

**РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ ТОНКИХ
ПРОФИЛЕЙ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА МЕТОДОМ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

B. B. Курзин

(Новосибирск)

Влияние сжимаемости газа на аэродинамические силы, действующие на профили решетки в нестационарном потоке, исследовано недостаточно. В работах Мейстера [1, 2] рассмотрена задача о нестационарном обтекании сжимаемым потоком решетки, составленной из полубесконечных пластин. Частный случай решетки без выноса, составленной из профилей конечной хорды, был рассмотрен ранее в работе [3].

Ниже рассматривается задача об определении сил, действующих на профили решетки с произвольным выносом, колеблющейся по гармоническому закону в дозвуковом потоке газа.

§ 1. В рамках линейной постановки задачи известное интегральное уравнение Пессио для изолированного профиля может быть обобщено на случай решетки профилей, колеблющихся синхронно с одинаковыми амплитудами и одинаковым сдвигом фаз α между колебаниями соседних профилей.

С этой целью разрыв поля давления на профилях решетки представляется непрерывно распределенными вдоль их хорд дублетами потенциала ускорений

$$\psi(x, y, t) = B(x_0, y_0) \sin \theta H_1^{(2)}(kr) \exp \left\{ i\omega \left[t + \frac{U}{a^2 \beta^2} (x - x_0) \right] \right\} \quad (1.1)$$

$$\beta^2 = 1 - M^2, \quad M = \frac{U}{a}, \quad \theta = \arctg \frac{\beta(y - y_0)}{x - x_0}, \quad r = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + \beta^2(y - y_0)^2}}{\beta^2}$$

Здесь x, y — координаты вдоль и перпендикулярно хорде (за начало координат принимается середина одного из профилей); x_0, y_0 — координаты места расположения дублета; $B(x_0, y_0)$ — мощность дублета, приходящаяся в точке (x_0, y_0) на единицу длины; ψ — потенциал ускорений; U, a — соответственно скорость и скорость звука невозмущенного потока; ω — круговая частота колебаний; $k = \omega b/a$ — приведенная частота колебаний; b — полуходра профиля; $H_n^{(2)}(kr)$ — функция Ганкеля второго рода n -го порядка.

Эти дублеты будут частным решением соответствующего линеаризированного дифференциального уравнения газовой динамики

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{2M}{a} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

и удовлетворяют принципу излучения. (Другое частное решение уравнения (1.2), содержащее функцию Ганкеля первого рода, представляет собой сходящиеся волны и исключено из рассмотрения как не имеющее физического смысла.)

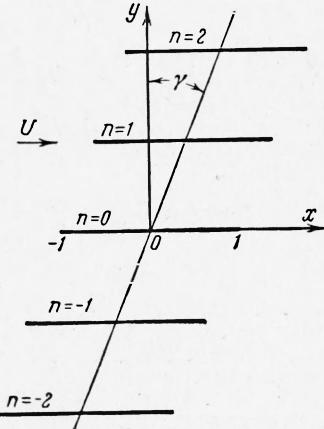
Тогда суммарный потенциал ускорений равен

$$\psi(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nh \operatorname{tg} \gamma - b}^{nh \operatorname{tg} \gamma + b} B(x_0, nh) \sin \theta H_1^{(2)}(kr) \exp \left[i\omega \frac{M}{a \beta^2} (x - x_0) \right] dx_0 \quad (1.3)$$

Здесь (фиг. 1) γ — угол выноса решетки, h — расстояние между соседними профилиями решетки, n — номер профиля решетки (за нулевой принимается профиль, расположенный в начале координат).

