

УДК 539.3: 538.3: 536.21: 518.12

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Б. Д. Дробенко

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины, 79053 Львов
E-mail: budz@iappm.lviv.ua

Предложена методика математического и численного моделирования термомеханического поведения электропроводных тел, находящихся под воздействием внешнего электромагнитного поля. Исходной системой уравнений для определения электромагнитного поля являются уравнения Максвелла, записанные для области тела и внешней среды. Для описания напряженно-деформированного состояния тела используются соотношения неизотермического упругопластического течения. Влияние электромагнитного поля на процессы теплопереноса и деформирования учитываются соответственно через тепловыделение и пондеромоторные силы. Зависимости между индукциями электрического и магнитного полей и соответствующими напряженностями принимаются нелинейными. Все физико-механические параметры материала тела зависят от температуры.

Ключевые слова: термомеханика электропроводных тел, связанные поля, высокотемпературный индукционный нагрев.

Введение. Электромагнитные поля (ЭМП) широко используются в современных технологиях обработки твердых тел, в частности при их индукционном нагреве с целью повышения прочности и надежности. В известных расчетных моделях такого нагрева исследуют преимущественно связанные электромагнитные и тепловые процессы [1–5], в некоторых случаях — совместно с механическими [6, 7] при ряде упрощений относительно взаимосвязи процессов (неферромагнитные материалы, независимые от температуры характеристики, упругое деформирование). Использование таких моделей в случаях, когда тела нагреваются до высоких температур, может приводить к существенным ошибкам не только количественного, но и качественного характера. Так, например, стали уже при температурах порядка 550–600 °С деформируются преимущественно пластически вследствие зависимости предела упругости от температуры [8]. Электропроводность стали в диапазоне нагрева от 20 до 1000 °С может изменяться в 6–8 раз. Ферромагнитные материалы при температуре Кюри вообще теряют ферромагнитные свойства, и их нагрев существенно замедляется. Поэтому возникает практическая потребность в создании математических моделей, которые в условиях воздействия внешнего ЭМП более реалистично описывают процессы взаимодействия рассматриваемых полей различной природы в широком диапазоне температур с учетом нелинейности электромагнитных, тепловых и механических свойств материалов.

В данной работе предлагается методика математического и численного моделирования, обусловленного воздействием внешнего ЭМП термомеханического поведения электропроводных термочувствительных тел с учетом упругопластического характера деформирования и нелинейной зависимости между индукциями и напряженностями электрического и магнитного полей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим электропроводное осесимметричное тело V , в котором отсутствуют сторонние электрические заряды и токи. Тело подвергается воздействию ЭМП, возбуждаемого системой расположенных вне тела токов $\mathbf{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, j_\varphi^{(0)}(r, z, t), 0)$ (r, φ, z — цилиндрические координаты). Ставится задача определения обусловленных этим воздействием электромагнитного и температурного полей, а также механических напряжений в теле. Электромеханические, термоэлектрические и магнито-стрикционные эффекты считаем несущественными, а индукции и напряженности электрического и магнитного полей — параллельными.

Электромагнитное и температурное поля при уравнениях состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} &= \mathbf{B}_*(\mathbf{H}^{(1)}, T), & \mathbf{D}^{(1)} &= \mathbf{D}_*(\mathbf{E}^{(1)}, T), \\ \mathbf{j}^{(1)} &= \gamma \mathbf{E}^{(1)}, & \mathbf{B}^{(0)} &= \mu_0 \mathbf{H}^{(1)}, & \mathbf{D}^{(0)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

описываются системой уравнений [6]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(m)} = \frac{\partial \mathbf{D}^{(m)}}{\partial t} + \mathbf{j}^{(m)}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(m)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(m)}}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \mathbf{j}^{(1)} \mathbf{E}^{(1)}. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{H} = (H_r(r, z, t), 0, H_z(r, z, t))$, $\mathbf{E} = (0, E_\varphi(r, z, t), 0)$ — векторы напряженности магнитного и электрического полей; $\mathbf{B} = (B_r(r, z, t), 0, B_z(r, z, t))$, $\mathbf{D} = (0, D_\varphi(r, z, t), 0)$ — магнитная и электрическая индукции; величины с индексом $m = 0$ относятся к внешней среде (которая по электромагнитным свойствам принимается в приближении вакуума), а с индексом $m = 1$ — к области тела; $\mathbf{B}_*(\mathbf{H}^{(1)}, T)$, $\mathbf{D}_*(\mathbf{E}^{(1)}, T)$ — функции, которые задают связь между векторами индукции и напряженности соответственно магнитного и электрического полей в теле; \mathbf{j} — плотность токов; $\gamma = \gamma(T)$ — электропроводность тела; ε_0 , μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума; ∇ — оператор Гамильтона; $c = c(T)$ — объемная удельная теплоемкость; $\lambda = \lambda(T)$ — теплопроводность.

