Теплофизика и аэромеханика, 2018, том 25, № 6

УДК: 532.5.013.4

Режимы течения термовязкой жидкости в плоском неизотермическом слое*

Ю.М. Куликов, Э.Е. Сон

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

E-mail: kulikov-yurii@yandex.ru; son.eduard@gmail.com

В работе подробно обсуждается постановка задачи о расчете трехмерного течения термовязкой жидкости в приближении слабой сжимаемости в кубической области, заключенной между плоскими стенками с различной температурой. В двух других направлениях задаются периодические граничные условия, причем в одном из них поддерживается постоянный перепад давления для сохранения напорного течения. Такая постановка позволяет проследить за эволюцией начальных возмущений, накладываемых на основное течение. Развитие течения зависит от характеристик возмущения, в данном случае рассматривается вырожденный одномерный шум, дивергенция которого равна нулю (далее — дивергентный шум), который затем фильтруется с помощью специального корреляционного фильтра. При использовании недивергентного шума необходимо применение алгоритма восстановления соленоидальности случайного поля скорости. По результатам моделирования установлено, что развитие случайного поля возмущений может приводить к двум качественно различным исходам: в первом случае — относительно малой интенсивности возмущений — происходит смена формы профиля скорости, связанная с исчезновением точки перегиба и увеличением расходных характеристик в 1,5–1,6 раза, во втором случае начинается турбулизация течения, сопровождаемая разрушением ядра потока и существенным падением расходных характеристик. В обоих исходах выход на стационарный режим течения — фактический в первом случае (в смысле неизменности полей скоростей) и статистический — во втором — происходит достаточно долго: до $t \sim 200$ в безразмерных единицах. Анализ течения проводится на основе интегральных кривых кинетической энергии и энстрофии, а также с помощью пространственного усреднения полученных массивов данных.

Ключевые слова: термовязкость, точка перегиба, случайный шум, смешение, корреляционный фильтр, коррекция дивергенции, турбулентность.

Введение

Изучение турбулентности обусловлено как фундаментальной значимостью этого явления, представляющего собой единственную нерешенную проблему классической физики [1], так и практической необходимостью решения инженерных задач механики жидкости и газа. Существование в уравнениях Навье–Стокса, являющихся базовыми для описания турбулентности, одновременно диссипативных и нелинейных членов определяет многообразие свойств турбулентного течения, таких как неорганизованное хаотическое поведение, кажущееся случайным, широкий диапазон пространственных и временных масштабов, наличие развитой завихренности, перемежаемость во времени и пространстве. Не останавливаясь на простом перечислении свойств, приведем одно

* Работа выполнена в рамках Государственной научной программы ОИВТ РАН по направлению № 15 «Исследование электрофизических и тепловых процессов в многофазных и реагирующих средах», проект № 01201357834.

из наиболее современных определений турбулентности [1], под которой в математическом смысле подразумевается любое хаотическое решение трехмерных уравнений Навье–Стокса, оказывающееся чувствительным к начальным данным и являющееся результатом последовательности неустойчивостей ламинарного течения, возникающей в том случае, когда бифуркационный параметр последовательно принимает значения из монотонно возрастающей последовательности. Это определение, на взгляд авторов, является развитием соображений, приведенных в работе [2]. Кроме того, из него неявно следует, что количественные характеристики турбулентности определяются условиями ее возникновения, в частности, характеристиками начальных возмущений и ламинарно-турбулентного перехода.

Расчет течения проводился на основе собственной реализации схемы КАБАРЕ, использующей приближение слабой сжимаемости. Начало этому методу было положено в работах [3, 4]. В настоящее время данный подход используется для решения задач различной сложности в газовой динамике [5], акустике [6], течениях с химическими реакциями [7], несжимаемой жидкости [8]. В работах [9–14] изучались течения термовязкой жидкости (ТВЖ), проявляющие необычные свойства в неоднородных температурных полях.

Предлагаемая работа является развитием опыта применения приближения слабой сжимаемости как к свободным сдвиговым течениям, так и к течениям в канале. В частности, в статье [15] было показано, что профиль скорости течения ТВЖ может содержать точку перегиба, положение которой для данного флюида определяется только лишь перепадом температур ΔT поперек канала, входящим в состав безразмерного параметра α. Последний также определяет и резкую зависимость длины установления при изменении α. Вариация этого параметра, кроме того, сильнейшим образом влияет на кривые нейтральной устойчивости, сдвигая их в область малых чисел Рейнольдса Re и область длинноволновых возмущений [16].

В работе [17] было проведено моделирование процесса смешения в плоском канале, вызванного воздействием гармонических возмущений. На примере эволюции свободного сдвигового слоя качественно подтверждены [18] основные экспериментальные результаты работы [19]. Свойства трехмерной (текущей) реализации схемы обсуждались на примере моделирования задачи Тейлора–Грина [20].

Как показывает опыт использования явной схемы КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости [21], расчет задачи установления течения занимает большое количество времени и в трехмерном случае оказывается чрезмерно ресурсозатратным. При рассмотрении трехмерного течения такая постановка задачи кажется не очень удачной, так как в этом случае не удается выполнить массовый счет при различных параметрах. Для преодоления указанной проблемы можно задавать готовый аналитический профиль скорости в термовязком течении, реализующийся при данном перепаде давления. В двумерных расчетах [17] возмущения поперечной скорости переносились основным потоком от входной границы и вызывали «разрушение» течения на дистанции 20 калибров. В этом случае также фактически решалась задача установления течения, в котором наблюдались пространственно-периодические структуры.

В настоящей работе последовательно излагаются общая постановка задачи, связанная с заданием согласованного поля скорости; алгоритм задания случайного соленоидального шума с требуемой корреляционной длиной, а также постановка периодических граничных условий в плоском слое с сохранением градиента давления. Далее приводятся краткие комментарии касательно программной реализации и анализ пространственного усреднения некоторых режимов течения.

1. Постановка задачи

1.1. Распределение скорости основного течения и поля температуры

Расчет течения термовязкой жидкости, динамическая вязкость которой является резкой функцией температуры T, —

$$\mu = \mu_0 e^{\beta(T-T_0)/T_0}, \tag{1}$$

где μ_0 и T_0 — реперные значения вязкости и температуры, проводится в трехмерной кубической области размером $L_X = L_Y = L_Z = L$, периодически продолженной в направлениях X и Y, но ограниченной в направлении Z стенками с различной температурой: T_0 — на нижней стенке и $T_0 + \Delta T$ — на верхней стенке, на которых устанавливается условие прилипания жидких частиц. Профиль скорости основного течения [15]

$$U_{\text{prof}}(Z) = -\frac{Ce^{-\alpha z/L}}{\alpha(e^{\alpha}-1)}\left(L - Le^{\alpha z/L} - Z + Ze^{\alpha}\right),\ Z \in [0, L], \tag{2}$$

где $\alpha = \Delta T\beta/T_0$ — безразмерный комплекс,

$$C = \frac{L^2}{\mu_0}\cdot\frac{\Delta p}{L} \tag{3}$$

согласован с перепадом давления Δp, поддерживаемым в дальнейшем в направлении X, а также с линейным распределением температуры

$$T(Z) = \frac{\Delta T}{L}Z + T_0. \tag{4}$$

Значение безразмерного параметра α выбиралось таким, чтобы точка перегиба была удалена от стенок, а высокоскоростное ядро потока не слишком сильно приближалось к пристеночной области (рис. 1). Давление и плотность связаны соотношением для слабосжимаемой жидкости:

$$p = c^2(\rho - \rho_0), \tag{5}$$

где c — скорость звука, ρ — плотность жидкости в некоторой точке, ρ_0 — характерная (реперная) плотность. Скорость звука c выбирается таким образом, чтобы число Маха M во всей расчетной области удовлетворяло соотношению

$$M^2 = \left(\frac{\max[U, V, W]}{c}\right)^2 \le 0,01. \tag{6}$$

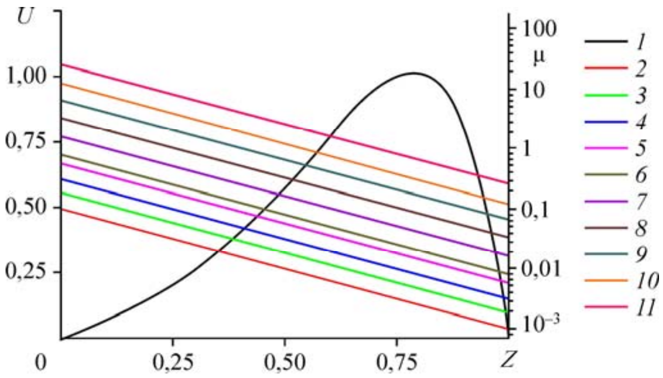

Рис. 1. Распределение профиля скорости ($U = U(Z)$) и динамической вязкости ($\mu = \mu(Z)$) при различных значениях μ_0.

1 — $U(Z)$, μ_0 = 0,1 (*2*), 0,2 (*3*), 0,4 (*4*), 0,6 (*5*), 0,8 (*6*), 1,6 (*7*), 3,2 (8), 6,4 (*9*), 12,8 (*10*), 26,6 (*11*), среднемассовое число Re_1 = 4704 (*2*), 2353 (*3*), 1177 (*4*), 788 (*5*), 588 (*6*), 294 (*7*), 197 (*8*), 92 (*9*), 36 (*10*), 18 (*11*).