Можно показать, что между мощностью непрерывно распределенного слоя дублета $B(x_0, y_0)$ и амплитудой подъемной силы $L(x_0, y_0)$ в соответствующих точках профиля решетки существует связь, аналогичная той, которая имеет место для изолированного профиля

$$L(x_0, nh) = \frac{4i\rho^2 \omega}{\omega} B(x_0, nh) \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Потенциал ускорений $\Psi(x, y, t) = \Psi(x, y)e^{i\omega t}$ связан с вертикальной составляющей скорости газа $v_y(x, y, t) = V_y(x, y)e^{i\omega t}$ следующим образом

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = i\omega V_y + U \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad (1.5)$$

Решая уравнение (1.5) относительно V_y и используя условие, что $V_y = 0$ в бесконечном удалении перед решеткой, получим

$$V_y = \frac{1}{U} \exp\left(-\frac{i\omega x}{U}\right) \int_{-\infty}^x \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial y} \exp \frac{i\omega \xi}{U} d\xi \quad (1.6)$$

При $y = nh$ и $nh \operatorname{tg} \gamma - b < x < nh \operatorname{tg} \gamma + b$ значение V_y в соответствии с условием непротекания через твердые стенки профилей равно вертикальной составляющей скорости движения n -го профиля. Потребуем выполнение условия непротекания на любом профиле в соотношении (1.6) и подставим вместо $\Psi(\xi, y)$ его выражение (1.3). Тогда, учитывая соотношения

$$V_y(x, nh) = e^{inx} V_y(x, 0), \quad L(x, nh) = e^{inx} L(x, 0),$$

которые имеют место в рассматриваемой постановке задачи в силу того, что все профили решетки находятся в одинаковых условиях; после несложных преобразований получим искомое интегральное уравнение в виде ¹

$$V_y(x, 0) = \frac{\omega b}{\rho U^2} \int_{-1}^1 L(x_0, 0) K(x - x_0) dx_0 \quad (1.7)$$

Здесь ядро уравнения

$$K(x - x_0) = \frac{iM}{4\beta k} \exp \frac{-ik(x - x_0)}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[in \left(\alpha - \frac{kh \operatorname{tg} \gamma}{M} \right) \right] \\ \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \exp \frac{ik\xi}{M\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[H_0^{(2)} \left(\frac{k \sqrt{\xi^2 + \beta^2(y - nh)^2}}{\beta^2} \right) \right] d\xi \quad (1.8) \\ (\chi = x - x_0 + nh \operatorname{th} \gamma)$$

В уравнении (1.7) и в дальнейшем под x, y, h подразумеваются их безразмерные величины, отнесенные к полуходре профиля b .

Член ряда ядра, соответствующий $n = 0$, в точности совпадает с ядром интегрального уравнения Пессио [4]. Для этого члена точка $x = x_0$ является особой. Остальные члены ядра особенностей не добавляют и асимптотически стремятся к нулю при $h \rightarrow \infty$. Интегральное уравнение (1.7), таким образом, в случае изолированного профиля переходит в уравнение Пессио.

В другом частном случае, когда $\gamma = 0$ и $\alpha = \pi$, интегральное уравнение (1.7) совпадает с соответствующим уравнением для случая колебаний профиля между двумя параллельными стенками [5].

Наконец, уравнение (1.7) имеет предельный переход при $a \rightarrow \infty$ к соответствующему интегральному уравнению для несжимаемой жидкости [6]. Покажем это для частного случая решетки без выноса. Учитывая, что при $k = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(kr) = - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H_0^{(2)}(kr), \quad H_0^{(2)}(kr) = - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{ckr}{2} \quad (c = 1.781)$$

¹ В замечании на статью [3], содержащемся в реферате № 9 Б142 РЖ Механика за 1962 г., утверждается, что интегральное уравнение, представляющее собой частный случай уравнения (1.7), справедливо только для длин волн $\lambda \gg b$, когда профили проникаемы для возмущений, и в общем случае (со сдвигом фаз α , не равным π) не учитывается акустическое взаимодействие профилей. Однако выполнение условия непротекания через твердые стенки всех профилей решетки свидетельствует о том, что (в предположении о единственности решения) это взаимодействие учитывается.