Уравнения Максвелла (1.2) можно свести к системе эквивалентных соотношений относительно одной функции — \mathbf{E} или \mathbf{H} . Запишем эти уравнения относительно \mathbf{E} . С учетом (1.1) уравнения (1.2) для тела принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(1)} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}_*}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \mathbf{E}^{(1)}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(1)} = -[\mu_*] \frac{\partial \mathbf{H}^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{B}_*}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Здесь

$$[\mu_*] = \begin{bmatrix} \mu_r & 0 \\ 0 & \mu_z \end{bmatrix}; \quad \mu_r = \frac{\partial B_{*r}}{\partial H_r^{(1)}}, \quad \mu_z = \frac{\partial B_{*z}}{\partial H_z^{(1)}}, \quad \varepsilon = \frac{\partial D_{*\varphi}}{\partial E_\varphi^{(1)}}.$$

Умножим второе уравнение (1.4) на $[\mu_*]^{-1}$ и подействуем на обе его части операцией rot , после чего подставим в полученное соотношение первое уравнение (1.4). Тогда для единственной ненулевой составляющей вектора напряженности $\mathbf{E}^{(1)}$ электрического поля в теле получим уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi^{(1)}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} E_\varphi^{(1)} + F_q \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E_\varphi^{(1)}}{\partial t^2} = F_p, \quad (1.5)$$

где введены обозначения:

$$F_q = \gamma + \frac{2 \partial^2 D_{*\varphi}}{\partial E_\varphi^{(1)} \partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 D_{*\varphi}}{\partial E_\varphi^{(1)2}} \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial t};$$

$$F_p = -\frac{\partial^2 D_{*\varphi}}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial D_{*\varphi}}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{\partial B_{*z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial B_{*r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}\right).$$

В дальнейшем ограничимся случаем изотропного тела: $\mu_r = \mu_z = \mu$.

Отметим, что при рассмотрении квазиустановившихся внешних электромагнитных воздействий влиянием токов смещения в области электропроводного тела в сравнении с токами проводимости можно пренебречь [6]. При этом уравнение (1.5) становится параболическим (исчезает член со второй производной по времени); $F_p = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}\right)$; $F_q = \gamma$.

Соответствующее уравнение для внешней среды имеет вид

$$-\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi^{(0)})\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z}\right)\right) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_\varphi^{(0)}}{\partial t^2} = -\frac{\partial j_\varphi^{(0)}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

При известной напряженности \mathbf{E} электрического поля в системе тело — среда индукцию магнитного поля определяем из соотношений

$$B_r^{(m)} = \int_0^t \frac{\partial E_\varphi^{(m)}}{\partial z} dt', \quad B_z^{(m)} = -\int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(m)})}{\partial r} dt'. \quad (1.7)$$

При установлении условий на характеристики ЭМП на границе раздела S тела и внешней среды, как правило, исходят из уравнений Максвелла в интегральной форме, которые при отсутствии поверхностных токов дают два независимых условия о равенстве касательных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей [7]. Эти условия в функциях \mathbf{E} в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(0)}; \quad (1.8)$$

$$\left(\mu^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(1)})}{\partial r} - \mu_0^{-1} \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(0)})}{\partial r}\right) n_r + \left(\mu^{-1} \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial z} - \mu_0^{-1} \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z}\right) n_z = 0, \quad (1.9)$$

где $\mathbf{n} = (n_r, n_z)$ — вектор внешней нормали к поверхности S .

Будем считать, что тело находится в условиях конвективного теплообмена через поверхность S с внешней средой, температура которой T_S :

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T + \beta(T - T_S) = 0. \quad (1.10)$$

Здесь $\beta = \beta(T)$ — коэффициент теплоотдачи.

Условиями на бесконечности и на оси Oz примем соответственно

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} n_r + \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} n_z = 0; \quad (1.11)$$

$$E_\varphi = 0. \quad (1.12)$$

В начальный момент времени ЭМП в теле и во внешней среде отсутствует и задано начальное распределение $T_0(r, z)$ температуры в теле.

Задача определения ЭМП в системе тело — среда и распределения температуры в теле сводится к решению системы уравнений (1.3), (1.5) для области тела и (1.6) для внешней среды при нулевых начальных условиях на напряженность электрического поля, заданном начальном распределении температуры $T_0(r, z)$, условиях (1.8)–(1.10) на границе раздела тела и внешней среды, условиях (1.11) на бесконечности и (1.12) на оси Oz . При этом

компоненты магнитной индукции \mathbf{B} находим из соотношений (1.7), индукцию \mathbf{D} электрического и напряженность \mathbf{H} магнитного поля, а также дифференциальные диэлектрическую ε и магнитную μ проницаемости в теле определяем при помощи феноменологических соотношений (1.1).

Если при определении ЭМП в качестве расчетной функции выбрать напряженность магнитного поля \mathbf{H} , вместо одного уравнения (1.5) получим два уравнения (относительно неизвестных $H_r(r, z, t), H_z(r, z, t)$), которые должны решаться совместно с уравнением (1.3). Однако при рассмотрении длинного электропроводного цилиндрического тела при установившихся внешних электромагнитных влияниях, не зависящих от координаты z , остается одна ненулевая компонента H_z , для определения которой, пренебрегая токами смещения в теле, получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} \right) - \mu \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial B_{*z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.13)$$

При заданном значении $H_z^{(1)}$ на поверхности задача об определении ЭМП и температуры в этом случае сводится к решению уравнений (1.13) и

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + j_\varphi^{(1)} E_\varphi^{(1)}, \quad E_\varphi^{(1)} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} \quad (1.14)$$

при нулевых начальных условиях на напряженность магнитного поля, заданном начальном распределении температуры $T_0(r, z)$, условиях конвективного теплообмена на поверхности цилиндра (при $r = R$) и условиях