В свободных сдвиговых течениях безразмерное время t можно определить по характерной (среднемассовой) скорости U_0 и толщине начальной потери импульса $\delta_{\theta,0}$ как $t = \tilde{t}\,U_0 / \delta_{\theta,0}$, где $\tilde{t}$ — физическое время [13]. В настоящей работе вместо толщины потери импульса будет использоваться длина канала L (протяженность расчетной области в направлении X). Помимо характерного времени $t_0 = L/U_0$ введем набор чисел Рейнольдса Re:

— $\mathrm{Re}_1 = U_0 L \rho_0 / \mu_{\mathrm{mean}}$, где U_0 — среднемассовая скорость основного течения, L — высота канала, ρ_0 — характерная плотность, μ_{mean} — среднемассовая вязкость;

— $\mathrm{Re}_2 = U^* L \rho_0 / \mu_{\mathrm{mean}}$, где $U^* = U(Z)$ — локальная скорость основного течения; описание остальных величин см. выше;

— $\mathrm{Re}_3 = U^* L \rho_0 / \mu^*$, где $\mu^* = \mu(Z)$ — локальная динамическая вязкость, являющая функцией ширины канала; описание остальных величин см. выше;

— $\mathrm{Re}_4 = U_0 L \rho_0 / \mu^*$, описание величин см. выше;

— $\mathrm{Re}_5 = U^* z^* \rho_0 / \mu_{\mathrm{mean}}$, где z^* — расстояние от стенки, причем это число определяется в области $\left|z^*\right| \le 0{,}15 \cup \left|L - z^*\right| \le 0{,}15$; описание остальных величин см. выше.

Множественность определения Re связана с резким изменением как профиля скорости, так и вязкости поперек канала. Очевидно, что среднемассовые показатели могут дать неверное представление о поведении течения в различных слоях, особенно на этапе развития неустойчивости. Действительно, достаточно сильная вариация вязкости поперек канала подразумевает возможность существования различных режимов течения, возникающих в слоях с различной температурой, что, вероятно, связано с величиной работы вязких напряжений, играющих важную роль в развитии сдвиговых неустойчивостей. В частности, на рис. 2 приведены характерные профили локальных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_{2,3,4,5} = \mathrm{Re}_{2,3,4,5}(Z)$ для среднемассового $\mathrm{Re}_1 \approx 588$, которые позволяют предполагать возникновение серьезных затруднений при анализе свойств течения на основе безразмерных параметров. Это объясняется тем, что, во-первых, априори неизвестно, может ли хотя бы один из перечисленных параметров являться критерием, однозначно определяющим будущую эволюцию течения, во-вторых, невозможно установить, какое из чисел $\mathrm{Re}_1 - \mathrm{Re}_5$ наилучшим образом подходит для описания картины течения. Также следует отметить, что во многих теоретических работах число Рейнольдса используется для оценки пространственно-временных масштабов течения, качества их сеточного разрешения, а также общей вычислительной сложности проведения расчетов $C(\mathrm{Re})$.

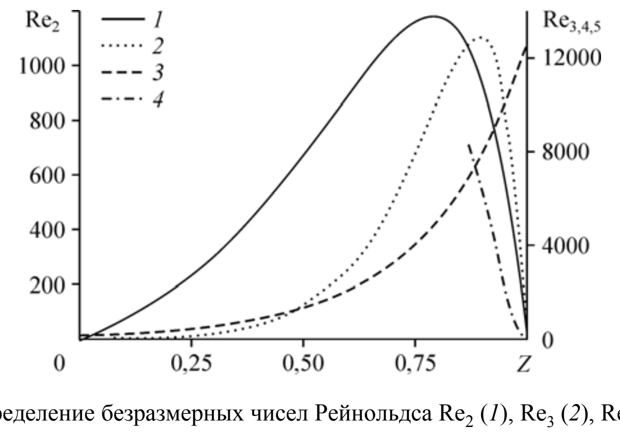

Рис. 2. Распределение безразмерных чисел Рейнольдса Re_2 (*1*), Re_3 (*2*), Re_4 (*3*), Re_5 (*4*) при среднемассовом $\mathrm{Re}_1 = 588$.

В частности, основываясь на соотношении характерных размеров и частот пульсаций в инерционном интервале однородной изотропной турбулентности, можно предложить такую оценку:

$$C(\mathrm{Re}) \sim \mathrm{Re}^{11/4}. \tag{7}$$

Более жестким является условие, предполагающее, что шаг по времени связан с колмогоровским масштабом соотношением Куранта, тогда

$$C(\mathrm{Re}) \sim \mathrm{Re}^{3}. \tag{8}$$

С одной стороны, значение среднемассового Re_1 позволяет отнести течение к устойчивым ламинарным движениям, с другой — максимальные значения $\mathrm{Re}_2 \approx 1200$ в ядре потока свидетельствуют о возможности развития возмущений в этой области и появлении периодических движений.

Число Re_3, определяемое по переменным вязкости и скорости, демонстрирует на порядок большие значения, которые, начиная с $Z \geq 0{,}5$, соответствуют числам перехода к турбулентности ($\mathrm{Re} \approx 2300$ в трубе), а в окрестности своего максимума ($Z \approx 0{,}9$), смещенного к горячей стенке, и вовсе соответствуют значениям смесительного перехода ($\mathrm{Re} \approx 10000$, см. [22]).

Число Re_4, определяемое по переменной вязкости, монотонно возрастает по направлению к горячей стенке со значениями, подразумевающими возможность турбулентного перехода в диапазоне $0{,}5 \lesssim Z \lesssim 0{,}6$. Использование этого параметра позволяет потенциально разделить течение на два слоя: в одном из них ламинарный характер течения будет сохраняться, а в другом — будет происходить его турбулизация. Впрочем, завышенные значения в области горячего пристенка позволяют усомниться в значимости Re_4.

«Пристеночное» число Рейнольдса Re_5 необходимо для оценки развития турбулентности в пограничных слоях. В области своего определения оно имеет диапазон значений, сравнимый с $\mathrm{Re}_{3,4}$, что с формальной точки зрения говорит о возможности существования развитого турбулентного течения в пристеночном слое.

1.2. Задание шума с требуемыми корреляционными характеристиками

Корректность результатов моделирования физического явления обеспечивается не только свойствами математического метода, но и правильным заданием начальных и граничных условий. При моделировании турбулентности вычислитель сталкивается с «порочным кругом» [23], когда для адекватного моделирования явления необходимо задать его основные характеристики. Для успешного воспроизводства характеристик турбулентности используется несколько подходов, в частности, включающих в себя постановку периодических граничных условий, задание условий на входе путем масштабирования поля скорости [24] из областей, находящихся ниже по потоку (выделение мгновенных случайных полей скоростей), задание кармановского энергетического спектра в фурье-пространстве, а также проведение вспомогательного моделирования. Последний способ часто используется при исследовании ламинарно-турбулентного перехода, когда в качестве начальных или граничных условий используются характеристики наиболее неустойчивых мод, полученных из решения уравнения Орра–Зоммерфельда [25].

Наиболее простым методом задания турбулентных течений является наложение случайных флуктуаций на средний профиль скорости. В силу того, что энергетический спектр случайной величины, получаемой с помощью стандартных псевдослучайных методов генерации, равномерно распределен во всем диапазоне значений волновых чисел (в случае спектрального подхода), нехватка энергии в длинноволновой области приводит либо к замедленной турбулизации течения, либо к быстрому затуханию турбулентности и ламинаризации потока [23]. Этот факт был подтвержден собственными расчетами авторов, однако специальному изучению он не подвергался.

В общем случае задание гауссова распределения для автокорреляционной функции может оказаться достаточным для имитации свойств однородной изотропной турбулентности. Кроме того, возможна генерация искусственных входных данных с предварительно заданными (экспериментально определяемыми) статистическими свойствами — средними значениями, автокорреляционными и кросскорреляционными функциями, а также моментами высших порядков.

Общий алгоритм модификации белого шума связан, во-первых, с установлением длины затравочной последовательности процессора, во-вторых, с модификацией ее значений и, в-третьих, с генерацией нового случайного распределения чисел в области значений $[-1,\ 1]$, которое в дальнейшем подвергается обработке другими фильтрами. Приведем краткое описание цифрового фильтра [23] случайного поля, использовавшегося при задании начальных данных и определявшего двухточечную корреляцию на основе случайной последовательности x'_m, такой, что $\overline{x'_m} = 0$, $\overline{x'_m x'_m} = 1$, где черта обозначает усреднение по членам последовательности. Следующая свертка определяет цифровой линейный нерекурсивный фильтр:

$$x''_m = \sum\nolimits_{n=-W_f^X}^{W_f^X} b_n x'_{m+n}, \tag{9}$$

где b_n — коэффициенты фильтра, W_f^X — база, равная полуширине фильтра (support of the filter). Так как $\overline{x'_m x'_n} = 0$ при $m \neq n$, то выражение

$$\frac{\overline{x''_m x''_{m+k}}}{\overline{x''_m x''_m}} = \sum\nolimits_{j=-W_f^X+k}^{W_f^X} b_j b_{j-k} \Big/ \sum\nolimits_{j=-W_f^X}^{W_f^X} b_j^2 \tag{10}$$

представляет собой соотношение между коэффициентами фильтра и автокорреляционной функцией для x''_m. Процедура фильтрации обобщается на случай трехмерного случайного поля и представляет собой свертку трех одномерных фильтров:

$$b_{ijk} = R_S b_X(i) b_Y(j) b_Z(k), \tag{11}$$

где R_S — дополнительный параметр, позволяющий изменять амплитуду при фильтрации. Для обращения (10) необходимо знать автокорреляционную функцию $R_{x''x''}(\vec{x}, \vec{r})$ (где $\vec{x}$ — радиус-вектор положения исходной точки) или (и) воспользоваться понятием длины корреляции. Из предположения об однородности турбулентности следует, что корреляционная функция зависит от расстояния между точками $r = |\vec{r}|$, тогда пространственная корреляционная функция примет вид

$$R_{x''x''}(r, 0, 0) = \exp\left(-\pi r^2 \Big/ 4\left(l_{\text{c}}^X\right)^2\right),\ R_{x''x''}(0) = 1,\ \lim\nolimits_{r\to\infty} R_{x''x''}(r) = 0. \tag{12}$$