и полагая в выражении для ядра (1.8) $\gamma = 0$, $a = \infty$, получим

$$\begin{aligned} K(x - x_0) &= \frac{-i}{4k'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ina - ik'(x-x_0)} \int_{-\infty}^{x-x_0} e^{ik'\xi} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H_0^{(2)}(kr) \right]_{y=0} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi k'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ina} \left\{ \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (nh)^2} + ik' e^{-ik'(x-x_0)} \int_{-\infty}^{x-x_0} e^{ik'\xi} \frac{\xi}{\xi^2 + (nh)^2} d\xi \right\} \quad (1.9) \end{aligned}$$

$(k' = k / M = \omega b / U)$

Рассматривая бесконечные суммы, входящие в выражение (1.9), как разложение на простые дроби, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(x - x_0) e^{ina}}{(x - x_0)^2 + (nh)^2} &= v \frac{\operatorname{ch}[(|m|/m - m)v(x - x_0)]}{\operatorname{sh}[v(x - x_0)]} = K^o[m, (x - x_0)] \\ \left(v = \frac{\pi}{h}, m = \frac{\alpha}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если теперь в интегральное уравнение (1.7) подставить выражение для ядра (1.9), учитывая соотношение (1.10), и заменить функцию подъемной силы $L(x_0)$ через циркуляцию, как в работе Систо

$$\frac{L(x_0)}{\rho U} = \gamma_a(x_0) + ik' \int_{-1}^{x_0} \gamma_a(\xi) d\xi$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} V_y(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\gamma_a(x_0) + ik' \int_{-1}^{x_0} \gamma_a(\xi) d\xi \right] K^o[m, (x - x_0)] dx_0 + \\ &+ \frac{ik'}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\gamma_a(x_0) + ik' \int_{-1}^{x_0} \gamma_a(\xi) d\xi \right] e^{-ik'(x-x_0)} \int_{-\infty}^{x-x_0} e^{ik'\eta} K^o[m, (x - \eta)] d\eta \quad (1.11) \end{aligned}$$

Вычисляя тройной интеграл, входящий в выражение (1.11), по частям относительно переменной x_0 , получим

$$\begin{aligned} V_y(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \gamma_a(x_0) K^o[m, (x - x_0)] dx_0 - \\ &- \frac{ik'}{2\pi} \int_{-1}^1 \gamma_a(x_0) dx_0 \int_1^\infty e^{-ik'(\xi-1)} K^o[m, (x - \xi)] d\xi \end{aligned}$$

Последнее равенство в точности совпадает с формулой (1) работы [6].

Таким образом, полученное интегральное уравнение будет сингулярным и того же типа, который ранее встречался в теории крыла. Чрезвычайно сложное выражение для ядра не позволяет решить это уравнение в замкнутом виде и затрудняет его решение приближенными численными методами. В следующем параграфе рассмотрено преобразование ядра, значительно упрощающее численное решение интегрального уравнения.

§ 2. Преобразование ядра основано на использовании соотношения

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi km) H_0^{(2)}(2\pi z \sqrt{m^2 + \xi^2}) &= -\pi H_0^{(2)}(2\pi |\xi| z) + \\ &+ i \frac{\exp(-2\pi |\xi| \sqrt{k^2 - z^2})}{\sqrt{k^2 - z^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\exp(-2\pi |\xi| \sqrt{(n+k)^2 - z^2})}{\sqrt{(n+k)^2 - z^2}} + \right. \\ &\left. + \frac{\exp(-2\pi |\xi| \sqrt{(n-k)^2 - z^2})}{\sqrt{(n-k)^2 - z^2}} \right] \quad (2.1) \end{aligned}$$

выведенного в работе [7].

Предварительно введем некоторые зависимости, вытекающие из общих свойств функций Ганкеля, которые будут использованы в дальнейших выкладках

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kr)] = - \frac{k^2}{\beta^2} H_0^{(2)}(kr) - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_0^{(2)}(kr)] \quad (2.2)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kr)] \right\}_{y=0} = - \frac{k}{\beta^2} \frac{H_1^{(2)}(kr)}{r} \Big|_{y=0} \quad (2.3)$$