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (1.15)$$

В рамках предложенной расчетной модели при сделанных ранее допущениях силовое влияние ЭМП на электропроводное тело сводится к действию пондеромоторных сил [6], из которых неравными нулю остаются только силы Ампера \mathbf{F}^A и силы \mathbf{F}^M воздействия поля на молекулярные токи, компоненты которых определяются соотношениями

$$\begin{aligned} F_r^A &= \gamma E_\varphi^{(1)} B_z^{(1)}, & F_z^A &= -\gamma E_\varphi^{(1)} B_r^{(1)}, \\ F_r^M &= \left(\frac{1}{\mu_0} B_r^{(1)} - H_r^{(1)} \right) \frac{\partial B_r^{(1)}}{\partial r} + \left(\frac{1}{\mu_0} B_z^{(1)} - H_z^{(1)} \right) \frac{\partial B_z^{(1)}}{\partial r}, \\ F_z^M &= \left(\frac{1}{\mu_0} B_z^{(1)} - H_z^{(1)} \right) \frac{\partial B_z^{(1)}}{\partial z} + \left(\frac{1}{\mu_0} B_r^{(1)} - H_r^{(1)} \right) \frac{\partial B_r^{(1)}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Полученные из решения связанной задачи электродинамики и теплопроводности температурное поле и пондеромоторные силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}^A + \mathbf{F}^B$ являются исходными для определения напряженного состояния тела.

Анализ напряженно-деформированного состояния тела проведем с использованием соотношений неизотермического упругопластического течения [9], в соответствии с которыми процесс деформирования рассматривается поэтапно. Пондеромоторные силы и распределение температуры в теле, начиная с заданных величин при $t = 0$, изменяются на соответствующие приращения на каждом шаге нагружения, так что к концу процесса деформирования они принимают свои окончательные значения. На каждом шаге за заданными приращениями этих сил и температуры определяются приращения перемещений, деформаций и напряжений, которые суммируются с полученными на предыдущих шагах.

Проходя так шаг за шагом, получаем историю изменения термомеханического состояния тела.

Рассмотрим очередной шаг нагружения. Пластическое деформирование начинается при выходе точки в пространстве напряжений на поверхность текучести

$$\Phi(\sigma_{ij} - o_{ij}) = K^2 \left(\int d\varepsilon_i^p, T \right), \quad (1.16)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; o_{ij} — координаты центра поверхности текучести; K^2 — функция, задающая размер поверхности текучести в зависимости от температуры и величины накопленной пластической деформации $\int d\varepsilon_i^p$; $d\varepsilon_i^p = \sqrt{(2/3) d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ — интенсивность приращений пластических деформаций. В качестве критерия перехода в пластичность выберем условие Мизеса, функция текучести для которого

$$\Phi(\sigma_{ij} - o_{ij}) = \sqrt{(3/2) s_{ij} s_{ij}}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - o_{ij} - (1/3) \delta_{ij} (\sigma_{ij} - o_{ij}). \quad (1.17)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Приращения напряжений за шаг нагружения представим в виде

$$d\sigma_{ij} = G_{ijkl}^{t+dt} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^T - d\varepsilon_{kl}^p) + dG_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T - \varepsilon_{kl}^p). \quad (1.18)$$

Здесь G_{ijkl}^{t+dt} , dG_{ijkl} — соответственно значения компонент тензора упругих модулей в момент времени $t+dt$ (в конце шага нагружения) и их приращения (в связи с их зависимостью от температуры) на данном шаге; ε_{kl} , ε_{kl}^T , ε_{kl}^p — компоненты тензора полных, температурных и пластических деформаций соответственно в момент времени t (в начале шага).

Для определения приращений пластических деформаций используем ассоциированный закон пластического течения о развитии пластических деформаций по нормали к поверхности течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\chi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.19)$$

а приращения температурных деформаций находим следующим образом:

$$d\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} (\alpha^{t+dt} dT + (\alpha^{t+dt} - \alpha^t) (T - T_0)), \quad (1.20)$$

где α — коэффициент температурного расширения.

С учетом приведенных зависимостей (1.16)–(1.20) соотношения между приращениями напряжений и деформаций принимают вид [9]

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} = & \left(G_{ijmn}^{t+dt} - \frac{G_{ijvw}^{t+dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} G_{klmn}^{t+dt}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rs}}} \right) (d\varepsilon_{mn} - d\varepsilon_{mn}^T) + \\ & + \left(dG_{ijmn} - \frac{G_{ijvw}^{t+dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{vw}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} dG_{klmn}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rs}}} \right) (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{mn}^p - \varepsilon_{mn}^T) + \\ & + \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}}} G_{ijmn}^{t+dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial \sigma_i}{\partial T}}{\frac{2}{3} H^t \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} + G_{pqrs}^{t+dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rs}}} dT \end{aligned}$$

или в матрично-векторной форме

$$\{d\sigma\} = [\mathbf{G}]^{t+\Delta t}(\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + [d\mathbf{G}](\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon_T\}^t - \{\varepsilon_p\}^t) + \{Z\} dT. \quad (1.21)$$

Здесь H^t — угол наклона кривой эквивалентные напряжения σ_i — эквивалентные пластические деформации ε_i^p ; $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{rz}\}'$, $\{\sigma\} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}'$ (штрихом обозначена операция транспонирования). Отметим, что появление двух последних слагаемых в уравнении (1.21) вызвано зависимостью упругих свойств и предела текучести материала от температуры.