Имея сеточное множество с пространственным шагом Δx и $l_{\text{c}}^X = n_{\text{c}}^X \Delta x$, получим

$$\frac{\overline{x''_m x''_{m+k}}}{\overline{x''_m x''_m}} = R_{x''x''}(k\Delta x) = \exp\left(-\frac{\pi (k\Delta x)^2}{4(n_{\text{c}}^X \Delta x)^2}\right) = \exp\left(\frac{\pi k^2}{4\left(n_{\text{c}}^X\right)^2}\right), \tag{13}$$

а коэффициенты фильтрации примут вид:

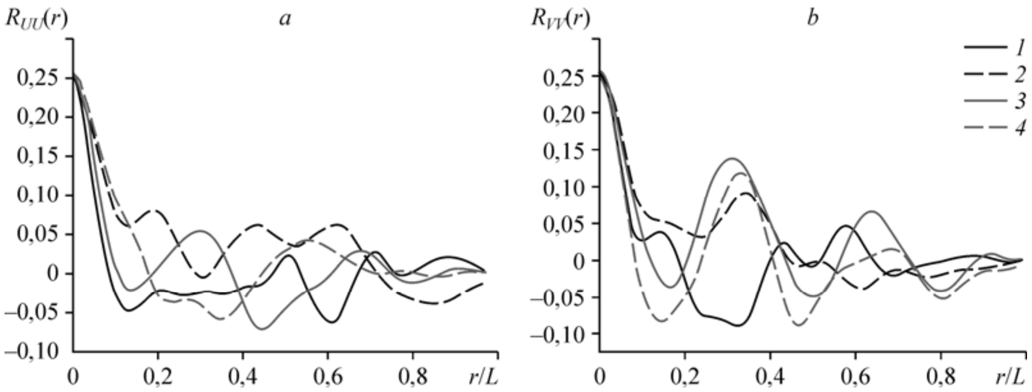

Рис. 3. Автокорреляционные функции $R_{UU} = R_{UU}(r/L)$ (*a*) и $R_{VV} = R_{VV}(r/L)$ (*b*) в направлениях *X* и *Y* соответственно для чисел Рейнольдса Re_1 = 588 (*1*, *2*), 788 (*3*, *4*), рассчитанные на сетках 64^3 и 128^3. Размер сетки 64^3 (*1*, *3*), 128^3 (*2*, *4*).

$$b_k \approx \frac{\tilde{b}_{\tilde{k}}}{\sum_{j=-W_f^X}^{W_f^X} \tilde{b}_j^2}, \;\; \tilde{b}_k = \exp\left(-\frac{\pi k^2}{2\left(n_c^X\right)^2}\right). \tag{14}$$

Точность аппроксимации (13) определяется из соотношения

$$\max_k \left| \exp\left(-\frac{\pi k^2}{4\left(n_c^X\right)^2}\right) - \sum_{j=-W_c^X+k}^{W_c^X} b_j b_{j-k} \Big/ \sum_{j=-W_c^X}^{W_c^X} b_j^2 \right| \le 0,001 \tag{15}$$

при $W_f^X \ge 2n_c^X$, n_c^X = 2÷100. Из неравенства (15) следует, что база фильтра (filter support) должна быть больше удвоенной корреляционной длины. Для фильтрации необходимо задать корреляционные длины по соответствующим пространственным направлениям $l_c^X = n_c^X \Delta x$, $l_c^Y \Delta y$, $l_c^Z = n_c^Z \Delta z$ и полуширины цифрового фильтра W_f^X, W_f^Y, W_f^Z. Фильтрованное поле скорости находится с помощью свертки

$$v'(i, j, k) = \sum_{i=n_X}^{n_X} \sum_{j=n_Y}^{n_Y} \sum_{k=n_Z}^{n_Z} b_X(i') b_Y(j') b_Z(k') A(i+i', j+j', k+k'), \tag{16}$$

где A — исходный массив случайных данных.

Результирующее поле турбулентных пульсаций может иметь ненулевую дивергенцию, по крайней мере, это не гарантируется разработчиками метода [23]. На рис. 3*a*, 3*b* в качестве примера приведены графики автокорреляционных функций пульсационных составляющих скорости $R_{UU}(r/L)$ и $R_{VV}(r/L)$ в направлениях *X* и *Y* в зависимости от безразмерного расстояния между точками корреляции r/L. Так как при свертке случайного поля скорости с коэффициентами фильтра предположение о периодичности расчетной области не использовалось, то количество точек, участвующих в выборке, уменьшалось с увеличением *r*. Таким образом, при $r/L > 0{,}5$ этого числа точек явно недостаточно для получения достоверных значений. Тем не менее, в обоих направлениях прослеживается резкий спад корреляционной зависимости вплоть до небольших отрицательных значений на участке 0,1–0,2, что в принципе соответствует характерной длине корреляции, устанавливаемой фильтром (*L*/8, см. табл. 1, 2).

Таблица 1

Список основных расчетных параметров

Название параметра	Обозначение	Значение
Реперная температура	T_0	127
Температура на нижней стенке	T_1	127
Температура на верхней стенке	T_2	273
Показатель экспоненты	β	–4
Размер расчетной области	L	0,2
Реперная плотность	ρ_0	1000
Теплопроводность	λ	0,3
Теплоемкость	C_p	2000
Число Куранта	CFL	0,15

1.3. Фильтр соленоидального поля

В рассматриваемой задаче сжимаемость может оказать существенное влияние на основное течение, так как при турбулизации могут появляться области достаточно сильной завихренности, создающие градиенты давления, сопоставимые с градиентом основного течения. Таким образом, необходимо минимизировать влияние возможной начальной недивергентности поля пульсаций с учетом пространственной периодичности по направлениям X и Y. Особенно просто задание соленоидального поля выглядит при использовании спектральных методов. В этом случае оказывается достаточным равенство нулю скалярного произведения волнового вектора $\vec{k}$ и фурье-компонент скорости $\overrightarrow{u'_k}$ [26]:

$$\left(\vec{k},\ \overrightarrow{u'}_k\right) = 0. \tag{17}$$

Добиться требуемого результата можно также путем задания случайных функций f и g, а затем, используя правила векторной алгебры, задать трехмерное поле $\nabla f \times \nabla g$ [27], обладающее свойством соленоидальности; или же путем применения итерационных методов получения соленоидальной составляющей поля скорости [28].

Для целей настоящей работы авторами был реализован алгоритм схемы коррекции дивергенции [29] (соленоидальности — divergence correction scheme) в изложении [30], который реконструирует соленоидальное поле путем минимизации расстояния до исходных данных методом наименьших квадратов при условии сохранения массы, что дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \min \sum_{i,\,j,\,k=1}^{n_X,\,n_Y,\,n_Z} \left(u_{\text{init}}^{ijk} - u_{\text{corr}}^{ijk}\right)^2 + \left(v_{\text{init}}^{ijk} - v_{\text{corr}}^{ijk}\right)^2 + \left(w_{\text{init}}^{ijk} - w_{\text{corr}}^{ijk}\right)^2, \\ \sum_{i'=1}^{nX} d_{n_X}^{ii'} u_{\text{corr}}^{i'jk} + \sum_{j'=1}^{n_Y} d_{n_Y}^{jj'} u_{\text{corr}}^{ij'k} + \sum_{k'=1}^{n_Y} d_{n_Z}^{kk'} u_{\text{corr}}^{ijk'} = 0, \end{cases} \tag{18}$$

где u_{init}^{ijk}, v_{init}^{ijk}, w_{init}^{ijk} и u_{corr}^{ijk}, v_{corr}^{ijk}, w_{corr}^{ijk} — соответственно начальные и скорректированные компоненты скорости, $d_{n_X}^{ii'}, d_{n_Y}^{jj'}, d_{n_Z}^{kk'}$ — одномерные сеточные (дискретные) дифференциальные операторы в направлениях X, Y, Z, определяемые разностной схемой. Для центральных разностных аппроксимаций с учетом граничных условий прилипания одномерный сеточный дифференциальный оператор имеет вид

Таблица 2

Дополнительные расчетные параметры

Номер расчета	Реперная вязкость, μ_0	Перепад давления, Δp	Среднемассовое число Рейнольдса, Re_2	Расчетная сетка, $n_X \times n_Y \times n_Z$	Характерные длины корреляции, (n_c^X, n_c^Y, n_c^Z)	Полуширина фильтра, (W_f^X, W_f^Y, W_f^Z)	Амплитудный параметр, Re_3	Интенсивность турбулентности, $l_X \times 10^{-2}$	Интенсивность турбулентности, $l_r \times 10^{-2}$
1	26,6	81,92	18	64^2	(4, 4, 4)	(12, 12, 12)	1,0	2,1	2,1
2	12,8	40,96	36					2,1	2,8
3	6,4	20,48	92					1,7	1,9
4	3,2	10,24	197					1,8	3,4
5	1,6	5,12	294				1,25	2,4	1,7
6а	0,8	2,56	588	64^2				1,8	2,4
6б				128^2	(8, 8, 8)	(24, 24, 24)	5,0	3,6	4,4
7а	0,6	1,92	788	64^2	(4, 4, 4)	(12, 12, 12)	1,0	2,5	3,1
7б				128^2	(8, 8, 8)	(24, 24, 24)	4,0	2,7	2,4
8а	0,4	1,28	1177	64^2	(4, 4, 4)	(12, 12, 12)	1,25	3,0	2,7
8б				128^2	(8, 8, 8)	(24, 24, 24)	5	2,4	3,5
8в				128^2			8	1,5	1,1
10а	0,2	0,64	2353	64^2	(4, 4, 4)	(12, 12, 12)	0,5	2,9	2,7
10б				128^2	(8, 8, 8)	(24, 24, 24)	5	4,6	5,3
11а	0,1	0,32	4707	64^2	(4, 4, 4)	(12, 12, 12)	1,25	2,7	2,5
11б				64^2				5,3	4,6
11в				64^2				2,1	2,2
11г				128^2	(12, 12, 12)	(24, 24, 24)	5	4,1	4,1

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & \dots & \dots \\ \dots & -1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & -1/2 & 0 & 1/2 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

в то время как для периодических граничных условий первая и последняя строки матрицы модифицируются, так как в этом случае используются значения для противоположной границы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & \dots & \dots \\ \dots & -1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & \dots & \dots & -1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В случае непериодических граничных условий матрица является трехдиагональной. Существует также реализация этого метода с весовыми коэффициентами [30].
Алгоритм оптимизации включает в себя несколько этапов.

