

УДК 519.245

# Эффективно реализуемые приближенные модели случайных функций в стохастических задачах теории переноса частиц\*

Г.А. Михайлов<sup>1,2</sup>, Г.З. Лотова<sup>1,2</sup>, И.Н. Медведев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: gam@sscc.ru (Михайлов Г.А.), lot@osmf.ssc.ru (Лотова Г.З.), min@osmf.ssc.ru (Медведев И.Н.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 17, 2024.

**Михайлов Г.А., Лотова Г.З., Медведев И.Н.** Эффективно реализуемые приближенные модели случайных функций в стохастических задачах теории переноса частиц // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024. — Т. 27, № 2. — С. 189–209.

Представлены разработанные авторами эффективные аппроксимации случайных функций, численно моделируемые для исследования стохастического процесса переноса частиц, включая задачи о флюктуациях критичности процесса в случайных размножающих средах. Построены эффективные корреляционно-рандомизированные алгоритмы аппроксимации ансамбля траекторий частиц с использованием корреляционной функции или только корреляционного масштаба среды. Сформулирована простейшая сеточная модель изотропного случайного поля, воспроизводящая заданную среднюю корреляционную длину, что обеспечивает высокую точность решения стохастических задач переноса при малом корреляционном масштабе. Предлагаемые алгоритмы апробированы при решении тестовой задачи о переносе гамма-квантов и задачи оценки сверхэкспоненциального среднего потока частиц в случайной размножающей среде.

DOI: 10.15372/SJNM20240205

EDN: RITDKD

**Ключевые слова:** численное статистическое моделирование, случайная среда, поле Вороного, метод максимального сечения, корреляционно-рандомизированные алгоритмы, сеточная аппроксимация, поток частиц, сверхэкспоненциальная асимптотика, погрешность оценок, трудоемкость вычислений.

**Michailov G.A., Lotova G.Z., Medvedev I.N.** Efficiently realized approximate models of random functions in stochastic problems of the theory of particle transfer // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2024. — Vol. 27, № 2. — P. 189–209.

The paper presents efficiently realized approximations of random functions, which are developed by the authors and numerically modeled for the study of stochastic processes of particle transport, including criticality fluctuations of processes in random media with multiplication. Efficient correlation randomized algorithms for approximating an ensemble of particle trajectories using the correlation function or only the correlation scale of a medium are constructed. A simple grid model of an isotropic random field is formulated reproducing a given average correlation length, which ensures high accuracy in solving stochastic transfer problems for a small correlation scale. The algorithms are tested by solving a test problem of photon transfer and a problem of estimating the overexponential average particle flux in a random medium with multiplication.

\*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № FWNM-2022-0002).

**Keywords:** numerical statistical modeling, random medium, Voronoi tessellation, maximum cross-section method (Woodcock tracking), correlation randomized algorithms, grid approximation, particle flow, overexponential asymptotics, estimation error, computation cost.

## 1. Введение

**1.1.** На основе численного статистического моделирования процесса переноса частиц (квантов излучения) в ряде работ детально изучается вероятность прохождения частицы, осредненная по реализациям случайной среды (см., например, [1–5]). Это практически важно, в частности, потому что при выполнении соответствующего свойства эргодичности такое осреднение эквивалентно осреднению по поверхности достаточно протяженных детектора или источника частиц, что подтверждается численными результатами [6]. Необходимым также является численно-теоретическое изучение средних потоков частиц и параметров критичности для случайно возмущенных размножающих сред. Исследования чаще всего проводятся для так называемых “мозаичных” моделей однородных изотропных случайных полей (сред) с известными корреляционными функциями, которые в значительной степени определяют осредненную вероятность прохождения  $P_t$  при фиксированных значениях математического ожидания и дисперсии одномерного (т. е. одноточечного) распределения поля [6].

**1.2.** В работе [6] представлены две модели “мозаичных” случайных полей  $\sigma(\mathbf{r})$ , которые строятся на основе специального разбиения пространства на ячейки со случайным выбором значения поля в каждой ячейке согласно некоторому распределению (независимо от остальных ячеек).

Для построения модели, называемой мозаичным полем Пуассона, пространство разбивается на ячейки ансамблем базовых гиперплоскостей, в котором гиперплоскость определяется точкой пуассоновского точечного потока интенсивности  $\lambda_p$  во вспомогательном параметрическом пространстве. Точка этого пространства объединяет расстояние  $h$  от заданного центра до базовой гиперплоскости и значение ее “внешней”, т. е. направленной от центра, нормали  $\mathbf{n}$  к базовой гиперплоскости. Геометрические свойства таких разбиений детально изучены в [2] (см. также [4, 5, 7]).

В работах [5, 8] построено кусочно-постоянное двумерное мозаичное поле Пуассона и показано, что его корреляционная функция экспоненциальна. В работе [4] дано  $l$ -мерное обобщение такого поля, т. е. построено  $l$ -мерное кусочно-постоянное экспоненциально коррелированное мозаичное поле. В [4] также показано, что мозаичное поле Пуассона является однородным и изотропным в “узком” смысле.

Другая возможная рассматриваемая модель, называемая далее мозаичным полем Вороного, строится на основе пуассоновского точечного потока интенсивности  $\lambda_v$ , который определяет разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек, наиболее близких к одной из точек потока (диаграмма Вороного).

Обозначим  $\sigma(\mathbf{r}; P)$  — мозаичное поле Пуассона,  $\sigma(\mathbf{r}; V)$  — мозаичное поле Вороного,  $\mathbf{r} \in R^3$ . Для реализации поля  $\sigma(\mathbf{r}; V)$  строится пуассоновский точечный поток в пространстве  $R^3$  с параметром  $\lambda_v$ , а для  $\sigma(\mathbf{r}; P)$  — точечный поток в пространстве  $R^+ \times S^{(3)}$  с параметром  $\lambda_p$ , где  $S^{(3)}$  — единичная сфера в  $R^3$  с центром в начале координат. Для обоих полей пространство  $R^3$  разбивается на ячейки, как указано выше, и для каждой ячейки независимо выбирается случайное постоянное в ячейке значение поля  $\sigma(\mathbf{r})$  согласно некоторому распределению со средним значением  $m = E\sigma$  и дисперсией  $d = D\sigma$ .