Замкнем систему уравнений геометрическими соотношениями, ограничиваясь случаем малых деформаций, и уравнениями равновесия [10]

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{A}]\mathbf{u}; \quad (1.22)$$

$$[\mathbf{A}]' \cdot \{\sigma\} - \mathbf{F} = 0 \quad (1.23)$$

с известными граничными условиями в перемещениях и напряжениях

$$([\Sigma_n]\{\sigma\} - \mathbf{p})|_{S_\sigma} = 0, \quad \mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}^{(0)}, \quad S_u \cup S_\sigma = S, \quad S_u \cap S_\sigma = \emptyset. \quad (1.24)$$

Здесь \mathbf{p} , $\mathbf{u}^{(0)}$ — векторы внешнего силового нагружения, заданного на поверхности S_σ , и перемещений $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$, заданных на поверхности S_u ;

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 1/r & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix}', \quad [\Sigma_n] = \begin{bmatrix} n_r & 0 & n_z & 0 \\ 0 & n_z & n_r & 0 \end{bmatrix}'$$

— матрицы дифференциального оператора геометрических соотношений теории упругости и направляющих косинусов нормали к поверхности S [10].

Таким образом, в соответствии с предложенной расчетной схемой задача об определении напряженно-деформированного состояния электропроводного тела, находящегося под воздействием внешнего ЭМП, решается в два этапа и состоит в решении связанной задачи электродинамики и теплопроводности и термоупругопластичности. На основе полученных на первом этапе значений температуры и ponderomotorных сил на втором этапе решения задачи из системы уравнений равновесия (1.23), геометрических соотношений (1.22), уравнений состояния (1.21) при граничных условиях (1.24) определяем перемещения, деформации и напряжения.

2. Методика решения. Построим решение сформулированной задачи с использованием метода конечных элементов в варианте метода взвешенных невязок [10]. Запишем определяющие соотношения метода для связанной задачи электродинамики и теплопроводности. С этой целью умножим уравнение теплопроводности (1.3) на произвольную весовую функцию $w \in H^1(V)$ (пространство Соболева $H^1(V) = \{w \in L^2(V), \nabla w \in L^2(V)\}$) и проинтегрируем полученное соотношение по области V . После использования формулы Грина с учетом условия теплообмена (1.10) получим

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - j_\varphi^{(1)} E_\varphi^{(1)} w \right) r dr dz + \int_S \beta(T - T_c) w r d\xi = 0. \quad (2.1)$$

Применим этот же подход к уравнениям (1.5) и (1.6), предварительно заменив бесконечное пространство конечной областью V_* ($V \subset V_*$), которая ограничена достаточно удаленной от тела и заданных токов поверхностью S_* . После применения формулы Грина приходим к соотношениям

$$\int_V \mu^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi^{(1)})}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial (r w_1)}{\partial r} + \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) r dr dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_S \mu^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(1)})}{\partial r} n_r + \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial z} n_z \right) w_1 r d\xi + \\
& + \int_V \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} E_\varphi^{(1)} + F_q \frac{\partial E_\varphi^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E_\varphi^{(1)}}{\partial t^2} - F_p \right) w_1 r dr dz = 0 \quad \forall w_1 \in H^1(V_*); \\
& \int_{V_* \setminus V} \mu_0^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial (rw_1)}{\partial r} + \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) r dr dz + \\
& + \int_{V_* \setminus V} \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_\varphi^{(0)}}{\partial t^2} w_1 r dr dz - \int_S \mu_0^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi^{(0)})}{\partial r} n_r + \frac{\partial E_\varphi^{(0)}}{\partial z} n_z \right) w_1 r d\xi + \\
& + \int_{V_* \setminus V} \frac{\partial j_\varphi}{\partial t} w_1 r dr dz = 0 \quad \forall w_1 \in H^1(V_*). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Здесь $H^1(V_*) = \{w \in H^1(V_*): w = 0 \forall (0, z) \in V_*\}$. Вследствие необходимости учета граничных условий (1.12) весовая функция на оси Oz равна нулю. Поскольку \mathbf{n} — внутренняя (по отношению к внешней среде $V_* \setminus V$) нормаль к поверхности S , в соотношении (2.2) появляется знак минус. Интеграл по S_* исчезает вследствие граничного условия (1.11).

Учитывая условия (1.9), приходим к единому соотношению для задачи электродинамики, записанному для всей области V_* :

$$\begin{aligned}
& \int_{V_*} \mu_c^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial (rw_1)}{\partial r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) r dr dz + \\
& + \int_{V_*} \left(\gamma_t E_\varphi + F_c \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \varepsilon_c \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2} + F_d \right) w_1 r dr dz = 0 \quad \forall w_1 \in H^1(V_*), \quad (2.3)
\end{aligned}$$

в котором введены обозначения: для области тела V

$$\mu_c = \mu; \quad \varepsilon_c = \varepsilon; \quad \gamma_t = \frac{\partial \gamma}{\partial t}; \quad F_c = F_q; \quad F_d = -F_p; \quad E_\varphi = E_\varphi^{(1)};$$

для внешней среды $V_* \setminus V$

$$\mu_c = \mu_0; \quad \varepsilon_c = \varepsilon_0; \quad \gamma_t = 0; \quad F_c = 0; \quad F_d = \frac{\partial j_\varphi}{\partial t}; \quad E_\varphi = E_\varphi^{(0)}.$$