1. Решение задачи на собственные значения для матриц $d_{n_X} d_{n_X}^{\mathrm{T}}$, $d_{n_Y} d_{n_Y}^{\mathrm{T}}$, $d_{n_Z} d_{n_Z}^{\mathrm{T}}$. Разложение на собственные значения формулируется как

$$\begin{aligned} d_{n_X} d_{n_X}^{\mathrm{T}} &= \Phi_{n_X} \Lambda_{n_Y} \Phi_{n_X}^{\mathrm{T}}, \\ d_{n_Y} d_{n_Y}^{\mathrm{T}} &= \Phi_{n_Y} \Lambda_{n_Y} \Phi_{n_Y}^{\mathrm{T}}, \\ d_{n_Z} d_{n_Z}^{\mathrm{T}} &= \Phi_{n_Z} \Lambda_{n_Z} \Phi_{n_Z}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{21}$$

где Φ_{n_X}, Φ_{n_Y}, Φ_{n_Z} — матрицы левых собственных векторов.

2. Расчет дивергентной невязки

$$S_{init}^{ijk} = \sum\nolimits_{i'=1}^{n_X} d_{n_X}^{ii'} u^{i'jk} + \sum\nolimits_{j'}^{n_Y} d_{n_Y}^{n_Y} u^{ij'k} + \sum\nolimits_{k'}^{n_Y} d_{n_Z}^{kk'} u^{ijk'}, \tag{22}$$

$$\Gamma^{ijk} = \Lambda_{n_X}^{i} + \Lambda_{n_Y}^{j} + \Lambda_{n_Z}^{k}. \tag{23}$$

3. Расчет множителей Лагранжа

$$\mu^{ijk} = \sum\nolimits_{l,m,n=1}^{n_X,n_Y,n_Z} \Phi_{n_X}^{il} \Phi_{n_Y}^{jm} \Phi_{n_Z}^{kn} \Big/ \Gamma_{lmn} \sum\nolimits_{i',j',k'=1}^{n_X,n_Y,n_Z} \Phi_{n_X}^{i'l} \Phi_{n_Y}^{j'm} \Phi_{n_Z}^{k'n} S_{\mathrm{init}}^{i'j'k'}. \tag{24}$$

4. Обновление значений скорости

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{corr}}^{ijk} &= u_{t\mathrm{init}}^{ijk} - \sum\nolimits_{i'=1}^{n_X} d_{n_X}^{i'i} \mu^{i'jk}, \\ v_{\mathrm{corr}}^{ijk} &= v_{\mathrm{init}}^{ijk} - \sum\nolimits_{j'}^{n_Y} d_{n_X}^{j'j} \mu^{ij'k}, \\ w &= w_{\mathrm{init}}^{ijk} - \sum\nolimits_{i'=1}^{n_X} d_{n_X}^{k'k} \mu^{ijk'}. \end{aligned} \tag{25}$$

В настоящей работе в качестве начальных условий задается двумерный вырожденный шум, связанный с заданием пульсаций скорости в двух направлениях периодичности и удовлетворяющий более жесткому условию, чем обычная соленоидальность:

$$\frac{\partial u'(0)}{\partial x} + \frac{\partial v'(0)}{\partial y} = 0, \tag{26}$$

то есть при требовании выполнения равенств

$$\frac{\partial u'(0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial v'(0)}{\partial y} = 0, \tag{27}$$

заранее предполагается, что $u'(0, y) = u'(y)$ и $v'(0, x) = v'(x)$. Указанное упрощение, в частности, позволяет избежать применения описанного выше фильтра коррекции дивергенции в трехмерной реализации, к числу недостатков которого относится использование девяти вложенных циклов при расчете множителей Лагранжа. Однако для двумерного недивергентного шума описанный фильтр демонстрирует высокую эффективность и высокую скорость работы. Очевидно, что характеристики задаваемого шума (в частности двумерность) далеко не полностью передают особенности трехмерного поля хаотических пульсаций, наблюдаемых в реальном физическом процессе. Таким образом, данный шум может применяться в предположении, что трехмерная турбулентность имеет сравнительно короткую историю, однако он позволяет проследить процесс перекачки энергии в движения, приводящие к росту третьей компоненты скорости между пластинами.

2. Постановка граничных условий для численного метода КАБАРЕ

Схема КАБАРЕ в своей исходной постановке сочетает уравнения, записанные в двух формах — консервативной и характеристической, что приводит к использованию расширенного набора сеточных множеств — так называемых консервативных и потоковых переменных. Последние могут включать в себя еще несколько множеств — по числу направлений переноса локальных инвариантов Римана. Данные множества по-разному располагаются в объеме расчетной области: множество точек консервативных переменных находятся в центрах граней расчетных ячеек и в дальнейшем нумеруется целыми числами, тогда как точки потоковых множеств располагаются в серединах граней и индексируются дробными числами. Наиболее полное обобщение вариаций метода КАБАРЕ содержится в монографии [31], текущая реализация в двумерном приближении описана в работе [21].

В рассматриваемой постановке предлагается в качестве начальных условий задать на стационарном профиле скорости мелкомасштабные турбулентные пульсации и проследить их временную эволюцию в периодическом канале. Также предположим, что расчетная сетка имеет (n_X, n_Y, n_Z) расчетных ячеек в соответствующих пространственных направлениях. В этом случае для поддержания постоянного значения перепада давления Δp и переноса значений скорости локальные инварианты Римана, по которым определяются граничные условия, терпят разрыв на границе.

Основываясь на инвариантах Римана для слабосжимаемой жидкости, отвечающих за перенос возмущений, можно записать:

— в направлении X

$$\begin{aligned} I_1^X &= c \ln(p + c^2 \rho_0) + u, \quad \lambda_1^X = u + c, \\ I_2^X &= -c \ln(p + c^2 \rho_0) + u, \quad \lambda_2^X = u - c, \\ I_3^X &= v, \ I_4^X = w, \ I_5^X = T, \ \lambda_{3,4,5}^X = u, \end{aligned} \tag{28}$$

— в направлении Y

$$\begin{aligned} I_1^Y &= c \ln(p + c^2 \rho_0) + v, \quad \lambda_1^Y = v + c, \\ I_2^Y &= -c \ln(p + c^2 \rho_0) + v, \quad \lambda_2^Y = v - c, \\ I_3^Y &= u, \ I_4^Y = w, \ I_5^Y = T, \ \lambda_{3,4,5}^Y = v, \end{aligned} \tag{29}$$

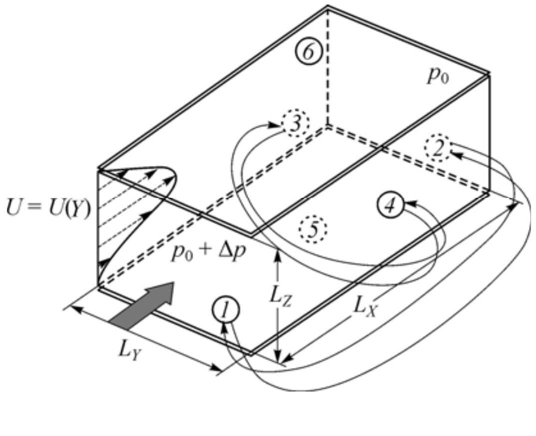

Рис. 4. Схема расчетной области.
Границы отмечены номерами *1–6*; периодические граничные условия, связанные друг с другом показаны двойными стрелками, темная широкая стрелка отмечает направление основного течения $U = U(Z)$ (границы *1*, *2*), штриховые стрелки показывают начальную проекцию плоского профиля на границу *3*.

— в направлении Z

$$I_1^Z = c\ln(p + c^2\rho_0) + w,\ \ \lambda_1^Z = w + c,$$
$$I_2^Z = -c\ln(p + c^2\rho_0) + w,\ \lambda_2^Z = w - c, \quad (30)$$
$$I_3^Z = u,\ I_4^Z = v, I_5^Z = T,\ \lambda_{3,4,5}^Z = w.$$

Построим граничные условия для расчетной области, изображенной на рис. 4.

2.1. Периодическое граничное условие с сохранением перепада давления

Для вычисления значений потоковых переменных в граничных ячейках необходимо ввести два дополнительных слоя, куда будут пересылаться значения потоковых переменных (ρ, u, v, w) с противоположной границы, причем, значения плотности должны быть скорректированы с учетом перепада давления Δp между границами.