Отметим, что для поля Пуассона каждая подобласть полностью определяется (идентифицируется) набором

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots), \quad \gamma_k = \text{sign}(F_k(\mathbf{r})),$$

где  $F_k(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}_k, [h_k \mathbf{n}_k - \mathbf{r}]) = 0$  — уравнение соответствующей плоскости  $\Gamma_k$ , а  $\mathbf{r}$  — произвольная точка подобласти. Алгоритм построения реализации трехмерного поля Пуассона более детально описан в [4] (см. также [9]).

Особую роль в прикладных исследованиях играет величина  $L = \int_0^\infty K(r)dr$ , где  $K(r)$  — нормированная корреляционная функция, т. е. коэффициент корреляции между  $\sigma(\mathbf{r})$  и  $\sigma(\mathbf{r}')$  при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$ . Эту величину иногда называют корреляционной длиной в связи с тем, что для простейшей “ступенчатой” аппроксимации  $K(r) \approx K_h(r) = \chi(0, h)$  выполняется равенство  $L = h$ , где  $\chi(a, b)$  — индикатор интервала  $(a, b)$ .

В случае изотропного поля величину  $L$  называют также радиусом корреляции. Для неизотропного однородного поля  $L$  зависит от направления вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Соответствующее осреднение дает возможность приближенного распространения результатов настоящей работы на слабо неизотропные поля.

Для мозаичных случайных полей  $K(r) = P(A_r)$ , где  $A_r$  — событие, состоящее в том, что точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$  находятся в одной ячейке [4]. В [7] для поля Вороного фактически получено соотношение

$$\int_0^\infty P(A_r)dr = \lambda_v^{-1/3} 4\pi \Gamma(4/3) \int_0^\pi \int_0^\infty V(R, \theta)^{-4/3} \sin \theta R^2 dR d\theta = 0.459 \lambda_v^{-1/3},$$

где  $V(R, \theta)$  — объем объединения двух шаров с центрами на расстоянии единицы и радиусами  $R, \sqrt{R^2 + 1 - 2R \cos \theta}$ . Отсюда для этого поля  $L_v \approx 0.459 \lambda_v^{-1/3}$ .

Для мозаичного поля Пуассона  $P(A_r) = e^{-\pi \lambda_p r}$  (см., например, [2, 4]), т. е. корреляционная функция является экспоненциальной. Следовательно,  $L_p = 1/(\pi \lambda_p)$ . Хотя  $K(r)$  для мозаичного поля Вороного не является экспоненциальной функцией [7], однако расчеты показали, что она близка к ней.

В работе показано, что поле Пуассона реализуется с меньшей трудоемкостью и не требует расширения вспомогательного точечного потока. Однако поле Вороного является геометрически (и физически) более естественным и проще численно реализуется. Поэтому для верификации компьютерно экономичных приближенных моделей, представленных далее, случайных функций была использована “мозаика” Вороного. При этом учитывалось, что вспомогательный пуассоновский точечный поток следует моделировать в несколько расширенной области, ориентировочно, как показали зависимые испытания, на один–два корреляционных радиуса  $L$ .

## 2. Стохастическая модель переноса излучения

**2.1.** Далее рассматривается процесс переноса частиц (квантов излучения), математическая модель которого определяется кинетическим уравнением типа (см. [10, 11])

$$(\omega, \text{grad } \Phi) + \Sigma(\mathbf{r}, v)\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \Sigma_s(\mathbf{r}, v')w_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r} \in R^3$ ,  $\mathbf{v} = v\omega$ ,  $\omega$  — единичный вектор направления скорости,  $v = |\mathbf{v}|$ ;  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — плотность потока частиц-квантов излучения;  $\Sigma(\mathbf{r}, v)$  — полное макроскопическое сечение ослабления;  $\Sigma_s(\mathbf{r}, v)$  — макроскопическое сечение рассеяния;  $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — плотность распределения частиц в источнике;  $w_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})$  — индикаторика рассеяния кванта в точке

$(\mathbf{r}, \mathbf{v}')$ . Для решения задач переноса численно-статистически моделируется цепь Маркова столкновений частицы с элементами вещества, свободный пробег  $l$  между которыми распределен с плотностью  $f(l) = \Sigma(\mathbf{r}(l), v) \exp(-\tau(l))$ , где  $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}' + l\omega$ ,  $\tau(l) = \int_0^l \Sigma(\mathbf{r}(t), v) dt$  [11, 12]. Если  $\Sigma \equiv \text{const}$ , то пробег можно моделировать по формуле  $l = (-\ln \alpha)/\Sigma$ , где  $\alpha$  — случайное число, равномерно распределенное в интервале  $(0, 1)$ . Если же плотность среды существенно меняется, то может быть полезным метод максимального сечения (выравнивания, дельта-рассеяния) [13–15]. В соответствующей стохастической модели длины пробегов моделируются для коэффициента ослабления  $\Sigma_{\max}(v) \geq \Sigma(\mathbf{r}, v)$ , в точке столкновения  $\mathbf{r}$  с вероятностью  $(\Sigma_{\max}(v) - \Sigma(\mathbf{r}, v))/\Sigma_{\max}(v)$  скорость не изменяется, а с вероятностью  $\Sigma(\mathbf{r}, v)/\Sigma_{\max}(v)$  реализуется физическое столкновение с условными вероятностями  $\Sigma_s/\Sigma$ ,  $(\Sigma - \Sigma_s)/\Sigma$  рассеяния и поглощения. Адекватность метода следует также из известного свойства сохранения пуассоновости при случайному прореживании пуассоновского потока столкновений [15].

**2.2.** Метод максимального сечения часто применяется для решения стохастических задач теории переноса со случайным полем плотности среды  $\rho(\mathbf{r})$ , которое для простоты изложения в основном будем предполагать изотропным с нормированной корреляционной функцией  $K(r)$  и корреляционным радиусом  $L$ . При этом

$$\Sigma(\mathbf{r}, v) = \rho(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}, v) \quad \text{и} \quad \Sigma_s(\mathbf{r}, v) = \rho(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r}, v),$$

где  $\sigma(\mathbf{r}, v)$ ,  $\sigma_s(\mathbf{r}, v)$  — эффективные микроскопические сечения ослабления и рассеяния, которым соответствует нормированная индикатриса рассеяния  $w_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}'; \mathbf{r})$ .