Проведем стандартную процедуру конечно-элементной дискретизации соотношений (2.1) и (2.3) по пространственным переменным [10]. При этом разбиение области V_* осуществляем таким образом, чтобы граница раздела тела и внешней среды попадала на границы соответствующих конечных элементов. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[L_1]\{\dot{T}_h(t)\} + [L_0]\{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}; \quad (2.4)$$

$$[M_2]\{\ddot{E}_h(t)\} + [M_1]\{\dot{E}_h(t)\} + [M_0]\{E_h(t)\} = \{f_E\}, \quad \{E_h(0)\} = 0, \quad \{\dot{E}_h(0)\} = 0 \quad (2.5)$$

относительно неизвестных значений температуры $\{T_h\}$ и напряженности электрического поля $\{E_h\}$ в узлах разбиения. Матрично-векторные характеристики полученной системы

уравнений вычисляются путем суммирования соответствующих характеристик отдельных конечных элементов:

$$\begin{aligned}
[L_0]^{el} &= \int_{V^{el}} \lambda \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]' \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]' \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] \right) r dr dz + \int_{S^{el}} \beta [N]' [N] r d\xi, \\
[L_1]^{el} &= \int_{V^{el}} c [N]' [N] r dr dz, \quad \{f_T\}^{el} = \int_{V^{el}} j_\varphi^{(1)} E_\varphi^{(1)} [N]' r dr dz + \int_{S^{el}} \beta [N]' r d\xi, \\
[M_0]^{el} &= \int_{V_*^{el}} \frac{1}{\mu_c} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]' \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]' \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) r dr dz + \int_{V_*^{el}} \gamma_t [N]' [N] r dr dz + \\
&\quad + \int_{V_*^{el}} \frac{1}{\mu_c} \frac{1}{r} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]' [N] + [N]' \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} [N]' [N] \right) r dr dz, \\
[M_1]^{el} &= \int_{V_*^{el}} F_c [N]' [N] r dr dz, \quad [M_2]^{el} = \int_{V_*^{el}} \varepsilon_c [N]' [N] r dr dz, \\
\{f_E\}^{el} &= \int_{V_*^{el}} F_d [N]' r dr dz.
\end{aligned}$$

Здесь $[N] = [N_1, N_2, \dots, N_l]$, $[\partial N/\partial r]$, $[\partial N/\partial z]$ — матрицы функций формы и их производных; l — количество узлов конечного элемента.

Задачу Коши (2.4), (2.5) решаем с использованием семейства простых одношаговых многопараметрических алгоритмов, известных под названием метода Зенкевича — Вуда [11]. При этом зависимости электрофизических и теплофизических характеристик от температуры и зависимости индукции электрического и магнитного полей от соответствующих напряженностей аппроксимируем интерполяционными сплайнами, построенными на основе реальных кривых, которые описывают поведение тела в ЭМП.

Методика решения задачи (1.13)–(1.15) в случае длинного цилиндра строится аналогичным образом.

По известным параметрам, которые описывают ЭМП в теле, вычисляем пондеромоторные силы и переходим ко второму этапу решения задачи.

Запишем исходные конечно-элементные соотношения для задачи термоупругопластичности. Уравнения равновесия тела в приращениях напряжений с учетом равновесности напряженного состояния в начале шага нагружения принимают вид [10]

$$[\mathbf{A}]' \{d\sigma\} - \{d\mathbf{F}\} = 0. \quad (2.6)$$

После подстановки физических (1.21) и геометрических (1.22) соотношений в (2.6), применения стандартной процедуры метода взвешенных невязок и введения конечно-элементных аппроксимаций получим уравнение равновесия в приращениях перемещений [10]

$$[\mathbf{K}_{ep}] \{dq\} = \{d\mathbf{F}\} + \{d\mathbf{P}\} + \{d\mathbf{R}\},$$

которое решаем методом переменных параметров жесткости [10]. Здесь $\{dq\}$ — глобальный вектор приращений узловых перемещений; матрично-векторные характеристики $[\mathbf{K}_{ep}]$, $\{d\mathbf{F}\}$, $\{d\mathbf{P}\}$, $\{d\mathbf{R}\}$ получаем путем суммирования соответствующих характеристик отдельных элементов:

$$[\mathbf{K}_{ep}^{(el)}] = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]' [\mathbf{A}]' [\mathbf{C}]^{t_j + \Delta t_j} [\mathbf{A}] [\mathbf{N}] r dr dz,$$

$$\{d\mathbf{P}\}^{(el)} = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]' [\mathbf{A}]' ([d\mathbf{C}] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \{z\} dT) r dr dz + \int_{S_\sigma^{(el)}} [\mathbf{N}]' \{d\mathbf{p}\} r d\xi,$$

$$\{d\mathbf{R}\}^{(el)} = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]' [\mathbf{A}]' [\mathbf{A}] [\mathbf{N}] \{d\varepsilon_T\} r dr dz, \quad \{d\mathbf{F}\}^{(el)} = \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]' \{d\mathbf{F}\} r dr dz.$$

На основе предложенной методики создано соответствующее программное обеспечение моделирования взаимодействия электромагнитного, температурного и механического полей в электропроводном теле, находящемся под воздействием внешнего ЭМП, и решен ряд конкретных задач.

3. Индукционный нагрев цилиндра. В качестве примера рассмотрим процесс индукционного нагрева свободного от силового нагружения стального цилиндра длиной $2L$, радиуса R . Цилиндр находится в коаксиальном с ним индукторе, который моделируется цилиндрической поверхностью радиуса R_i и длиной $2L_i$. По индуктору течет ток плотностью

$$\mathbf{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, J_0 \sin(2\pi\omega t), 0), \quad r = R_i, \quad |z| \leq L_i, \quad (3.1)$$

где ω — частота.

