappa_2/\kappa_1 \ll 1$ ;  $\eta^2 = C_2/C_1$ ; введено джоулево тепловыделение  $b = j^2 a^2 / (\sigma \kappa_1)$ . При записи (2.2) сделано предположение, что температурное поле  $T_2(\rho, \tau)$  в окружающей среде имеет вид иогрансля вблизи  $\rho = 1$ , так что член  $\rho^{-1} \partial T_2 / \partial \rho$  может быть отброшен.

К уравнениям (2.1), (2.2) присоединяются начальные условия  $T_1(\rho, 0) = T_2(\rho, 0) = 0$ , требования ограниченности решения при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$ , а также условия сопряжения

$$T_1(1, \tau) = T_2(1, \tau) = \theta(\tau), \quad \partial T_1(1, \tau) / \partial \rho = \lambda^2 \partial T_2(1, \tau) / \partial \rho = Q(\tau).$$

Ни температура  $\theta$ , ни безразмерный тепловой поток  $Q$  не известны. Однако, применив преобразование Лапласа к уравнению (2.2), для изображений получим  $\bar{\theta} = -\frac{1}{\lambda\eta\sqrt{p}} \bar{Q}$  ( $p$  — параметр преобразования Лапласа).

Переходя к оригиналам, имеем

$$(2.3) \quad \theta(\tau) = -\frac{1}{\lambda\eta} \int_0^\tau \frac{Q(t) dt}{\sqrt{\pi(\tau-t)}}$$

— граничное условие для  $T_1$ . Последующий расчет температуры опирается на решение интегрального уравнения для  $Q(\tau)$ , которое выводится следующим образом. Полагая  $\partial T_1(1, \tau) / \partial \rho = Q$ , решим (2.1) методом собственных функций. Подставив найденное выражение  $T_1(1, \tau)$  в (2.3), придем к

$$(2.4) \quad 2 \int_0^\tau \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma_n^2(\tau-t)) \right] Q(t) dt + \frac{1}{\lambda\eta} \int_0^\tau \frac{Q(t) dt}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} = -F(\tau),$$

где

$$F(\tau) = 2 \left[ \int_0^\tau h_0(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_n)} \int_0^\tau \exp(-\gamma_n^2(\tau-t)) h_n(t) dt \right];$$

$$b_0 = \int_0^1 b(\rho, \tau) \rho d\rho, \quad b_n = \int_0^1 b(\rho, \tau) J_1(\gamma_n \rho) \rho d\rho;$$

как и прежде,  $\gamma_n$  — корни уравнения  $J_1(\gamma) = 0$ .

Присутствие в уравнении (2.4) малого параметра  $\lambda$  позволяет применить асимптотический метод. Разыскивая решение в виде  $Q(\tau) = \lambda Q_1(\tau) + \lambda^2 Q_2(\tau) + \dots$ , получим

$$\int_0^\tau \frac{Q_1(t)}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} dt = -\eta F(\tau),$$

$$\int_0^\tau \frac{Q_2(t) dt}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} = -2\eta \int_0^\tau \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma_n^2(\tau-t)) Q_1(t) \right) dt = -\eta F_1(\tau)$$

и т. д. Пришли к уравнениям Абеля, решения которых

$$Q_1 = -\eta \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{F(t)}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} dt$$

и т. д. В случае, когда тепловыделение не зависит от времени, имеем

$$Q_1 = -\frac{4\eta}{\sqrt{\pi}} \left[ b_0 \sqrt{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{J_0(\gamma_n) \gamma_n^2} \left( \sqrt{\tau} - \frac{\exp(-\gamma_n^2 \tau)}{\gamma_n} \int_0^{\gamma_n \sqrt{\tau}} \exp(\lambda^2) d\lambda \right) \right].$$

Не вызывает затруднений и вычисление  $Q_2(\tau)$ .

Определив тепловой поток  $Q$ , можно найти искомое температурное поле  $T_1$  в проводе. Как показали расчеты, процесс теплопроводности идет намного быстрее, чем процесс диффузии тока. Наибольшие перепады температуры возникают в начальный период, когда ток еще не успел уйти из центральной жилы. Методом собственных функций получим выражение температуры для этого случая

$$(2.5) \quad T_1(\rho, \tau) = 2b_0\tau + 4b_0 \frac{a}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n \rho) J_1(\gamma_n e)}{\gamma_n^3 J_0^2(\gamma_n)} (1 - \exp(-\gamma_n^2 \tau))$$

$$(b_0 = (1/2)(I_0/(\pi e))^2/(\sigma \kappa_1)).$$

**3. Механические напряжения.** Пондеромоторные силы и перепады температуры вызывают появление механических напряжений. Оценка частот упругих колебаний провода в случае осевой симметрии показала, что можно ограничиться квазистатическими расчетами. Справедливый для линейной упругости принцип суперпозиции позволяет независимо рассматривать действие температурного и электромагнитного полей.