Таким образом, в слой у входной левой границы записываются переменные $(\rho(i,j,n_X) + \Delta p / c^2,\ u(i,j,n_X),\ \ v(i,j,n_X),\ w(i,j,n_X)),\ T(i,j,n_X)),$ по которым вычисляется I_1^X, распространяющийся вниз по потоку. Инвариант I_1^X вместе с I_2^X, значения которого переносятся характеристиками из глубины расчетной области, позволяет определить потоковые переменные на входной границе. Аналогично для выходной границы создается дополнительный слой $(\rho(i,j,1) - \Delta p / c^2,\ \ u(i,j,1),\ v(i,j,1),\ \ w(i,j,1)),\ \ T(i,j,1)),$ который используется для вычисления инварианта I_2^X, в то время как I_1^X содержит информацию из внутренних точек расчетной области. В результате в канале должно образовываться пространственно-периодическое течение с фиктивным разрывом плотности на концах. Описанный прием позволяет избежать решения задач по установлению требуемого профиля скорости и линейного распределения температур, а также распространения турбулентных пульсаций, переносимых основным потоком от входной границы, что должно существенно сократить процесс счета.

С физической точки зрения использование рассмотренных граничных условий означает задание пространственного поля турбулентных пульсаций в объеме жидкости, который множество раз протекает по одному и тому же каналу прямоугольного сечения.

Определенную сложность представляет нелинейная зависимость инвариантов слабосжимаемой жидкости от p, которая может привести к ошибкам в работе алгоритма. К недостаткам подобной постановки следует отнести и вопрос влияния возмущений, распространяющихся вверх по потоку (влияние «будущего» на «прошлое»). Постановка таких граничных условий встречается в некоторых работах, однако не для инвариантов Римана.

2.2. *Периодические граничные условия на передней 3 и задней 4 гранях, изображенных на рис. 4*

Данные граничные условия также требуют двух дополнительных слоев ячеек без разрыва плотности на передней $(\rho(i,n_Y,j),\ u(i,n_Y,j),\ v(i,n_Y,j),\ w(i,n_Y,j),\ T(i,n_Y,j))$ и задней $(\rho(i,1,j),\ u(i,1,j),\ v(i,1,j),\ w(i,1,j)\ T(i,1,j))$ гранях, по которым вычисляются инварианты I_1^Y и I_2^Y.

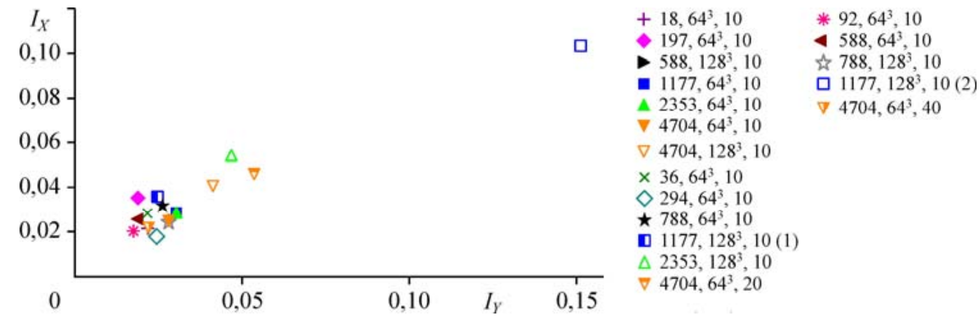

Рис. 5. Диаграмма интенсивностей начальных возмущений по направлениям *X* и *Y*.
Числа, приведенные рядом с указателями, соответствуют (слева направо) числу Рейнольдса Re_1, размеру расчетной сетки, скорости звука; цифры (1) и (2) указывают соответственно на расчеты (10) и (11), выполненные при $\mathrm{Re}_1 = 1177$ и отличающиеся начальной интенсивностью возмущения.

2.3. *Условие прилипания для значений потоковых переменных на стенках 5 и 6, изображенных на рис.* 4

Условия прилипания на стенках 5 и 6 (рис. 4) записывается достаточно просто: $(u(i,j,1/2),\ v(i,j,1/2),\ w(i,j,1/2)) = (0,0,0)$. Расчет давления проводится по значению инварианта I_2^Z, переносящего информацию из глубины области. На верхней стенке оно записывается в виде $(u(i,j,n_Z+1/2), v(i,j,n_Z+1/2), w(i,j,n_Z+1/2)) = (0,0,0)$, а давление определяется по значению инварианта I_1^Z, содержащего информацию внутренних ячеек. Граничные условия для скоростей дополняются условиями постоянства температуры на нижней $\left(T(i,j,n_Z+1/2) = T_0\right)$ и верхней $\left(T(i,j,n_Z+1/2) = T_0 + \Delta T\right)$ стенках.

В расчетах использовались прямоугольные сетки с числом ячеек, одинаковым по трем пространственным направлениям, — 64^3 и 128^3. Так как схема КАБАРЕ относится к классу явных численных методов, то по условию устойчивости шаг по времени определяется минимальным размером шага по пространству, относящимся к размеру канала L. Это обстоятельство существенно увеличивает трудоемкость расчетов при измельчении сетки поперек канала, особенно при длительных временах установления течения. Таким образом, используемые сетки позволяют в основном разрешать крупномасштабные движения. Список параметров, остающихся постоянными для всех расчетов, приведен в табл. 1. Начальные данные, изменяющиеся от расчета к расчету, вынесены в табл. 2. Диаграмма начальной интенсивности турбулентности, дополняющая представление о свойствах начальных данных, приведена на рис. 5.

3. Замечания о программной реализации

Алгоритм численного метода КАБАРЕ в приближении слабой сжимаемости был реализован на языке высокого уровня Fortran F90 с применением гибридного распараллеливания на основе технологий OpenMP и MPI. Расчеты проводились на ЭВМ ОИВТ РАН и МВС-10п МСЦ РАН. Детали текущей реализации в части моделирования изотермических течений обсуждались в работе [21].

4. Типы усреднения и результаты

Турбулентность часто возникает в неоднородных жидкостях или многокомпонентных смесях с различной вязкостью. При рассмотрении свободных сдвиговых течений обычно проводится пространственное усреднение по направлениям периодичности. Для случая градиентного течения проводить усреднение в направлении градиента давления не представляется возможным, так как турбулентность может эволюционировать по длине канала. Однако для расчетной области, рассматриваемой в настоящей работе, характерный размер, на котором действует перепад давления, в точности равен размерам по другим направлениям, а пролетное время жидкой частицы достаточно мало. Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать усреднение в направлениях периодичности X и Y, используя обозначение $\langle\ \rangle_S$. Пространственное усреднение позволяет установить средние профили скорости и температуры в расчетной области, реализующиеся на текущем шаге по времени, и представить совокупность полученных результатов в виде цветовой $Z-t$-диаграммы. К рассматриваемым величинам также относятся интегралы кинетической энергии

$$E(t)=\frac{1}{\rho_0 U_0^2 \Omega}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho_0(U^2+V^2+W^2)}{2}\,d\Omega, \tag{31}$$

и энстрофии

$$\zeta(t)=\frac{t_0^2}{\rho_0\Omega}\int\limits_{\Omega}\frac{\rho\vec{\omega}^2}{2}d\Omega, \tag{32}$$

где Ω — объем расчетной области.

Зависимость интегральной кинетической энергии от времени (рис. 6) обладает следующими свойствами. При последовательном увеличении числа Рейнольдса в диапазоне $\mathrm{Re}=18\div 4704$ наблюдается смена поведения кривых, так как при малых Re происходит увеличение кинетической энергии, а при больших — резкий ее спад в связи с турбулизацией потока. Очевидно, что чем меньше число Рейнольдса, тем существеннее роль вязких напряжений, и это приводит к более быстрой перестройке потока и связанному с ней изменению кинетической энергии; кроме того, имеет место быстрое достижение сеточной сходимости (например, в случае Re = 588 для сеток 64^3 и 128^3). В переходном режиме наблюдается смешанная ситуация — в диапазоне $\mathrm{Re} > 588 \cap \mathrm{Re} < 2000$ на грубых сетках происходит резкая турбулизация, в то время как измельчение сетки возвращает режим течения, соответствующий малым числам Рейнольдса. Начиная с $\mathrm{Re} \approx 2300$, при измельчении сетки режим течения остается неизменным. При дальнейшем повышении числа Рейнольдса происходит переход к «предельному» режиму, когда форма кривой фактически от Re не зависит. Следует отметить, что для любого Re должен существовать такой момент времени t_a, при котором кинетическая энергия принимает практически асимптотическое значение. Время выхода на асимптоту должно, вероятно, свидетельствовать об установлении нового равновесия между течением и соответствующими граничными условиями.

На самой грубой сетке расчет при Re = 4704 проводился для различных скоростей звука c и не показал сколько-нибудь существенных различий.