С целью исследования сходимости численных схем задача решалась на различных по плотности конечно-элементных сетках, при различных шагах интегрирования по времени и разных размерах области V_* . Полученные результаты сравнивались с известными аналитическими решениями.

На рис. 1 изображены используемые при расчетах типовые сетки изопараметрических биквадратичных восьмиузловых элементов [10] ($R = 0,01$ м, $L = 0,04$ м, $R_i = 0,012$ м, $L_i = 0,042$ м, $R_0 = 2,5R$, $L_0 = 2L$).

3.1. *Цилиндр из неферромагнитной стали X18H9T.* Характеристики стали известны [7] (их зависимость от температуры не учитывалась). Расчеты проводились при $J_0 = 6 \cdot 10^4$ А/м²; $\omega = 3 \cdot 10^5$ Гц; $\beta = 167$ Вт/(м²·К); $T_0 = T_S = 0$ °С. Предел упругости принимался равным 220 МПа.

На рис. 2 показана интенсивность напряжений σ_i в цилиндре при $t = 7,1$ с (момент выключения индуктора в работе [7]). Краевой эффект охватывает область порядка $2R$. В центральной части цилиндра решение практически не зависит от координаты z . Напряжения σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ в экваториальном сечении цилиндра $z = 0$ приведены на рис. 3. На этом же рисунке с целью сравнения штриховыми линиями нанесены известные аналитические решения, полученные в замкнутом виде для длинного цилиндра в работе [7]. В масштабе рисунка решения практически совпадают. Такое согласование результатов получено уже при пяти восьмиузловых элементах по радиусу цилиндра (см. рис. 1, б) и шаге интегрирования по времени $\Delta t_E = \omega^{-1}/16$.

Следует отметить, что замена внешнего пространства областью V_* с параметрами $R_0 = 2,5R$, $L_0 = 2L$ (рис. 1) не влияет на решение задачи электродинамики и теплопроводности: $\forall R_0 > 2,5R$, $\forall L_0 > 2L$ решения совпадают между собой, а также практически тождественны в сечении $z = 0$ решению одномерной задачи (1.13)–(1.15) для длинного цилиндра при задании на поверхности цилиндра граничного условия $H_z = 6 \cdot 10^4 \sin(2\pi\omega t)$ А/м (с уменьшением $R_0 < 2,5R$, $L_0 < 2L$ эти решения начинают различаться).

Поскольку анализ трех полей различной природы с одинаковым временным шагом неэффективен с точки зрения вычислительных затрат, в алгоритме решения задачи предусмотрено использование различных временных шагов интегрирования уравнений электродинамики, теплопроводности и упругопластичности. При этом в уравнениях теплопроводности и упругопластичности фигурируют осредненные за период колебания электро-

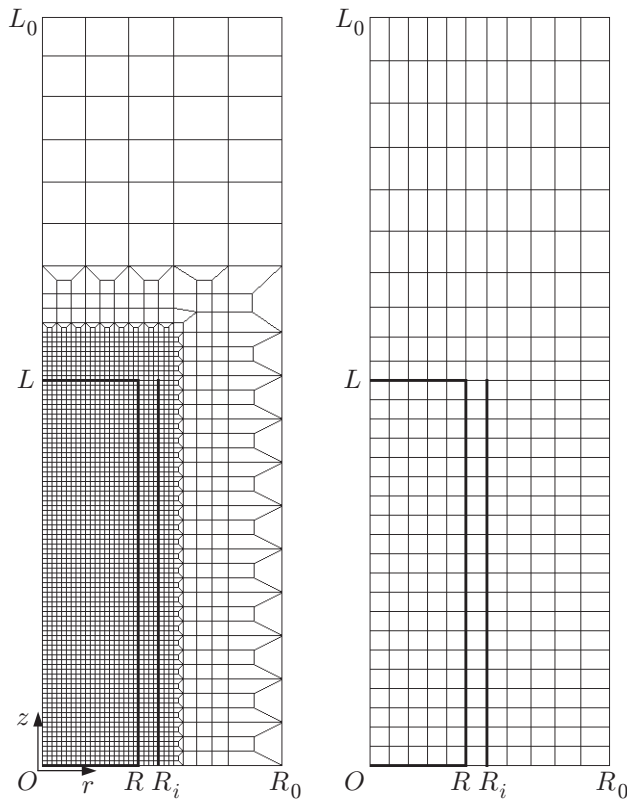


Рис. 1

Рис. 1. Типовые конечно-элементные сетки

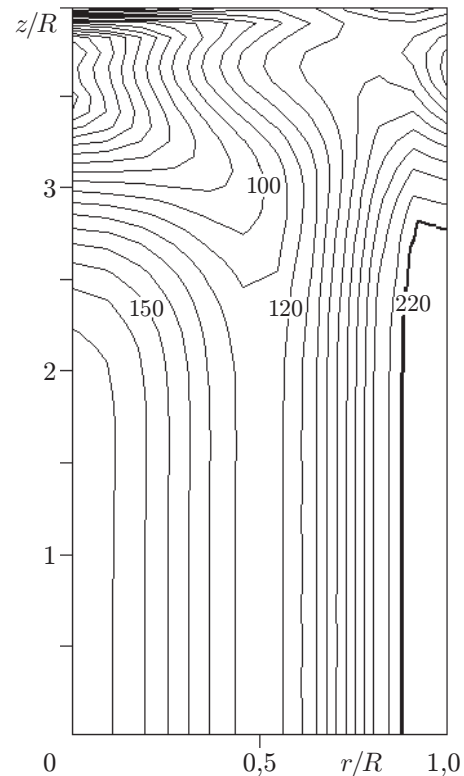


Рис. 2

Рис. 2. Интенсивность напряжений в цилиндре из стали X18H9T ($t = 7,1$ с):
числа у линий — σ , МПа