Для решения стохастических задач теории переноса эффективен “метод двойной рандомизации” [16], в котором для каждой реализации среды моделируется одна или несколько (для уменьшения трудоемкости) траекторий частиц и на этой основе строятся несмешанные оценки линейных функционалов, например осредненной по реализациям среды вероятности прохождения. Трудоемкость (сложность) такого алгоритма может быть очень большой и даже неограниченной при  $L \rightarrow 0$ , например, для “мозаичных” моделей  $\rho(\mathbf{r})$  полей Пуассона, Вороного и т. п. В связи с этим в работе [17] был сформулирован новый корреляционно-рандомизированный алгоритм (КР-алгоритм или КРА) для оценки влияния стохастичности поля  $\rho$  на перенос частиц, эвристически основанный на том факте, что вероятность прохождения в значительной степени определяются корреляционной длиной  $L$  и одномерным распределением поля  $\rho$  [18].

**2.3. Формулировка КР-алгоритма.** КР-алгоритм определяется далее пунктами  $\mathcal{CR}1$ ,  $\mathcal{CR}2$ :

- $\mathcal{CR}1$ ) в процессе переноса пробег из  $\mathbf{r}'$  в  $\mathbf{r}$  моделируется по формуле  $l = -\ln \alpha/\Sigma_{\max}(v)$ ;
- $\mathcal{CR}2$ ) если  $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < L$ , то в алгоритме максимального сечения фиксируется  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$ , иначе значение  $\rho(\mathbf{r})$  выбирается случайно из одномерного распределения поля  $\rho$ .

Таким образом, КР-алгоритм строится путем рандомизации алгоритма максимального сечения с учетом значения  $L$ . Эвристически ясно, что этот алгоритм в случае анизотропного рассеяния в значительной степени соответствует корреляционной функции, близкой к “ступеньке”  $K_0(r) = 1$  при  $0 \leq r \leq L$ . Как показывают приведенные в [19] эвристические соображения, а также модельные исследования и численные эксперименты, такой алгоритм дает удовлетворительные результаты для анизотропного рассеяния при достаточно малых значениях  $L$  ( $L < 0.4/\Sigma_{\max}$ ), когда стандартное моделирование слишком трудоемко. При этом значение  $L$  в алгоритме можно корректировать (особенно

в односкоростном случае) на основе упрощенных тестовых задач [19]. Ясно, что трудоемкость КР-алгоритма ограничена при  $L \rightarrow 0$ , и поэтому его можно использовать для оценки соответствующей скорости сходимости в стохастических задачах переноса даже в неограниченных областях. Отметим, что в случае неизотропного однородного поля  $\rho$  можно также использовать КР-алгоритм, заменив  $L$  на  $L(\omega)$ ,  $\omega = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . В заключение пункта 2.3 заметим, что КР-алгоритм при  $L = 0$  реализует моделирование траекторий в осредненной среде, т. е. для  $\rho(\mathbf{r}) \equiv E\rho$ . Это получается непосредственно из выражений для вероятностей метода максимального сечения по формуле полной вероятности.

**2.4. Усовершенствованный КР-алгоритм.** Далее предполагается, что нормированная корреляционная функция  $K(r)$  поля  $\rho(\mathbf{r})$  неотрицательна:  $K(r) \geq 0$ . Можно полагать, что КР-алгоритм реализует выполнение равенства  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$  в алгоритме выравнивания с вероятностью  $K_0(l) = 1$  при  $l \leq L$ , где  $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Это дает основание для рассмотрения функционального корреляционно-рандомизированного алгоритма (ФКР-алгоритм, или ФКРА, или FCR), который по аналогии с КР-алгоритмом строится следующим образом:

- $\mathcal{FCR}1)$  пробег  $l$  из  $\mathbf{r}'$  в  $\mathbf{r}$  моделируется по формуле  $l = -\ln \alpha/\Sigma_{\max}$ ;
- $\mathcal{FCR}2)$  реализуется случайное число  $\alpha_1$ ; если  $\alpha_1 < K(l)$ , то  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}')$ , иначе  $\rho(\mathbf{r})$  выбирается из одномерного распределения поля  $\rho$ .

Однако для построения ФКРА требуется оценка корреляционной функции  $K(r)$  в целом, а для КРА достаточно каким-либо образом определить лишь значение  $L$ , т. е. корреляционный масштаб среды.

В заключение этого пункта отметим, что корреляционно-рандомизированные алгоритмы, в отличие от алгоритмов двойной рандомизации, дают возможность исследовать прохождение частиц через бесконечно протяженный слой вещества и тем самым погрешность, возникающую при замене такого слоя на ограниченный “бруск”.

### 3. Сеточная аппроксимация $\rho_h(\mathbf{r})$ однородного случайного поля $\rho(\mathbf{r})$

**3.1.** Основанный на рандомизации алгоритма максимального сечения КР-алгоритм реализует вычислительную аппроксимацию процесса переноса. Он весьма экономичен, так как не требует реализации поля  $\rho(\mathbf{r})$  в целом и двойной рандомизации (см. п. 2). Однако этот алгоритм в основном эффективен для существенно анизотропного рассеяния при условии  $L < 0.4/\Sigma_{\max}$  [19]. Недостатком КРА является также невозможность оценки физически значимой величины дисперсии  $D(\zeta | \rho)$  вычисляемой оценки  $\zeta$  за исключением бернуlliевой оценки с малым параметром  $p = E\zeta$ .

Эти соображения [20] определили мотивацию разработки эффективно реализуемой сеточной аппроксимации поля плотности  $\rho_h(\mathbf{r})$ , которая фактически представляет геометрически детерминированную стохастическую мозаику, аналогичную полю Вороного и в определенном далее смысле аппроксимирующую его.

Напомним, что в работе [21] было показано и в дальнейшем дополнительно проверено расчетами, что нормированная корреляционная функция  $K_L(r)$  поля Вороного хорошо аппроксимируется экспонентой

$$K_L(r) \approx e^{-r/L}. \quad (3.1)$$

Эта формула позволяет строить приближенный ФКР-алгоритм, уточняющий КРА (см. далее п. 4.2).