Представим выражение для ядра (1.8) в виде суммы двух составляющих

$$K = K_0 + K_\gamma$$

где

$$K_0 = \frac{iM}{4\beta k} \exp \frac{-ik(x-x_0)}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n \alpha_1} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{ih\xi}{M\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kr)] d\xi$$

$$K_\gamma = \frac{iM}{4\beta k} \exp \frac{-ik(x-x_0)}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n \alpha_1} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-x_0}^{x-x_0+nh \operatorname{tg} \gamma} \exp \frac{ih\xi}{M\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kr)] d\xi$$

$$\left(\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\alpha - \frac{kh \operatorname{tg} \gamma}{M} \right] \right)$$

В соответствии с соотношениями (2.1) — (2.3) составляющие ядра преобразуются к виду

$$K_0 = - \frac{iM}{4\beta k} \exp \frac{-ik(x-x_0)}{M} \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{ik\xi}{M\beta^2} \left(\frac{k^2}{\beta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left[H_0^{(2)} \left(\frac{k|\xi|}{\beta^2} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n \alpha_1) H_0^{(2)} \left(\frac{k \sqrt{\xi^2 + (\beta nh)^2}}{\beta^2} \right) \right] d\xi =$$

$$= \frac{M}{4\pi\beta k} \exp \frac{-ik(x-x_0)}{M} \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{k\xi}{M\beta^2} \left(\frac{k^2}{\beta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left\{ \frac{\exp(-a|\xi| \sqrt{\alpha_1^2 - z^2})}{\sqrt{\alpha_1^2 - z^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\exp(-a|\xi| \sqrt{(n+\alpha_1)^2 - z^2})}{\sqrt{(n+\alpha_1)^2 - z^2}} + \frac{\exp(-a|\xi| \sqrt{(n-\alpha_1)^2 - z^2})}{\sqrt{(n-\alpha_1)^2 - z^2}} \right] \right\} d\xi \quad (2.4)$$

$$K_\gamma = - \frac{iM}{4\beta} \exp \frac{-ik(x-x_0)}{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha_1} \times$$

$$\times \int_0^{nh \operatorname{tg} \gamma} \exp \frac{ik(\xi+x-x_0)}{M\beta^2} \frac{H_1^{(2)}[(k/\beta^2) \sqrt{(\xi+x-x_0)^2 + (\beta nh)^2}]}{\sqrt{(\xi+x-x_0)^2 + (\beta nh)^2}} d\xi$$

$$\left(a = \frac{2\pi}{\beta h}, z = \frac{kh}{2\pi\beta} \right) \quad (2.5)$$

Отметим, что выражение для K_γ представляет собой быстро сходящийся ряд обыкновенных интегралов. Нетрудно убедиться также, что при $x = x_0$ ряд, составляющий K_0 , расходится в соответствии с особенностью, которую содержит ядро полученного сингулярного интегрального уравнения. Эта особенность может быть выделена и функция K_0 может быть аппроксимирована с наперед заданной точностью конечным рядом.

Для этого в формуле (2.4) под знаком интеграла прибавим и вычтем выражение

$$J = \int_{N_1}^{\infty} t \exp(-a|\xi|t) dt + \int_{N_2}^{\infty} t \exp(-a|\xi|t) dt \quad \left(\begin{array}{l} N_1 = N_0 + \alpha_1 + \frac{1}{2} \\ N_2 = N_0 - \alpha_1 + \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