магнитной волны тепловыделения и пондеромоторные силы [12]. Так, решение рассматриваемой задачи, полученное при шаге интегрирования по времени уравнения теплопроводности $\Delta t_T = 2,367$ с и шаге по нагрузке $\Delta t_M = 7,1$ с, практически совпало с решением при $\Delta t_M = \Delta t_T = \Delta t_E$.

3.2. *Цилиндр из ферромагнитной стали С30.* Электро-, теплофизические и физико-механические характеристики стали и их зависимости от температуры приведены в [5, 12–15]. Цилиндр нагревался током (3.1) ($J_0 = 10^6$ А/м²; $\omega = 8 \cdot 10^3$ Гц). Когда внешний слой цилиндра толщиной 1,5 мм прогрелся до температуры $T \geq 970$ °С, ток был отключен и цилиндр остывал путем конвективного теплообмена ($\beta = 10^4$ Вт/(м²·К)) с внешней средой, температура которой $T_S = 20$ °С (при нагреве $\beta = 13$ Вт/(м²·К)); $T_0 = T_S$.

Анализ результатов показал, что с прогревом внешних слоев цилиндра до температуры Кюри (770 °С) и потерей ими ферромагнитных свойств максимальные значения удельной мощности источников смещаются в глубину цилиндра и основные тепловыделения происходят там, где материал еще не потерял ферромагнитные свойства. При этом глубина проникновения магнитного поля с прогреванием цилиндра возрастает.

В начале нагрева в поверхностном слое возникают сжимающие напряжения, которые быстро достигают предела упругости (рис. 4, кривая 1). С потерей этим слоем ферромагнитных свойств область основных тепловыделений и максимальных сжимающих напряжений передвигается в глубину цилиндра (кривые 2–9). При этом, как видим, поверхностный слой начинает разгружаться.

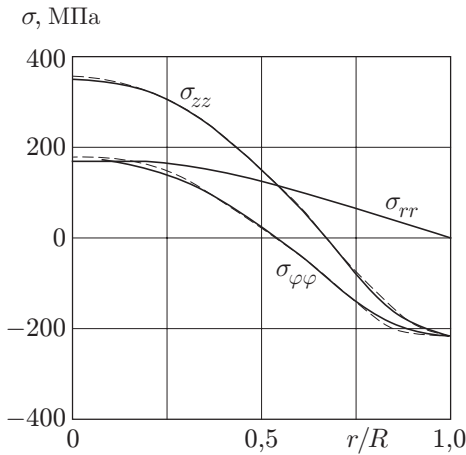


Рис. 3

Рис. 3. Напряжения в сечении $z = 0$ цилиндра ($t = 7,1$ с)

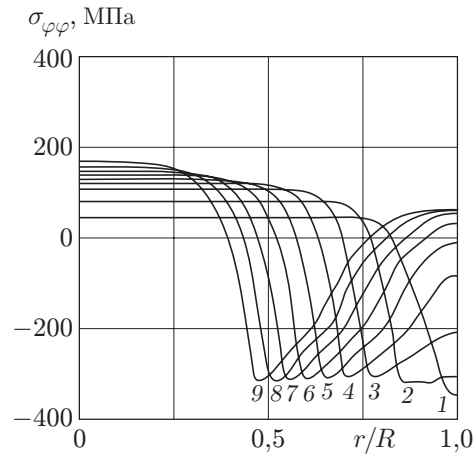


Рис. 4

Рис. 4. Напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ в цилиндре из стали С30 при нагреве:

t , с: 1 — 0,007, 2 — 0,02, 3 — 0,04, 4 — 0,06, 5 — 0,08, 6 — 0,10, 7 — 0,12, 8 — 0,14, 9 — 0,159

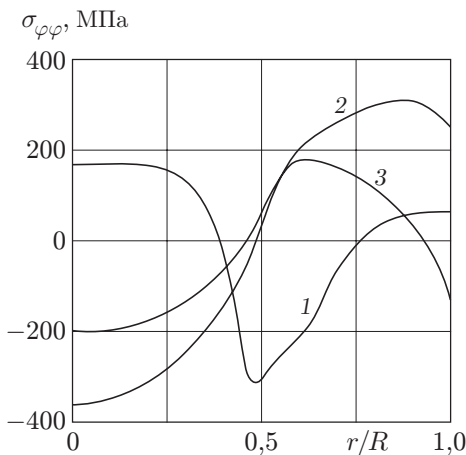


Рис. 5

Рис. 5. Изменения напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в цилиндре из стали С30 при охлаждении: t , с: 1 — 0,159, 2 — 2,45, 3 — 20