Поведение кривых интегральной энстрофии (рис. 7) подтверждает существование двух режимов эволюции течения, в одном из которых оно сохраняет ламинарный характер, а в другом — происходит генерация завихренности, сопровождаемая диссипацией

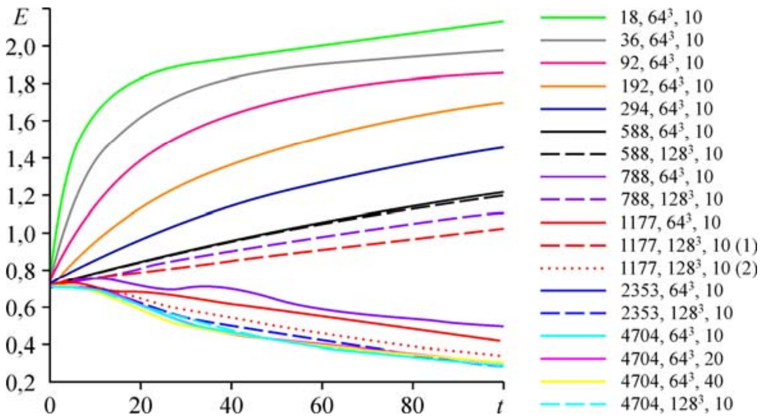

Рис. 6. Зависимость безразмерной кинетической энергии от времени, рассчитанная для различных чисел Рейнольдса на сетках 64^3 и 128^3.
Порядок соответствия значений у указателей см. на рис. 5.

энергии. В последнем случае активная турбулизация наступает за $\Delta t \approx 8{-}15$ в зависимости от числа Рейнольдса, причем при увеличении Re в диапазоне Re = 588–1176 скорость генерации завихренности возрастает в 2 раза. На грубой сетке распад турбулентности, связанный с диссипацией завихренности, происходит на участке $t = 20 \div 150$, независимо от числа Рейнольдса или скорости звука c. Быстрее всего, за $t \approx 6$, генерация завихренности происходит для максимального из рассмотренных чисел Рейнольдса — Re = 4704, на сетке 128^3.

Перейдем к описанию поведения течения (Re_1 = 588, 64^3) на основе совокупности профилей (рис. 8), осредненных в направлении периодичности и представленных в виде $Z - t$-диаграмм, что позволяет установить причину появления двух типов зависимостей $E = E(t)$. Так, для самого малого числа Рейнольса оказывается, что поле температуры $\langle T \rangle_S$ остается неизменным на всех усредненных по времени слоях, чего нельзя сказать о поведении основного течения $\langle U \rangle_S$, в котором под воздействием малых колебаний конечной амплитуды происходит перестройка течения. Здесь следует обратить внимание на то, что имеет место увеличение скорости в ядре потока и его расширение

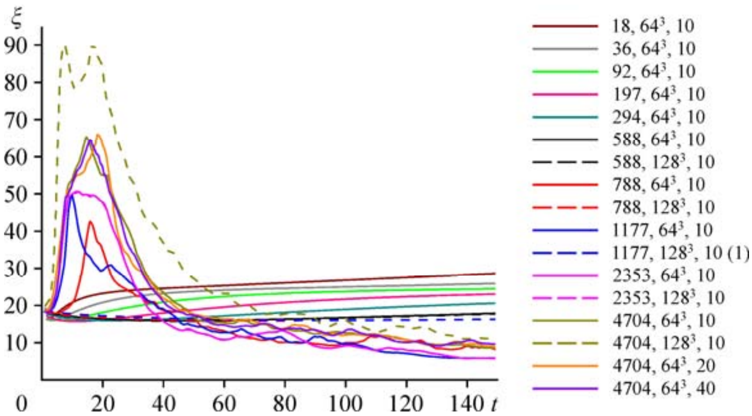

Рис. 7. Зависимость интегральной энстрофии от времени, рассчитанная для различных чисел Рейнольдса на сетках 64^3 и 128^3.
Порядок соответствия значений у указателей см. на рис. 5.

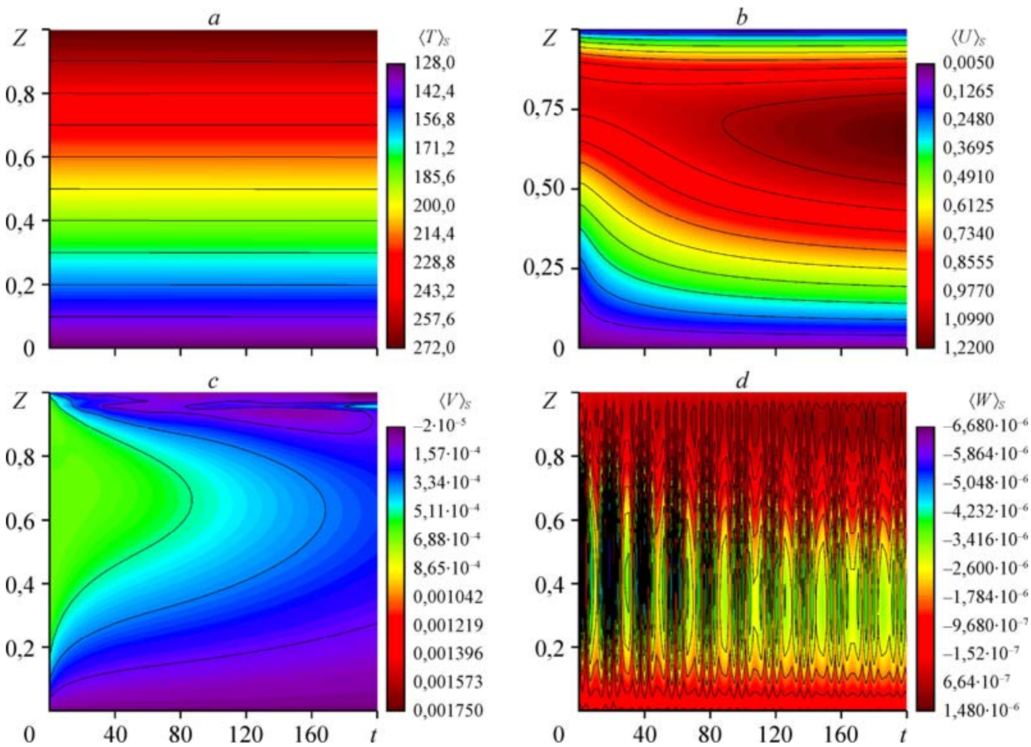

Рис. 8. *Z*–*t*-диаграммы профилей температуры $\langle T\rangle_S$ (*a*) и компонент скорости $\langle U\rangle_S$ (*b*), $\langle V\rangle_S$ (*c*), $\langle W\rangle_S$ (*d*), построенные по результатам расчетов для $\mathrm{Re}_1 = 588$ на сетке 64^3.

в центральную часть канала. Таким образом, полностью изменяются расходные характеристики течения. Действительно, в используемой постановке профиль скорости, задаваемый в качестве начальных условий, будучи согласованным с граничными условиями по напорным и тепловым характеристикам (течение с заданным перепадом давления, прилипанием на стенках с различной температурой T в отсутствие возмущений скорости), должен сохраняться неограниченно долго. Именно это и было первоначально подтверждено численными экспериментами для течения Пуазейля и профиля термовязкой жидкости с точкой перегиба. В последнем случае ситуация изменяется при наложении возмущений, что приводит к перестройке потока с формированием профиля без точки перегиба, после чего резко изменяются расходные характеристики. Важно отметить, что существование точки перегиба в профиле скорости для одного флюида определяется исключительно перепадом температур ΔT. Перестройка течения происходит под воздействием возмущений компонент скорости (эти возмущения исчезают вследствие усреднения), этот процесс протекает без роста максимальной скорости в ядре потока или вытеснения ядра от стенок. «Выпрямление» профиля продолжается достаточно долго — $t \approx 30$. Следует предположить нарушение консервативности работы алгоритма (но не схемы), связанное с наложением специфических граничных условий, однако оно не дает объяснения исчезновению точки перегиба, а также неизменности расходных характеристик в горячем пристенке. Также предположение об уменьшении фактического ΔT в силу частичного перемешивания в пристеночной области не подтверждается графиками среднего профиля температуры. В приведенном виде расход в основном течении через расчетную область $Q(t)/Q(0)$ хорошо описывается функцией $Q(t)/Q(0) \sim \log(t)$.

На дальних временах эволюции расходная кривая лежит между двумя асимптотами (функциями) вида $Q(t)/Q(0) \sim b\log(t-a)$ и $Q(t)/Q(0) = 1 + A\exp(-t/t_1)$.

Компонента скорости свободного течения в направлении периодичности $\langle V \rangle_S$ по мере эволюции затухает во всех слоях: в ядре течения ($z \approx (0{,}5–0{,}75)L$) на участке $\Delta t \approx 1{,}5$ ее величина падает в 3 раза, далее происходит практически линейный спад с изменением приблизительно на 0,2 от начальной величины. Аналогично в поперечном сечении эта величина сохраняется в зоне ядра 0,4–0,8, в то время как в пристеночной зоне происходит ее затухание практически до нуля. Таким образом, развитие трехмерного течения не происходит. Следует заметить, что измельчение сетки для рассматриваемого режима приводит к более раннему изменению расходных характеристик, связанному с ускорением в ядре потока, а именно: на сетке 64^3 — при $t \approx 65$, на сетке 128^3 — при $t \approx 39$.

При средних числах Рейнольдса (Re = 788, 1176) оказывается, что на грубой сетке имеет место турбулентный сценарий развития, а на мелкой происходит обычная перестройка потока под действием начальных возмущений (рис. 9). В случае турбулентного сценария процесс смешения можно проследить по изолиниям температуры $\langle T \rangle_S$. Помимо прочего, можно судить о поведении конкретных слоев жидкости в силу линейной привязки положения изолинии и ординаты слоя. Сам процесс смешения будем описывать по смещению положения изолинии, которое начинается в верхнем слое $(0{,}9–1{,}0)L$ при $t \approx 9$ и приводит за $\Delta t \approx 20$ к практически полному смешению.