Сеточная аппроксимация (сеточная мозаика)  $\rho_h(\mathbf{r})$  строится на основе разбиения пространства  $R^3$  прямоугольной сеткой, т. е. на кубики  $\{S_h\}$  со стороной  $h$ . Для каждого элемента  $S_h$  независимо реализуется случайное значение  $\rho$  соответственно заданному одномерному распределению поля  $\rho(\mathbf{r})$ . Эффективное значение  $L = l_h$  поля  $\rho_h(\mathbf{r})$  строится путем равномерного осреднения корреляционной длины в этом поле:

$$l_h = \frac{h^{-3}}{4\pi} \int \int_{S_h} l_{S_h}(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} d\omega,$$

где  $l_{S_h}(\mathbf{r}, \omega)$  — расстояние от точки  $\mathbf{r}$  до границы кубика  $S_h$  в направлении  $\omega$ . Ясно, что выполняются равенства

$$L = l_h = h l_1, \quad h = L/l_1,$$

причем достаточно точные вычисления дали значение  $l_1 = 0.44831$  с погрешностью, не превышающей 0.00001.

Трудоемкость (сложность) мозаики  $\rho_h(\mathbf{r})$  существенно меньше трудоемкости мозаики Вороного, так как для определения значения  $\rho_h(\mathbf{r})$  не требуется перебора значений  $\rho$  для всех элементов сетки. Номер элемента прямоугольной сетки, в которой находится точка  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ , определяется очевидным образом с помощью стандартной встроенной функции вычисления целой части (например,  $\text{floor}(x_i/h)$  в C++).

**3.2.** Известно (см., например, [11]), что трудоемкость алгоритма метода Монте-Карло определяется величиной  $S(\zeta) = T_\zeta D\zeta$ , где  $T_\zeta$  — среднее время моделирования на ЭВМ для получения одного выборочного значения  $\zeta$ . Если для каждой реализации плотности моделировать  $m$  условно-независимых траекторий частиц, то согласно “формуле полной дисперсии” (см., например, [11]) величину  $D\zeta_m$  можно представить в виде

$$D = D\zeta_m = d_0 + \frac{d_1}{m}, \quad d_0 = \text{DE}(\zeta | \rho), \quad d_1 = \text{ED}(\zeta | \rho), \quad (3.2)$$

где  $d_0$  — физически значимая дисперсия оценки по флуктуациям поля  $\rho$ , а  $d_1$  — среднее значение условной дисперсии по траекториям  $\Omega$  для фиксированной реализации поля  $\rho$ . Отметим, что здесь  $D$  — “элементарная” дисперсия (на одну траекторию). Выполняется очевидное соотношение для среднего времени реализации оценки  $\zeta_m$

$$T_{\zeta_m} = T_0 + mT_1, \quad (3.3)$$

где  $T_0$  — среднее время, затрачиваемое на реализацию случайного поля, а  $T_1$  — среднее время, затрачиваемое на моделирование одной случайной траектории. Величина трудоемкости  $S(\zeta_m)$  в этом случае, как функция от  $m$ , имеет минимум в точке (см., например, [11])

$$m_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{T_0}{T_1} \frac{d_1}{d_0}},$$

и

$$S(\zeta_{m_{\text{opt}}}) = \left( \sqrt{T_0 d_0} + \sqrt{T_1 d_1} \right)^2.$$

Значение  $m_{\text{opt}}$  можно оценить, сделав два предварительных расчета для  $m = 1$  и  $m > 1$ , подставив полученные значения для  $D\zeta_1$ ,  $D\zeta_m$  в (3.2) и найдя решение системы из двух линейных уравнений для  $d_0$ ,  $d_1$ . Аналогичным способом определяются значения  $T_0$ ,  $T_1$  из (3.3) для полученных из расчетов значений  $T_{\zeta_1}$ ,  $T_{\zeta_m}$ . Отметим еще раз, что  $d_0$  — физически значимая дисперсия при условии, что  $D$  элементарна.

#### 4. Тестовая задача о прохождении гамма-квантов сквозь стохастическую среду

**4.1.** В качестве исходной стохастической среды рассмотрим мозаику Вороного в “брюске”

$$\mathbf{V}_H = [0, X_{\max}] \times [0, Y_{\max}] \times [0, H] \in R^3,$$

и будем полагать, что элементы такого разбиения (выпуклые многогранники) случайно заполнены водой с заданной вероятностью  $p$  или воздухом с заданной вероятностью  $1-p$ . Известно (см., например, [18]), что при моделировании пуассоновского потока точек в ограниченной области случайное поле типа мозаики Вороного не является однородным и изотропным, поэтому пуассоновский поток следует моделировать в области большего размера, чтобы мозаичное поле было близко к однородному и изотропному. На основе предварительных расчетов [18] было решено использовать бруск

$$\mathbf{V}_{H,2L} = [-2L, X_{\max} + 2L] \times [-2L, Y_{\max} + 2L] \times [-2L, H + 2L].$$

Использование “брюска” связано с невозможностью реализации поля  $\rho(\mathbf{r})$  в неограниченной области. Отметим, что сравнение вероятностей прохождения квантов через слой и “брюск” было реализовано в [19] с помощью КР-алгоритма.

Моделирование мозаичного поля Вороного в  $\mathbf{V}_{H,2L}$  строилось в два этапа. Сначала реализовывалось пуассоновское число  $\eta$  случайных точек  $\{\mathbf{r}_i\}$  согласно параметру  $\lambda_v(X_{\max} + 4L)(Y_{\max} + 4L)(H + 4L)$ , где  $\lambda_v$  — интенсивность пуассоновского точечного потока. Далее координаты точек  $\{\mathbf{r}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$ , выбирались независимо и равномерно в области  $\mathbf{V}_{H,2L}$ , а случайный выбор вещества (вода или воздух) в каждой ячейке  $S_i$ , построенной около точки  $\mathbf{r}_i$ , независимо разыгрывался с вероятностью  $p$  и  $1-p$  соответственно. Здесь стоит отметить, что вероятность  $p$  определяет среднюю “геометрическую” плотность смеси в области  $\mathbf{V}_{H,2L}$ .