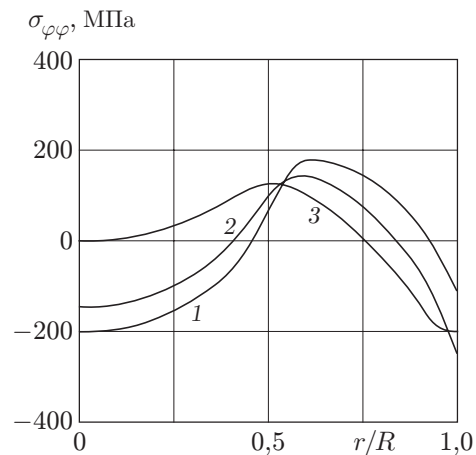


Рис. 6

Рис. 6. Остаточные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ в цилиндре из стали С30

С достижением необходимой глубины прогрева ток выключается ($t = 0,159$ с). Поверхностный слой начинает быстро охлаждаться. В нем возникают растягивающие напряжения, которые быстро возрастают и достигают своего максимума в момент времени $t = 2,45$ с (рис. 5, кривая 2). Внутренние слои охлаждаются медленнее. Сокращаясь при охлаждении в размерах, они стягивают быстро охлажденный поверхностный слой, ослабляя в нем напряжения растяжения, максимум которых смещается от поверхности в глубину цилиндра. В поверхностном слое вследствие этого формируются сжимающие остаточные напряжения (рис. 5, кривая 3).

На рис. 6 показаны остаточные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ в цилиндре (кривая 1). С целью сравнения на этом же рисунке приведены остаточные напряжения, полученные без учета

ферромагнитных свойств материала (с осредненной магнитной проницаемостью по напряженности магнитного поля; кривая 2), а также с постоянными, осредненными по интервалу температур нагрева-охлаждения физико-механическими характеристиками (кривая 3).

Распределения температуры, полученные с учетом температурной зависимости электрофизических характеристик, начинают отличаться от распределений, вычисленных при средних за промежутки нагрева характеристиках, уже при 300 °С. С дальнейшим нагревом отличие еще более увеличивается и носит уже качественный характер.

Влиянием ponderomotorных сил в данном случае можно пренебречь. Максимальные значения силовых напряжений, обусловленных объемными силами, составляют менее 1 % от аналогичных температурных.

Численное исследование сходимости показало, что требования к дискретной модели при учете ферромагнитных свойств и температурной зависимости свойств материала существенно возрастают. Так, для получения достаточно точных значений напряженности магнитного поля необходимо 500 элементов по радиусу цилиндра при шагах по времени $\Delta t_E = \omega^{-1}/2500$ и $\Delta t_T = \omega^{-1}$. Для решения задачи упругопластичности достаточно двадцати конечных элементов по радиусу цилиндра. Шаг по нагрузке выбирался переменным. Как только максимальный рост температуры в какой-то точке цилиндра превышал 15 °С, определялись приращения перемещений, деформаций и напряжений на данном шаге нагружения.

Выводы. Рассматриваемая в работе методика моделирования термомеханических процессов в электропроводных телах в условиях воздействия внешних ЭМП позволяет более адекватно прогнозировать поведение изделий из магнитных материалов в широком температурном диапазоне и учитывать его при автоматизации индукционной обработки, в частности, получить оценку остаточных напряжений, которые являются исходными при разработке режимов эксплуатации изделий.

При моделировании процессов высокотемпературного индукционного нагрева изделий из ферромагнитных сталей необходимо учитывать температурную зависимость электро-, теплофизических и механических характеристик материала. В противном случае можно получить качественно иные распределения параметров процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chaboudez C., Clain S., Glardon R., et al.** Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries // IEEE Trans. on Magnetics. 1997. V. 33, N 1. P. 735–745.
2. **Favennec Y., Labbe V., Bay F.** Induction heating processes optimization a general optimal control approach // J. Comput. Phys. 2003. V. 187. P. 68–94.
3. **Nemkov V., Goldstein R.** Computer simulation for fundamental study and practical solutions to induction heating problems // COMPEL: Intern. J. Comput. and Math. in Electr. and Electron. Engng. 2003. V. 22, N 1. P. 181–191.
4. **Rappaz J., Swierkosz M.** Mathematical modeling and simulation of induction heating processes // Appl. Math. Comp. Sci. 1996. V. 6, N 2. P. 207–221.
5. **Turowski J.** Elektrodynamika techniczna. Warszawa: WNT, 1993.
6. **Gaczkiewicz A., Kasperski Z.** Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termo-mechaniki ciał przewodzących. Opole: OW. Politechnika Opolska, 1999.
7. **Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.** Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наук. думка, 1977.
8. **Головин Г. Ф., Замятин М. М.** Высокочастотная термическая обработка. Л.: Машиностроение, 1990.

9. **Allen D. H., Heisler W. E.** A theory for analysis of thermoplastic materials // Computers and Structures. 1981. V. 13. P. 129–135.
10. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** Finite element method. V. 1. The Basis. London: Butterworth Heinemann, 2000.
11. **Zienkiewicz O. C., Wood W. L., Nine N. W.** A unified set of single step algorithm // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1984. V. 20. P. 1529–1552.
12. **Skoczowski T., Kalus M.** The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes // IEEE Trans. on Magnetics. 1989. N 3. P. 2745–2750.
13. **Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справочник / Хисматулин Е. Р., Королев Е. М., Лившиц В. И. и др.** М.: Машиностроение, 1990.
14. **Преображенский А. А.** Магнитные материалы и элементы. М.: Высш. шк., 1976.
15. **Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И. К. Кикоина.** М.: Атомиздат, 1976.

Поступила в редакцию 22/XI 2004 г.