В остальных слоях крупномасштабное смешение начинается в интервале $t \approx 11–22$. В конечном итоге процесс смешения приводит к расширению среднего слоя — $z \in [0{,}5,\ 0{,}6]$,

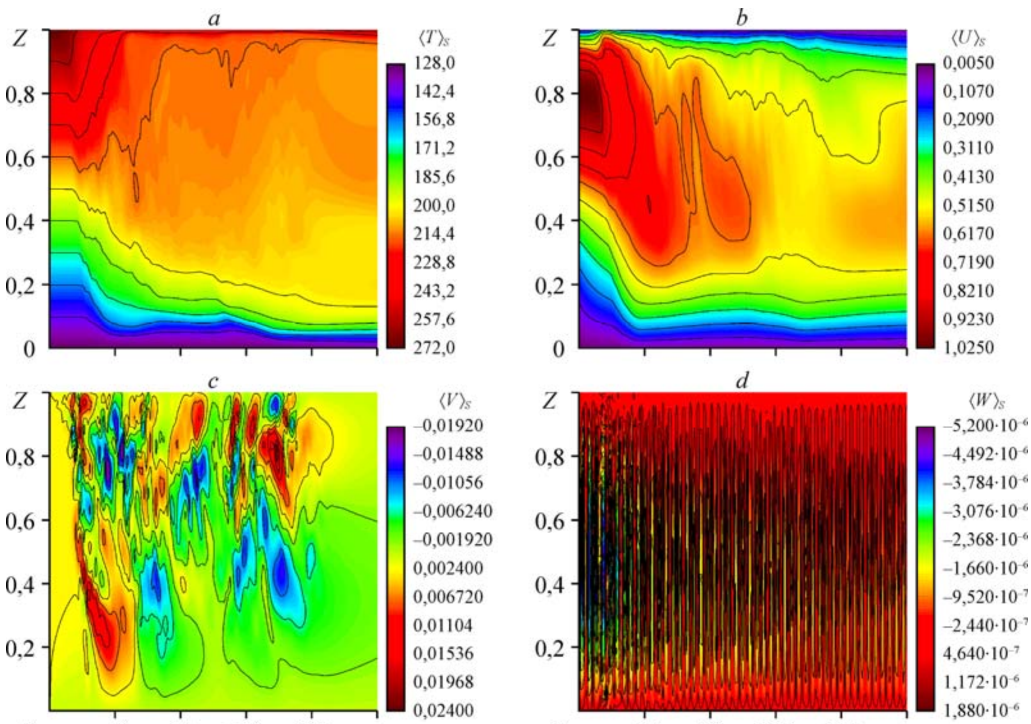

Рис. 9. *Z*–*t*-диаграммы профилей температуры $\langle T \rangle_S$ (*a*) и компонент скорости $\langle U \rangle_S$ (*b*), $\langle V \rangle_S$ (*c*), $\langle W \rangle_S$ (*d*) в случае турбулентного режима при низком числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 = 788$ на сетке 64^3.

причем в верхней полуплоскости происходит его резкий, но неравномерный рост на интервале $\Delta t \in 20-60,$ тогда как нижняя граница плавно расширяется к холодной стенке. Это расширение имеет экспоненциальный характер и занимает гораздо больший промежуток времени: $\Delta t \approx 22$–180, и, в итоге, достигает положения 0,13L по ординате. В асимптотическом состоянии на верхней границе этот слой достигает ординаты 0,95. Таким образом, можно считать, что в конце расчета слой перемешанной жидкости с перепадом температур $\Delta T/10$ занимает 0,83 всего сечения. В результате на достаточно больших временах эволюции слои (0,6–1)L (в верхней полуплоскости) превращаются в горячий пристенок толщиной около 0,05L. Слой 0,4–0,5 в нижней полуплоскости практически не изменяет своей толщины, но, подпитываясь от холодных слоев у нижней стенки, смещается вниз, в область ординаты 0,085–0,165. Толщины более холодных слоев падают приблизительно в 4 раза (с 0,4 до 0,085), в конце расчета они занимают холодный пристенок толщиной 0,085, что почти в 2 раза больше по сравнению с горячим.

Разрушение профиля основного течения происходит при $t \approx 14$. При этом ядро потока сильно расширяется: с 0,6–0,9 до 0,44–0,9, соответственно падает и максимальная скорость в потоке. Картина осредненного профиля скорости представляется очень неоднородной, в том числе до момента времени $t \approx 110$. Ее нельзя назвать стационарной и на более поздних этапах эволюции — в дальнейшем происходит окончательное «размывание» центральной части потока. При $t > 120$ наиболее активное замедление происходит в окрестности верхней (горячей) стенки, что, вероятно, связано с активным перемешиванием. Смещение изолиний скорости в нижней полуплоскости к холодной стенке указывает на уменьшение слоев с соответствующей температурой в 2 раза, при этом в верхней пристеночной области толщина слоя со значением скорости $U \sim (0,3–0,4)U_{\max}$ ($U_{\max} = 1$) растет крайне неравномерным образом (возмущение из-за больших вихрей может достичь и ядра потока, сдвигая его к нижней стенке).

График изначально нулевого поля скорости $\langle W \rangle_S$ после усреднения позволяет судить о наличии вихрей с вертикальной компонентой скорости, что приводит к отсутствию стационарного поля. Вместе с тем, в этом случае усреднение не дает надежных результатов в силу достаточно большого шага между моментами усреднения. График компоненты скорости $\langle V \rangle_S$ в направлении периодичности говорит о существовании режима с выделенным направлением скорости, в котором реализуется двухмерное течение в смысле средних значений, хотя фактически оно является трехмерным, что показывает генерация трехмерной завихренности.

При повышении числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 4704,$ сетка 128^3, см. рис. 10) имеет место интенсивное и раннее смешение, которое также можно проследить по полю Z–t-диаграммы. Начало процесса смешения составляет: в слое 0,0–0,1 — $t \approx 10{,}68$, в слое 0,1–0,2 — $\approx 9{,}49$, в слое 0,2–0,3 — $t \approx 7{,}12$, в слое 0,3–0,4 — $t \approx 7{,}12$, в слое 0,4–0,5 — $t \approx 4{,}74$, в слое 0,5–0,6 — $t \approx 4{,}74$, в слое 0,6–0,7 — $t \approx 4{,}74$, в слое 0,7–0,8 — $t \approx 4{,}74$, в слое 0,8–0,9 — $t \approx 2{,}27$, в слое 0,9–1 — $t \approx 4{,}74$. Смешение в нижней полуплоскости происходит на интервале $t = 20$–40. Толщина верхнего горячего пристеночного слоя составляет 0,034L, нижнего — 0,023L, толщина пристеночных слоев в среднем по времени не растет.

Диаграмма $\langle W \rangle_S$ свидетельствует о существовании сильных вихрей во всем поперечном сечении канала, в особенности на участке $t = 16$–50. График $\langle V \rangle_S$ демонстрирует

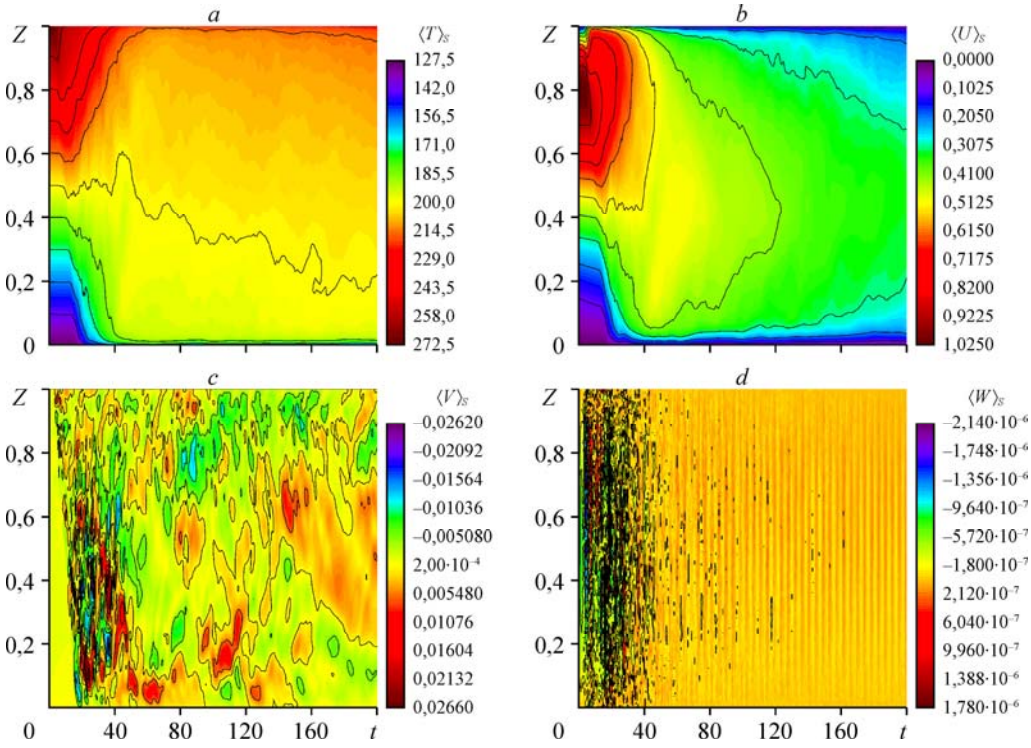

Рис. 10. *Z*–*t*-диаграммы профилей температуры $\langle T\rangle_S$ (*a*) и компонент скорости $\langle V\rangle_S$ (*b*), $\langle V\rangle_S$ (*c*), $\langle W\rangle_S$ (*d*) в случае турбулентного режима при числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 = 4704$ на сетке 128^3.