Пусть в центре основания бруска  $\mathbf{V}_H$  в точке  $(50, 50, 0)$  расположен точечный источник, испускающий гамма-кванты в направлении  $\omega_0$ , перпендикулярном плоскости  $XY$ , с начальной энергией 1 МэВ или 0.1 МэВ. Полагаем, что вне бруска  $\mathbf{V}_H$  находится абсолютное “черное” подпространство, поглощающее выходящее гамма-излучение. Определим в качестве основных функционалов:

- вероятность  $P(\text{up})$  прохождения гамма-квантов через верхнюю площадку бруска  $\mathbf{V}_{100}$  ( $z = H = 100$  см);
- вероятность  $P(\text{down})$  вылета гамма-квантов через нижнюю площадку бруска  $\mathbf{V}_{100}$  ( $z = 0$  см).

Была использована физическая модель переноса гамма-квантов с учетом комптоновского рассеяния и поглощения в результате фотоэффекта в среде  $M$  (здесь вода или воздух). Микроскопические сечения комптоновского рассеяния и поглощения определялись из [22].

##### 4.2. Для заданных значений

$$X_{\max} = Y_{\max} = H = 100 \text{ см}, \quad p = 0.9, \quad \lambda_v = 0.00005, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.015$$

были реализованы три схемы моделирования переноса гамма-излучения через бруск  $V_{100}$ . Первое и наиболее трудоемкое прямое моделирование (Direct) случайной траектории гамма-кванта в рассматриваемой стохастически неоднородной среде для построения “бернуlliевой” несмешенной оценки осуществлялась в два этапа. Сначала строилась

реализация поля Вороного по изложенному выше рандомизированному алгоритму в области  $\mathbf{V}_{H,2L}$ , а потом для такой реализации поля моделировалась случайная траектория гамма-кванта соответственно комптоновской модели (см., например, [23]) с сечениями из [22]. Поскольку в задачах переноса гамма-излучения сечения среды и примесей зависят от энергии  $E$ , то здесь и далее мы полагаем  $\Sigma = \Sigma(E)$ . В рассматриваемой стохастической задаче переноса гамма-квантов со случайным полем плотности среды для моделирования случайной длины свободного пробега использовался метод максимального сечения, а после очередного случайного пробега проводилась проверка, в какую из ячеек попала частица. Именно на такую проверку и реализацию поля Вороного тратится существенное время прямого моделирования для каждой траектории при достаточно больших значений  $\lambda_v \geq 0.001$ .

Во второй схеме была реализована новая сеточная аппроксимация (сеточная мозаика) области. Исходный “брюсок”  $\mathbf{V}_H$  был разбит на кубики  $S_h$  так, что количество кубиков для каждой реализации составляло  $X_{\max}Y_{\max}Hh^{-3} = 0.93\lambda_vX_{\max}Y_{\max}H$ , а случайный выбор типа вещества в каждом кубике  $S_h$  независимо “разыгрывался” с вероятностью  $p$  (вода) и  $1 - p$  (воздух). Пусть  $N_V$  — это среднее число центров ячеек мозаики Вороного внутри  $\mathbf{V}_H$ . В данном случае  $X_{\max} = Y_{\max} = H = 100$  см и имеет место соответствие, представленное в таблице 1.

**Таблица 1.** Значения корреляционного радиуса  $L$ , среднего числа центров ячеек  $N_V$  мозаики Вороного и количества кубиков сеточной мозаики  $0.93\lambda_vX_{\max}Y_{\max}H$  в зависимости от  $\lambda_v$

$\lambda_v$	$L$	$N_V$	$0.93\lambda_vX_{\max}Y_{\max}H$
0.00005	12.46	168.19	46.5
0.0001	9.89	271.79	93
0.001	4.59	1658.12	930
0.01	2.13	12780.6	9300
0.015	1.86	18605.7	13950

В третьей схеме моделирования перенос гамма-квантов в среде определялся КР-алгоритмом.

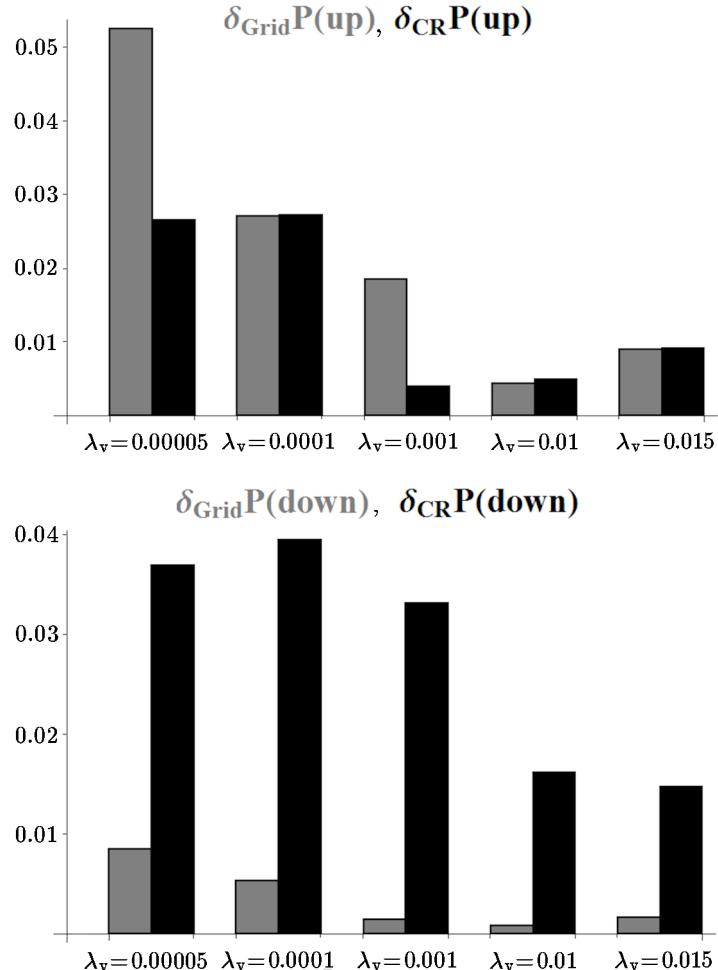
Введем следующие обозначения для относительных погрешностей  $\delta_{\text{Grid}}G(\cdot)$ ,  $\delta_{\text{CR}}G(\cdot)$  оценок функционала  $G(\cdot)$  при использовании сеточной аппроксимации и КР-алгоритма соответственно:

$$\delta_{\text{Grid}}G(\cdot) = \frac{|G_{\text{Direct}}(\cdot) - G_{\text{Grid}}(\cdot)|}{G_{\text{Direct}}(\cdot)}, \quad \delta_{\text{CR}}G(\cdot) = \frac{|G_{\text{Direct}}(\cdot) - G_{\text{CR}}(\cdot)|}{G_{\text{Direct}}(\cdot)},$$

где  $G_{\text{Direct}}(\cdot)$  — “точная” оценка, полученная для стохастической среды с мозаикой Вороного. На рисунке представлены графически значения относительных погрешностей функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$  для  $\lambda_v = 0.00005, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.015$  и начальной энергии 1 МэВ.