которое представляет собой определенную аппроксимацию остатка ряда после N_0 -го

плена. Тогда формула (2.4) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 K_0 = & \frac{\pi M}{h^2 k \beta} \exp \left(-\frac{ik(x-x_0)}{M} \right) \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{ik\xi}{M\beta^2} \left\{ \frac{\alpha_1^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{a_1^2-z^2})}{V\sqrt{a_1^2-z^2}} + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{N_0} \left[\frac{(n+\alpha_1)^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{(n+\alpha_1)^2-z^2})}{V\sqrt{(n+\alpha_1)^2-z^2}} + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(n-\alpha_1)^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{(n-\alpha_1)^2-z^2})}{V\sqrt{(n-\alpha_1)^2-z^2}} \right] + \right. \\
 & + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \left[\frac{(n+\alpha_1)^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{(n+\alpha_1)^2-z^2})}{V\sqrt{(n+\alpha_1)^2-z^2}} - \int_{n_2}^{n_1} t \exp(-a|\xi|t) dt \right] + \\
 & + \int_{N_1}^{\infty} t \exp(-a|\xi|t) dt + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \left[\frac{(n-\alpha_1)^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{(n-\alpha_1)^2-z^2})}{V\sqrt{(n-\alpha_1)^2-z^2}} - \right. \\
 & \quad \left. \left. - \int_{m_2}^{m_1} t \exp(-a|\xi|t) dt \right] + \int_{N_2}^{\infty} t \exp(-a|\xi|t) dt \right\} d\xi \\
 (m_{1,2} = n - \alpha_1 \pm 1/2, \quad n_{1,2} = n + \alpha_1 \pm 1/2)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Прежде всего оценим точность аппроксимации остатка ряда в выражении для K_0 . Можно показать, что при достаточно большом значении t_0 имеет место неравенство

$$J = \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{ik\xi}{M\beta^2} \left[\frac{t_0^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{t_0^2-z^2})}{V\sqrt{t_0^2-z^2}} - \int_{t_0-1/2}^{t_0+1/2} t \exp(-a|\xi|t) dt \right] d\xi < \frac{1}{t_0^2}$$

Следовательно, путем выбора значения N_0 остаток ряда в выражении (2.6) может быть сделан меньше любого наперед заданного числа и этим остатком в дальнейшем пренебрегаем. Рассмотрим следующие интегралы, входящие в выражение (2.6):

$$\begin{aligned}
 1. \quad J &= \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{ik\xi}{M\beta^2} \frac{t_0^2 \exp(-a|\xi|V\sqrt{t_0^2-z^2})}{V\sqrt{t_0^2-z^2}} d\xi \\
 J &= T(1-ic) \exp \left[\left(i \frac{k}{M\beta^2} + b \right) (x-x_0) \right] \quad \text{для } x-x_0 \leq 0 \\
 J &= 2T - T(1+ic) \exp \left[\left(i \frac{k}{M\beta^2} - b \right) (x-x_0) \right] \quad \text{для } x-x_0 \geq 0 \\
 T &= \frac{at_0^2}{a^2 t_0^2 + k^2 / M^2 \beta^2}, \quad b = V\sqrt{t_0^2-z^2}, \quad c = \frac{k}{M\beta^2 b} \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad J = \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \left(i \frac{k\xi}{M\beta^2} \right) d\xi \int_{t_0}^{\infty} t \exp(-a|\xi|t) dt$$

В смысле главного значения Коши

$$\begin{aligned}
 J &= -\frac{1}{a^2(x-x_0)} \exp \left[\left(at_0 + i \frac{k}{M\beta^2} \right) (x-x_0) \right] + \\
 &\quad + \frac{ik}{Ma^2\beta^2} \int_{-\infty}^{x-x_0} \exp \frac{ik\xi}{M\beta^2} \frac{e^{ati_0\xi}}{\xi} d\xi \quad \text{для } x-x_0 \leq 0 \\
 J &= -\frac{2t_0}{a} - \frac{1}{a^2(x-x_0)} \exp \left[\left(i \frac{k}{M\beta^2} - at_0 \right) (x-x_0) \right] + \\
 &\quad + \frac{ik}{Ma^2\beta^2} \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{1}{\xi} \exp \left[\left(i \frac{k}{M\beta^2} - at_0 \right) \xi \right] d\xi \quad \text{для } x-x_0 \geq 0
 \end{aligned}$$

Учитывая проведенные выкладки, окончательное приближенное выражение для K_0 представим в виде:

для $x - x_0 \leq 0$

$$K_1 = \frac{\pi M}{h^2 k \beta} \exp \frac{ikM(x - x_0)}{\beta^2} \left\{ T_0 (1 - ic_0) e^{b_0(x - x_0)} + \sum_{n=1}^{N_0} [T_{-n} (1 - ic_{-n}) e^{b_{-n}(x - x_0)} + \right. \\ \left. + T_n (1 - ic_n) e^{b_n(x - x_0)}] - \frac{1}{a^2 (x - x_0)} [e^{aN_1(x - x_0)} + e^{aN_2(x - x_0)}] + \right. \\ \left. + \frac{ik}{Ma^2 \beta^2} \exp \frac{-ik(x - x_0)}{M \beta^2} \int_{-\infty}^{x - x_0} \exp \frac{ik\xi}{M \beta^2} \frac{1}{\xi} [e^{aN_1 \xi} + e^{aN_2 \xi}] d\xi \right\} \quad (2.8)$$

для $x - x_0 \geq 0$

$$K_2 = \frac{\pi M}{h^2 k \beta} \exp \frac{-ik(x - x_0)}{M} \left\{ 2 \left[T_0 + \sum_{n=1}^{N_0} (T_{-n} + T_n) - \frac{2N_0 + 1}{a} \right] - \right. \\ \left. - T_0 (1 + ic_0) \exp \left[\left(i \frac{k}{M \beta^2} - b_0 \right) (x - x_0) \right] - \right. \\ \left. - \exp \frac{ik(x - x_0)}{M \beta^2} \sum_{n=1}^{N_0} [T_{-n} (1 + ic_{-n}) e^{-b_{-n}(x - x_0)} + T_n (1 + ic_n) e^{-b_n(x - x_0)}] - \right. \\ \left. - \frac{1}{a^2 (x - x_0)} \exp \left[i \frac{k}{M \beta^2} (x - x_0) \right] [e^{-aN_1(x - x_0)} + e^{-aN_2(x - x_0)}] + \right. \\ \left. + \frac{ik}{Ma^2 \beta^2} \int_{-\infty}^{x - x_0} \exp \frac{ik\xi}{M \beta^2} \frac{1}{\xi} [e^{-aN_1 \xi} + e^{-aN_2 \xi}] d\xi \right\} \quad (2.9)$$

Индексы $\pm n$ означают, что в выражениях (2.7) для T , b и c , введенных выше, вместо t_0 берется соответственно $(n + \alpha_i)$.

Например

$$T_{-n} = \frac{a(n - \alpha_1)^2}{a^2(n - \alpha_1)^2 + k^2/M^2 \beta^2}$$

Таким образом, в результате преобразований вместо бесконечной суммы несобственных интегралов от функций Ганкеля со сложным аргументом ядро (1.8) состоит из быстро сходящегося ряда обыкновенных интегралов от функций Ганкеля (исчезающего при нулевом выносе) и конечной суммы показательных функций с выделенной особенностью.

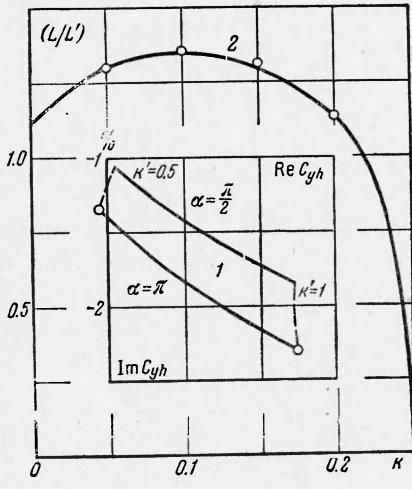
§ 3. Будем решать полученное интегральное уравнение (1.7) методом колокаций. Сделав замену переменных $x = \cos \theta$, ищем решение в виде

$$L(\theta) = a_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_{l=1}^N a_l \sin l\theta \quad (3.1)$$

который определяется общими свойствами интегральных уравнений такого типа.

В точке $\theta = 0$, соответствующей задней кромке профиля, значение функции $L(0)$ обращается в нуль и, таким образом, удовлетворяет гипотезе Кутта — Жуковского. В точке $\theta = \pi$ оно имеет особенность.