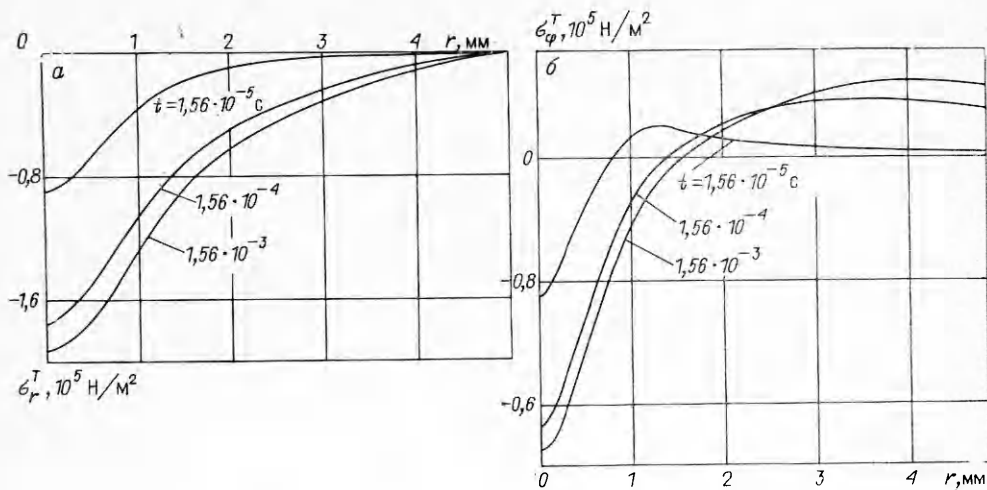
Система уравнений теории упругости имеет вид [4]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^s, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (1/E)[(1 + \nu)\boldsymbol{\tau} - \nu I_1(\boldsymbol{\tau})\mathbf{E}] + \alpha E T,$$

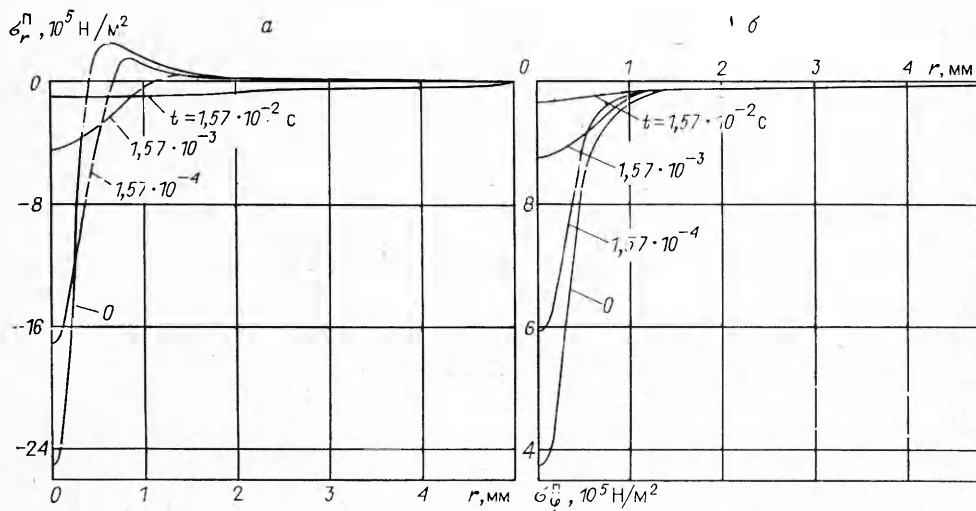
где  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор напряжений;  $\mathbf{K}$  — вектор объемных сил;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформаций;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $I_1(\boldsymbol{\tau})$  — первый инвариант  $\boldsymbol{\tau}$ ;  $\mathbf{E}$  — единичный тензор;  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения.