Для представленных оценок моделировалось  $10^8$  траекторий гамма-квантов, причем относительные среднеквадратические статистические погрешности определенных функционалов, полученные с использованием алгоритмов Direct, Grid, CR, составили менее 0.005, что дает крайне незначительную погрешность в масштабе столбцов рисунка. Серым цветом отмечены относительные погрешности функционалов, полученные с использованием сеточной мозаики (Grid), а черным — КР-алгоритмом (CR). Как видно из рисунка, при использовании сеточной аппроксимации (Grid) погрешности оценок функционала  $P(\text{down})$  меньше 1% и в 4–10 раз меньше соответствующих значений погрешностей функционала, полученных при использовании КР-алгоритма, т. е. здесь сеточная аппроксимация существенно выигрывает. С другой стороны, значения погрешностей

оценок функционалов  $P(\text{up})$ , полученных при использовании сеточной аппроксимации, несколько больше, чем у КР-алгоритма и, следовательно, алгоритм Grid несколько проигрывает по трудоемкости, согласно табл. 2. Можно также отметить, что КР-алгоритм существенно проще сеточной аппроксимации и его целесообразно использовать, например, для быстрых предварительных оценок.



**Рис.** Значения относительных погрешностей функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$ , полученные с использованием приближенных алгоритмов Grid (серый цвет), CR (черный цвет). Точечный источник с начальной энергией 1 МэВ

Были проведены также аналогичные расчеты для источника с начальной энергией 0.1 МэВ. Полученные результаты представлены в табл. 2.

**Таблица 2.** Значения относительных погрешностей оценок функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$ , полученные с использованием приближенных алгоритмов (Grid, CR, FCR) при  $L = 12.46, 9.89, 4.59, 2.13, 1.86$ . Точечный источник с начальной энергией 0.1 МэВ

$L$	$\delta_{\text{Grid}} P(\text{up})$	$\delta_{\text{CR}} P(\text{up})$	$\delta_{\text{FCR}} P(\text{up})$	$\delta_{\text{Grid}} P(\text{down})$	$\delta_{\text{CR}} P(\text{down})$	$\delta_{\text{FCR}} P(\text{down})$
12.46	0.509	<b>5.63</b>	0.078	0.023	0.021	0.078
9.89	0.285	<b>5.75</b>	0.025	0.018	0.035	0.041
4.59	0.099	0.423	0.078	0.008	0.008	0.008
2.13	0.015	0.024	0.030	0.003	0.021	0.019
1.86	0.023	0.031	0.005	0.002	0.019	0.069

При использовании сеточной аппроксимации (Grid) полученные значения относительных погрешностей оценок функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$  существенно меньше соответствующих значений относительных погрешностей функционалов, полученных при использовании КР-алгоритма. Более того, при  $\lambda_v = 0.00005$ ,  $0.0001$  значения  $\delta_{\text{Grid}}P(\text{up})$  оказались в 11–20 раз меньше соответствующих значений  $\delta_{\text{CR}}P(\text{up})$  (выделенные жирным шрифтом в табл. 2). Как и в модельной задаче из [19], это связано с существенным нарушением условия  $L < 0.4/\Sigma_{\max}(E)$  применимости КР-алгоритма в данном варианте расчетов. Поэтому для приближенной оценки функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$  здесь был также реализован ФКР-алгоритм (FCR) с корреляционной функцией (3.1). Как видно из табл. 2, при использовании ФКР-алгоритма полученные значения относительных погрешностей оценок функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$  в целом существенно меньше соответствующих значений  $\delta_{\text{CR}}P(\text{up})$ ,  $\delta_{\text{CR}}P(\text{down})$  и сопоставимы со значениями  $\delta_{\text{Grid}}P(\text{up})$ ,  $\delta_{\text{Grid}}P(\text{down})$ . Это связано с использованием в ФКР-алгоритме корреляционной функции, которая не требуется для построения сеточной аппроксимации. Интересно отметить, что в варианте с  $E_0 = 1$  МэВ для функционалов  $P(\cdot)$  при переходе от КРА к ФКРА погрешность практически не изменилась, так как здесь условие применимости КРА в основном выполнено.

Как было замечено ранее, при получении “точной” оценки для исходной стохастической среды с мозаикой Вороного существенное время моделирования траектории занимает реализация такого поля и проверка, в какую из ячеек и с какой примесью попала частица. Время реализации сеточной мозаики и определение номера прямоугольной сетки существенно меньше, а в КР-алгоритме приближенное случайное поле реализуется в каждой точке столкновения из одномерного распределения  $\rho$ . Это наглядно продемонстрировано в табл. 3, где представлено время (в минутах), затраченное на моделирование  $10^8$  траекторий гамма-квантов с использованием алгоритмов Direct, Grid, CR для оценки значений относительных погрешностей функционалов  $P(\text{up})$ ,  $P(\text{down})$ .

**Таблица 3.** Время  $t$  (мин), затраченное на моделирование  $10^8$  траекторий гамма-квантов с использованием алгоритмов Direct, CR;  $t_{\text{Grid}} \lesssim 1.1 t_{\text{CR}}$

$\lambda_v$	Начальная энергия 0.1 МэВ		Начальная энергия 1 МэВ	
	$t_{\text{Direct}}$	$t_{\text{CR}}$	$t_{\text{Direct}}$	$t_{\text{CR}}$
0.00005	30.1	3.4	40.1	5.8
0.0001	45.4	3.4	60.4	5.6
0.001	255.6	3.5	334.5	5.7
0.01	1935.4	3.4	2502.3	5.8
0.015	2791.6	3.4	3590.2	5.9

**Замечание.** В проведенных расчетах реализация сеточной мозаики была выполнена согласно п. 2.2. При такой реализации для достаточно мелкой сетки существенное время моделирования тратится на реализацию независимых случайных начальных значений  $\rho$  во всех кубиках  $S_h$ . В таком случае значительно уменьшается время моделирования путем реализации случайных значений  $\rho$  лишь в тех кубиках, которые “посещает” моделируемая частица. Расчеты показали (см. табл. 3), что время расчетов в алгоритме Grid при этом всего на 5–10 % больше соответствующих значений времени для алгоритма CR и практически ограничено при уменьшении корреляционного масштаба среды.