Метод колокаций заключается в том, что $N + 1$ неизвестных коэффициентов a_l определяются из системы $N + 1$ алгебраических уравнений, полученных из условия,

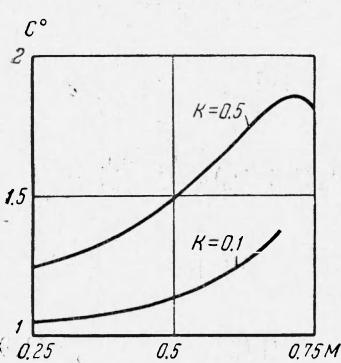


Фиг. 2

что интегральное уравнение удовлетворяется в таком же числе точек, расположенных вдоль хорды профиля

$$\begin{aligned} v(\theta_m) &= \frac{\omega b}{\rho U^2} \left[\int_0^{\theta_m} L(\theta) K_1 d\theta + \int_{\theta_m}^{\pi} L(\theta) K_2 d\theta + \int_0^{\pi} L(\theta) K_y d\theta \right] = \\ &= \frac{\omega b}{\rho U^2} \left\{ a_0 \left[\int_0^{\theta_m} (1 - \cos \theta) K_1 d\theta + \int_{\theta_m}^{\pi} (1 - \cos \theta) K_2 d\theta + \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta) K_y d\theta \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^N a_l \left[\int_0^{\theta_m} \sin l\theta \sin \theta K_1 d\theta + \int_{\theta_m}^{\pi} \sin l\theta \sin \theta K_2 d\theta + \int_0^{\pi} \sin l\theta \sin \theta K_y d\theta \right] \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Эта система уравнений может быть представлена в следующем виде:



Фиг. 3

$$H\mathbf{a} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$$

$$\mathbf{v} = \{v(\theta_0), v(\theta_1), \dots, v(\theta_N)\}, \quad H = \|h_{ml}\|_0^N$$

Здесь компоненты вектора \mathbf{a} — искомые коэффициенты a_l , компоненты вектора \mathbf{v} — значения амплитуды нормальной составляющей скорости в рассматриваемых точках профиля θ_m , компоненты H -квадратной матрицы — коэффициенты при величинах a_l в системе алгебраических уравнений (3.2).

Подставив коэффициенты a_l , определенные из системы (3.2), в равенство (3.1), получим выражение для амплитуды распределенной аэродинамической силы, действующей на колеблющиеся профили решетки. Интегрируя (3.1) по θ вдоль профиля, получим, что подъемная сила

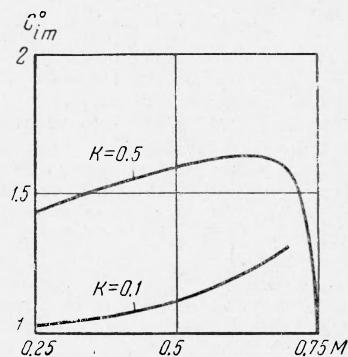
$$P_y = b \int_0^{\pi} L(\theta) \sin \theta d\theta = b\pi \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \right) \quad (3.3)$$

Выражение для результирующего момента аэродинамических сил относительно середины профиля

$$M_z = b^2 \int_0^{\pi} L(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{b^2 \pi}{2} \left(-a_0 + \frac{a_2}{2} \right)$$

Точность расчета изложенным методом определяется, во-первых, точностью вычисления компонент h_{ml} матрицы H , во-вторых, числом и расположением точек на профиле, в которых удовлетворяется интегральное уравнение. Можно показать, что погрешность вычисления коэффициентов h_{ml} , получающаяся за счет аппроксимации ядра, имеет порядок N_0^{-2} (где N_0 — число членов составляющей ядра K_0). Выбор числа и места расположения точек на профиле, в которых должно быть удовлетворено интегральное уравнение, строго говоря, требует специального анализа. Опыт Вульстона и Раньана [5] по расчетам для частного случая решетки без выноса со сдвигом фаз, равным π , показал, что уже при трех точках, равномерно расположенных по профилю, получаются вполне удовлетворительные результаты.

На фиг. 2 для оценки точности метода приведены результаты расчета этим методом коэффициентов подъемной силы для изгибных колебаний и для сравнения — известные результаты Систо для несжимаемой жидкости [6], а также результаты Вульстона и Раньана (кривая 2) [5]. Расчет проводился для значений $N_0 = 10$. Интегральное уравнение удовлетворялось в пяти точках, равномерно расположенных по профилю; результаты расчета практически совпали с соответствующими результатами работ [5, 6].