Считая, что провод находится в состоянии плоской деформации, и учитывая симметрию, для радиальной компоненты находим

$$r\sigma_r'' + 3r\sigma_r' + \frac{K_r}{1-\nu} + (rK_r)' + \frac{\alpha E}{1-\nu} T' = 0$$



Р и с. 2



Р и с. 3

$((...)' = d/dr)$ . Полагая поверхность  $r = a$  свободной, получим

$$\sigma_r = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \int_0^r r^2 K_r dr + \int_r^a K_r \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) dr \right] +$$

$$+ \frac{1}{a^2} \int_0^a r \left( r K_r + \frac{\alpha E}{1-\nu} T \right) dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left( r K_r + \frac{\alpha E}{1-\nu} T \right) dr.$$

Прочие компоненты тензора напряжений определяются равенствами

$$\sigma_\phi = (r\sigma_r)' + rK_r, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\phi) - \alpha ET.$$

Для проводника с  $\mu = 1$  единственным механическим эффектом электромагнитного поля является сила Лоренца [5]. В нашем случае

$$K_r = -\mu_0 j(r, t) \frac{1}{r} \int_0^r jr dr, \quad K_\phi = K_z = 0.$$

Расчеты напряжений проведены при  $\alpha = 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $\kappa_1 = 10^3 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $E = 1,23 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\sigma = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ ,  $I_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ А}$ .

Результаты расчета температурных напряжений и напряжений от пондеромоторных сил в различные моменты времени приведены на рис. 2 и 3 соответственно. Полученное термоупругое состояние провода не опасно с точки зрения прочности. Однако, во-первых, параметры проводника выбраны довольно условно, во-вторых, возможны другие критерии работоспособности (для сверхпроводников, например, см. [1]).

В рассмотренной выше идеализированной постановке не учитывалась зависимость проводимости и других свойств от температуры. Учет ее привел бы к связанной нелинейной задаче о распределении тока и температуры. Приведенные же расчеты относятся к той начальной стадии процесса, когда разогрев еще мал. Согласно формуле (2.5), перепад температуры по сечению составляет около 2 К; при начальной температуре 18 К зависимость свойств от температуры в этом случае не проявляется [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уилсон М. Сверхпроводящие соленоиды.— М.: Мир, 1985.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1975.
3. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности.— М.: Высш. шк., 1982.
4. Лурье А. И. Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах.— М.: Мир, 1986.

г. Ленинград

Поступила 10/XI 1987 г.,  
в окончательном варианте — 26/V 1988 г.

УДК 533.9

А. Х. Мнацаканян, Г. В. Найдис, С. В. Румянцев

### ДИНАМИКА ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЭНЕРГОВКЛАДЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

Вопросам динамики газа при наличии источников энерговыделения посвящено много работ. Хорошо известны решения задач о сильном точечном взрыве и точечном взрыве с учетом противодействия в идеальном газе с постоянным показателем адиабаты для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии [1, 2]. Такие взрывы подобны друг другу, если переменные нормировать на соответствующие параметры невозмущенного газа  $\rho_\infty$ ,  $p_\infty$ , а также на характерные размер и время ослабления взрывной волны —  $r_0 = (E_0/\rho_\infty)^{1/n}$ ,  $\tau_0 = r_0(\rho_\infty/p_\infty)^{1/2}$  ( $E_0$  — энергия, выделяющаяся на единицу площади или длины, либо полная энергия взрыва,  $n = 1, 2, 3$  для плоской, цилиндрической и сферической симметрии). Решение теории точечного взрыва (ТВ) часто хорошо передает зависимость величин скачков газодинамических переменных на фронте ударной волны (УВ) на больших расстояниях от центра взрыва (при  $r \gg R_0$ ,  $R_0$  — радиус зоны энерговыделения). Для рассмотрения же распределения газодинамических величин на малых временах, а также конечного распределения температуры в области энерговыделения после выравнивания давления необходимо учитывать конечность размера области энерговыделения и времени энерговыклада.

Нередко энерговыделение в газе происходит неравновесным образом. Так, при импульсном электрическом разряде в молекулярном газе большая часть выделяемой энергии запасается в колебательных степенях свободы молекул, что приводит к значительному отрыву колебательной энергии от равновесной. В этом случае при анализе газодинамических явлений требуется рассматривать кинетику обмена энергией между внутренними и поступательными степенями свободы молекул. Газодинамика неравновесно возбужденного азота рассматривалась для плоской и цилиндрической симметрии в [3, 4]. При этом длительность возбуждающего импульса полагалась бесконечно малой.

В данной работе исследуются газодинамические явления при неравновесном возбуждении сферической области воздуха, при различных отношениях между временем энерговыклада  $\tau$  и характерными газодинамическим и релаксационным временами.

При заданной исходной температуре газа  $T_\infty$ , удельной (на единицу массы) вложенной энергии  $Q$  и ее доле  $\xi$ , запасаемой в колебательных степенях свободы, характер течения газа определяется двумя безразмер-