**4.3.** Рассмотрим теперь в качестве примера оптимизацию трудоемкости приближенной оценки  $P_{\text{Grid}}(\text{down})$  при использовании сеточной аппроксимации для источника с началь-

ной энергией 0.1 МэВ. Для  $\lambda_v = 0.001$  были проведены предварительные расчеты путем моделирования  $10^7$  траекторий для  $m = 1, 10$ , и получены из (3.2), (3.3) следующие оценки:

$$d_0 \approx 0.0052, \quad d_1 \approx 0.2297, \quad T_0 \approx 17.5156, \quad T_1 \approx 150.91, \quad m_{\text{opt}} = 17.515.$$

Поскольку полученное значение  $m_{\text{opt}}$  не является целым, то целесообразно воспользоваться несмещенной модификацией оценки  $\zeta_m$  с ветвлением траектории, в которой после реализации поля моделируется 17 или 18 траекторий ( $m = 17, 18$ ) с вероятностями 1 – 0.515 и 0.515 соответственно. Именно такое распределение числа траекторий гарантирует минимальную среднеквадратичную погрешность в классе произвольных целочисленных распределений с фиксированным средним значением 17.515 (см. [25]).

В табл. 4 представлены полученные в расчетах значения трудоемкости при  $\lambda_v = 0.001$  для оценки  $P(\text{down})$  с использованием сеточной аппроксимации при  $m = 1, 10, 17.515, 50, 100$ ; видно, что минимальное значение  $S(\zeta_m)$  составило 9.71 при  $m = m_{\text{opt}} = 17.515$ . Данные из таблиц 3 и 4 показывают, что здесь использование оценок сеточной аппроксимации (CR) сравнительно с моделированием поля Вороного (Direct) сокращает трудоемкость примерно в 40 раз.

**Таблица 4.** Значение величины трудоемкости  $S(\zeta_m)$  для  $m = 1, 10, 17.515, 50, 100$  ( $m_{\text{opt}} = 17.515$ ) для оценки  $P_{\text{Grid}}(\text{down})$ . Точечный источник с начальной энергией 0.1 МэВ

$m$	$D\zeta_m$	$T_{\zeta_m}$ (сек)	$S(\zeta_m)$
1	$2.349 \cdot 10^{-1}$	172	40.56
10	$2.818 \cdot 10^{-1}$	368	10.37
<b>17.515</b>	<b><math>1.873 \cdot 10^{-2}</math></b>	<b>518</b>	<b>9.71</b>
50	$9.799 \cdot 10^{-3}$	1218	11.94
100	$7.503 \cdot 10^{-3}$	2284	17.13

## 5. Моделирование сверхэкспоненциального роста среднего потока частиц в случайной размножающей среде

Сверхэкспоненциальный рост среднего потока частиц вначале был получен авторами для сферически симметричного случайного поля оптической плотности размножающей среды [26]. Дальнейшей целью работы является проведение аналогичных исследований для более реалистичных (см., например, [27]) однородных полей типа случайной мозаики Вороного. Для повышения эффективности численно-статистических расчетов была предложена [20] универсальная корреляционно-сеточная аппроксимация однородного изотропного поля с сохранением осредненного по реализациям корреляционного масштаба, что обеспечивает удовлетворительную оценку среднего потока для достаточно слабой корреляции. Кроме весьма существенного уменьшения трудоемкости моделирования, такая аппроксимация дает возможность исследовать флуктуации результатов, соответствующие флуктуациям среды, и выяснить возможность нормализации распределения средней скорости размножения при уменьшении корреляционного масштаба среды.

Работа [20] посвящена детальному исследованию сверхэкспоненциальной зависимости от времени среднего числа частиц, рассеивающихся и размножающихся в случайной среде. В качестве основополагающей физической модели с целью построения компьютерно-экономических алгоритмов статистического моделирования рассматривается односкоростной процесс переноса частиц. При этом скорость имеет вид  $\mathbf{v} = v\omega$ , где  $v = 1$ ,

$\omega$  — единичный вектор направления скорости. Вектор  $x = (\mathbf{r}, \omega, t)$  рассматривается в фазовом пространстве  $X = R^3 \times \Omega \times T$  координат, скоростей и времени. Рассеяние, в том числе после деления, предполагается изотропным, т. е. соответствующие индикатрисы рассеяния и деления постоянны:  $w_s = w_f = 1/(4\pi)$ .

В качестве математической модели процесса используется однородная обрывающаяся с вероятностью единица цепь Маркова, состояниями которой являются точки последовательных “столкновений частицы с элементами вещества”, т. е. точки, в которых происходят мгновенные изменения скорости частицы. Эта цепь  $x_0, x_1, \dots, x_N$  рассматривается в указанном фазовом пространстве  $X$ , т. е.  $x_n = (\mathbf{r}_n, \omega_n, t_n)$ , где  $\mathbf{r}_n$  — точка  $n$ -го столкновения,  $v\omega_n$  — скорость, а  $t_n = t_{n-1} + |\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n|/v$  — время “жизни” сталкивающейся частицы. Рассматриваемая цепь определяется плотностью  $f(x)$  распределения начального столкновения  $x_0$  и плотностью  $k(x', x)$  перехода из состояния  $x'$  в  $x$ , причем предполагается, что  $\int_X k(x', x) dx = q(x') \leq 1 - \delta$ ,  $\delta > 0$  (см. [20, 28]).