Фиг. 4

§ 4. Для иллюстрации влияния сжимаемости на силы, действующие на колеблющиеся профили решетки, приведем некоторые результаты вычислений на ЭВМ. Приведенные результаты соответствуют решетке с углом выноса $\gamma = 0$ и относительным шагом $1/2h = 1$.

На фиг. 3 изображена зависимость отношения C^o модуля коэффициента подъемной силы при изгибных колебаниях $C_{yh} = P_y/\rho U^2 b$ в сжимаемом потоке к соответствующему модулю коэффициента $C_{yh}^{(0)}$ для несжимаемой жидкости от числа Маха при сдвиге фаз $\alpha = \pi$ и при значениях относительной частоты $k = \omega b/a$, равных 0.1 и 0.5. Отметим, что число Струхала $k' = \omega b/U = k/M$, поэтому для фиксированных значений k при $M=0$ $k'=\infty$.

На фиг. 4 изображена аналогичная зависимость от числа Маха для отношения мнимых составляющих коэффициентов подъемной силы для изгибных колебаний, характеризующих аэродинамическое демпфирование соответствующих колебаний:

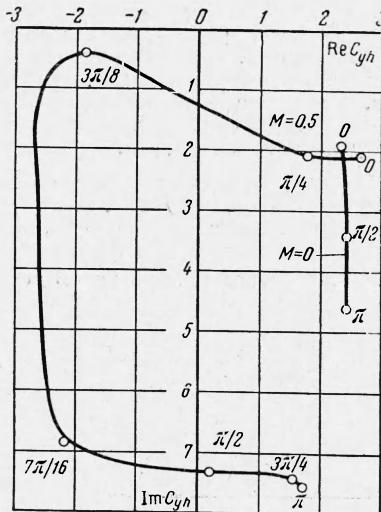
$$C_{im}^o = \text{Im} C_{yh} / \text{Im} C_{yh}^{(0)}$$

Из графиков видно, что для малых частот колебаний и малых чисел Маха влияние сжимаемости несущественно. Наоборот, при увеличении частоты колебаний и при увеличении числа Маха набегающего потока это влияние возрастает и становится значительным. При определенном сочетании параметров решетки и набегающего потока возможно резкое уменьшение аэродинамического демпфирования колебаний.

На фиг. 5 в плоскости комплексной амплитуды изображена зависимость коэффициента подъемной силы от сдвига фаз между колебаниями соседних профилей при числе Струхала $k' = 1$ и $M = 0, 0.5$. Результаты расчета позволяют сделать вывод, что в сжимаемом потоке акустическое взаимодействие колеблющихся профилей решетки играет существенную роль.

При расчетах были обнаружены явления типа акустических резонансов, которые заслуживают, однако, специального исследования.

Автор пользуется возможностью выразить признательность Г. Ю. Степанову за внимание и ценные указания.



Фиг. 5

Поступила 27 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Meister E. Beitrag zur Aerodynamik eines Schwingenden Gitters, II. (Unterschallströmung). ZAMM, 1962, Bd. 42, No. 1/2.
2. Meister E. Beitrag zur Aerodynamik eines Schwingenden Gitters, III (Unterschallströmung). ZAMM, 1962, Bd. 42, No. 6.
3. Курзин В. Б. Колебание решетки тонких профилей в сжимаемом дозвуковом потоке. ПМТФ, 1962, № 1.
4. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд. АН СССР, 1947.
5. Wollaston D. S. and Runyan H. L. Some Considerations on the Air Forces on a Wing Oscillating Between Two Walls for Subsonic Compressible Flow. JAS, 1955, vol. 22, No. 1.
6. Sistio F. Unsteady aerodynamic reactions on airfoils in cascade. JAS, 1955, No 5.
- 7.infeld L., Smith V. G. and Green W. Z. On some Series of Bessel Functions. J. Math. Phys., April, 1947, vol. XXVI, No. 1.