развитие течения в направлении, поперечном основному потоку. В различных слоях сечения осредненное течение направлено в противоположные стороны, что, в силу двумерности шума в начальных условиях, может свидетельствовать о существовании поперечных сдвиговых слоев. Интенсивность среднего течения также резко возрастает в интервале смешения и падает при $t \approx 60$, что может служить косвенным подтверждением разрушения слоистого течения и потери связи с исходными начальными условиями.

Форма профиля скорости основного течения $\langle U\rangle_S$ сохраняется до $t \approx 4$, а затем в слое 0,85–1,0 наблюдается его деформация, связанная с ускорением в пристеночной зоне и замедлением жидкости ближе к ядру потока. Далее происходит разрушение самого ядра потока и падение максимальной скорости. При этом участок профиля $y \in [0, 0,6]$ с точкой перегиба остается неизменным до $t \approx 10$, впоследствии он разрушается в интервале $t \approx 10$–20, что приводит к образованию переходного профиля скорости в виде наклонной прямой, которая в дальнейшем эволюционирует к П-образному турбулентному профилю скорости.

Выводы

Результаты численного моделирования напорного течения термовязкой жидкости в плоском слое, представляющем кубическую область, периодически продолженную в двух направлениях, а в третьем — ограниченную стенками с различной температурой, показывает существование принципиально отличающихся режимов течения. Первый из них реализуется при относительно небольших среднемассовых числах Рейнольдса Re_1 и связан с перестройкой неустойчивого ламинарного профиля под воздействием трехмерных возмущений в профиль без точки перегиба, отличающийся более высокими расходными характеристиками. Во втором случае происходит турбулизация течения с ускоренной диссипацией, приводящей к кратному уменьшению кинетической энергии и активной генерации завихренности.

В заключение следует сделать несколько замечаний относительно проведенного моделирования. В самом общем случае для успешного моделирования завихренных (турбулентных) течений необходимо подобрать численный метод, сочетающий экономичность расчета с хорошими дисперсионными и диссипативными свойствами, сгенерировать шум с требуемыми свойствами, провести расчет на максимально подробных сетках, обеспечивающих (по возможности) разрешение вплоть до самых мелких масштабов, а затем применить набор цифровых фильтров для теоретического анализа течения. Термин «цифровой фильтр» понимается в обобщенном смысле и включает в себя расчет интегральных характеристик, статистическое усреднение, выполнение спектрального разложения (преобразования Фурье). В свете этого следует явным образом указать на некоторые методологические отклонения от этой последовательности, допущенные в настоящей работе.

1. Наложение специфических условий с сохранением градиента давления приводит к существенному занижению числа Куранта, необходимого для осуществления расчета. Повышение CFL приводит к тому, что выражение под логарифмом в инвариантах Римана становится отрицательным. Указанный недостаток следует относить на счет текущей реализации.

2. Используемый численный метод является явным, поэтому трудоемкость расчета на мелких сетках растет как N^4, где N — число точек расчетной сетки по одному направлению, что существенно увеличивает продолжительность расчета даже при использовании суперкомпьютеров.

3. Использование шума различной интенсивности для одного и того же числа Рейнольдса на различных сетках несомненно вредит математической строгости, однако позволяет определиться с характером течения в более широком диапазоне параметров и должно влиять на течение только до перехода к турбулентности, так как трехмерная турбулентность должна иметь достаточно короткую историю, быстро «забывать» о свойствах возмущений. Кроме того, нет однозначного ответа на вопрос, являются ли интенсивность возмущения и его длина корреляции достаточными параметрами, однозначно определяющими эволюцию течения на всех участках (особенно на этапе перехода к турбулентности) или для смены режима течения достаточно локальной амплитуды возмущения. В случае генерации случайного шума на мелкой сетке и последующих выборок из него для более грубых сеток набор данных также будет отличаться: в одних из них будут существовать точки с амплитудой, превышающей некоторый критический уровень, необходимый для перестройки потока, а в других — нет. В настоящей работе характеристики шума определялись на основе характерной длины корреляции, а также интенсивности шума по направлениям X и Y, однако вопрос о других статистических свойствах фильтрованного распределения пульсаций скорости остался в стороне, в частности, о средних значениях интенсивности, полученных по ансамблю реализаций, а также об их дисперсии.

4. Множественность настроечных параметров для корреляционного фильтра затрудняет сравнительный анализ переходных режимов, в том числе на этапе крупномасштабного смешения.

5. Чрезвычайно долгий процесс установления течения, вероятно, обусловлен использованием приближения слабой сжимаемости.

Список литературы

1. **McDonough J.M.** Introductory lectures on turbulence // CreateSpace Independent Publishing Platform. 2014. 180 p.
2. **Монин А.С.** О природе турбулентности // Успехи физических наук. 1978. Т. 21, №. 5. С. 429–442.
3. **Головизнин В.М., Самарский А.А.** Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 86–100.
4. **Головизнин В.М., Самарский А.А.** Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 101–166.
5. **Karabasov S.A., Goloviznin V.M.** Compact accurately boundary adjusting high–resolution technique for fluid dynamics // J. of Computational Physics. 2009. Vol. 229, No. 19. P. 7426–7451.
6. **Головизнин В.М., Карабасов С.А., Козубская Т.К., Максимов Н.В.** Схема «КАБАРЕ» для численного решения задач аэроакустики: обобщение на линеаризированные уравнения Эйлера в одномерном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 12. С. 2265–2280.
7. **Ivanov M.F., Kiverin A.D, Pinevich S.G., Yakovenko I.S.** Application of dissipation–free numerical method CABARET for solving gasdynamics of combustion and detonation // J. of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 754, Iss. 10. P. 102003.
8. **Глотов В.Ю., Головизнин В.М.** Схема «КАБАРЕ» для двумерной несжимаемой жидкости в переменных «функция тока–завихренность» // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 9. С 89–104.
9. **Potter M.C., Graber E.J.** Stability of plane Poiselle flow with heat transfer // Physics of Fluids. 1972. Vol. 15, No. 3. P. 387–391.
10. **Wall D.P., Wilson S.K.** The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // J. of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 323. P. 107–132.
11. **Урманчеев С.Ф.** Течение термовязких сред // Вестник Нижегородского ун–та им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 3, № 4. С. 1197–1199.
12. **Taguelmimt N., Danaila L., Hadjadj A.** Effects of viscosity variations in temporal mixing layer // Flow, Turbulence and Combustion. 2016. Vol. 96, № 1. P. 163–181.
13. **Voivenel L., Varea E., Danaila L., Renou B., Cazalens M.** Variable viscosity jets: entrainment and mixing process // Whither Turbulence and Big Data in the 21st Century? / Ed. A. Pollard, L. Castillo, L. Danaila, M. Glauser. Springer International Publishing, 2017. P. 147–162.
14. **Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.** Об устойчивости ламинарного режима течения термовязких жидкостей // Вестник Тюменского гос. ун–та. Физико–математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, № 2. С. 104–111.
15. **Kulikov Yu.M., Son E.E.** Fluid flow with abrupt viscosity-temperature dependence // High Temperature. 2014. Vol. 52, No. 5. P. 723–729.
16. **Kulikov Y.M., Son E.E.** Stability of thermoviscous fluid flow under high temperature gradients // High Temperature. 2017. Vol. 55, No. 1. P. 131–138.
17. **Куликов Ю.М., Сон Э.Е.** Об устойчивости течения термовязкой жидкости в канале // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 6. С. 909–928.
18. **Kulikov Yu.M., Son E.E.** Kelvin–Helmholz instability in thermoviscous free shear flow // J. of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 946. P. 012075.
19. **Campbell I.H., Turner J.S.** The influence of viscosity on fountains in magma chambers // J. of Petrology. 1986. Vol. 27, No. 1. P. 1–30.
20. **Kulikov Yu.M., Son E.E.** Taylor-Green vortex simulation using CABARET scheme in a weakly compressible formulation // European Physical Journal. E. 2018. Vol. 41. P. 41.
21. **Kulikov Y.M., Son E.E.** The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // J. of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 774. P. 012094.
22. **Dimotakis P.E.** The mixing transition in turbulent flows // J. of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 409. P. 69–98.
23. **Klein M., Sadiki A., Janicka J.** A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // J. of Computational Physics. 2003. Vol. 186, No. 2. P. 652–665.
24. **Lund T., Wu X., Squires D.** Generation of turbulent inflow data for spatially–developing boundary layer simulations // J. of Computational Physics. 1998. Vol. 140, No. 2. P. 233–258.

25. **Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И.** Турбулентная циркуляция над поверхностным источником тепла в устойчиво стратифицированной окружающей среде // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 5. С. 703–719.
26. **Lesieur M.** Turbulence in fluids. Springer Netherlands, 2008. 563 p.
27. **DeWolf I.** Divergence-free noise. Martian Labs, 2018. 4 p.
28. **Schiavazzi D. Coletti F., Iaccarino G., Eaton J.K.** A matching pursuit approach to solenoidal filtering of three-dimensional velocity measurements // J. of Computational Physics. 2014. Vol. 263. P. 206–221.
29. **de Silva C.M., Philip J., Marusic I.** Minimization of divergence error in volumetric velocity measurements and implications for turbulence statistics // Experiments in Fluids. 2013. Vol. 54, No. 7. P. 1557-1–1557-8.
30. **Wang C., Gao Q., Wei R., Li T., Wang J.** Weighted divergence correction scheme and its fast implementation // Experiments in Fluids. 2017. Vol. 58. P. 44-1–44-14.
31. **Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.Н.** Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М: Издательство МГУ, 2013. 532 с.

Статья поступила в редакцию 13 июня 2018 г.,
после доработки — 27 августа 2018 г.