Используемая обычно в теории переноса интенсивность излучения  $\Phi(x)$  (плотность потока частиц) связана с плотностью столкновений соотношением  $\varphi(x) = \sigma(x)\Phi(x)$ , где  $\sigma(x)$  — полное сечение ослабления. Для исследования потока частиц будет изучаться функционал вида

$$J(t) = J(t, \sigma) = \int_R \int_\Omega \varphi(\mathbf{r}, \omega, t) q(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} d\omega \quad \forall f \in L_1(X), \quad q \in L_\infty(R \times \Omega). \quad (5.1)$$

При построении весовых алгоритмов метода Монте-Карло используется цепь Маркова с начальной плотностью  $f_0(x)$  и плотностью перехода  $p(x', x)$ , содержащей те же обобщенные множители, что и  $k(x', x)$ , например цепь столкновений для других значений параметров: сечение рассеяния  $\sigma_s$ , сечение деления  $\sigma_f$ , сечение поглощения  $\sigma_c$ ,  $\sigma = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c$  (см. [20]). При этом вводятся вспомогательные веса по формулам  $Q_0 = f(x_0)/f_0(x_0)$ ,  $Q_n = Q_{n-1}k(x_{n-1}, x_n)/p(x_{n-1}, x_n)$ . Если выполняются “условия несмещенностя”, то (см., например, [11, 28])  $J = E\xi$ , где  $\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n)$ . Если кроме того  $\rho(K_p) < 1$ , где  $K_p$  — оператор с ядром  $k^2(x', x)/p(x', x)$ , и  $f^2/f_0 \in L_1(X)$ , то  $D\xi < +\infty$ . Случайная величина  $\xi$  называется “оценкой по столкновениям” для функционала  $J$ .

Далее предполагается, что  $f(\mathbf{r}, \omega, -t) = 0$  при  $t > 0$  и символом  $f^{(m)}$  обозначается  $m$ -кратная производная от функции  $f$  по  $t$ , причем  $f^{(0)} \equiv f$ .

Для формулировки задачи об оценке среднего потока и соответствующих вычислительных алгоритмов в [20] даны полученные ранее в [20, 26, 29] следующие утверждения.

**Теорема 5.1** [20]. *Предполагается, что  $|f^{(m)}| \leq c_0 f_0(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ ;  $f_0$  — плотность вероятностей. Пусть точка  $(\mathbf{r}_0, \omega_0)$  распределена для  $t_0 = 0$  с плотностью  $f_0(\mathbf{r}, \omega)$ , причем  $|f^{(m)}(\mathbf{r}, \omega, t)/f_0(\mathbf{r}, \omega)| < C < +\infty$ ,  $\rho(K_p) < 1$  и выполняются условия несмещенностя [11, 28]. Тогда  $J^{(m)}(t) = E\xi^{(m)}$ , где  $\xi^{(m)} = \sum_{k=0}^N Q_k q(\mathbf{r}_k, \omega_k) f^{(m)}(\mathbf{r}_0, \omega_0, t - t_k)/f_0(\mathbf{r}_0, \omega_0)$ ,  $Q_0 = 1$ , причем  $D\xi^{(m)} < +\infty$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ .*

Эта теорема определяет основной алгоритм “по столкновениям” для оценки логарифмической производной от полного (интегрального по  $(\mathbf{r}, \omega)$ ) потока частиц, который выражается в виде (5.1) при  $q(\mathbf{r}, \omega) = I_D(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$ .

Рассмотрим теперь оценку параметра экспоненциальной временной асимптотики в теории переноса. Известно, что при выполнении довольно общих условий имеет место асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  соотношение [10]

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega, t) \sim C(\mathbf{r}, \omega) e^{\lambda t}, \quad C(\mathbf{r}, \omega) < C_0 < +\infty, \quad (5.2)$$

где  $\lambda$  — ведущее характеристическое число соответствующего однородного стационарного кинетического уравнения переноса с заменой  $\sigma_c \mapsto \sigma_c + \lambda/v$ . Эти условия, в частности, имеют место для односкоростного процесса переноса частиц в ограниченной среде с достаточно быстро убывающей по времени плотностью источника.

**Лемма 5.1.** *Если в реализуемой вспомогательной модели используется сечение поглощения  $\sigma_c(x) + \lambda_0/v$  вместо  $\sigma_c(x)$ , то текущий вес частицы в момент времени  $t$  после реализации рассеяния доминируется на величину  $\exp(\lambda_0(t - t_0))$ . При этом во вспомогательной модели значение  $\lambda$  заменяется на  $\lambda - \lambda_0$ .*

Лемма 5.1 показывает, что путем введения дополнительного поглощения для оценки величины  $\lambda > 0$  можно строить весовой процесс переноса без ветвления.

В [20] для уменьшения трудоемкости вычислений было использовано упрощение процесса переноса на основе следующего утверждения, которое следует непосредственно из вида кинетического уравнения (2.1).

**Лемма 5.2.** *Если  $w_s = w_f \equiv 1/(4\pi)$ , то  $\Phi(\mathbf{r}, \omega, t)$  не меняется при следующей замене параметров процесса переноса:  $\sigma_s \mapsto 0$ ,  $\sigma_c \mapsto 0$ ,  $\sigma_f \mapsto \sigma$ ,  $\nu \mapsto \nu' = \frac{\sigma_s + \nu\sigma_f}{\sigma}$ . Здесь  $\nu$  — среднее число частиц, образующихся в результате деления.*

Следующее утверждение фактически доказано в работе [29].

**Теорема 5.2.** *Если выполняются соотношения*

$$\int f^{(m)}(\mathbf{r}, \omega, t) e^{-\lambda t} dt < +\infty, \quad m = 0, 1,$$

соотношение (5.2) и условия теоремы 5.1, то

$$\frac{d \ln J(t)}{dt} = \frac{J'(t)}{J(t)} \rightarrow \lambda \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

## 6. Общая формулировка сверхэкспоненциального роста среднего потока частиц в случайной среде при $\sigma(\mathbf{r}, v) \leq \sigma_{\max} < +\infty$

Предполагается, что  $\sigma(\mathbf{r}, v) = \sigma\rho(\mathbf{r}, v)$  — однородное изотропное случайное поле, при чем отношения  $\sigma_s/\sigma$  и  $\sigma_f/\sigma$  фиксированы. Далее в этом пункте символом  $\sigma$  обозначается введенное таким образом случайное поле  $\sigma(\mathbf{r}, v)$ .

Как и в [26], полагаем, что  $J(t, \sigma) \sim \exp^{\lambda(\sigma)t}$  при  $t \rightarrow \infty$  для  $f_0(t) = \delta(t)$  и

$$\int_0^\infty f(t) \exp^{-\lambda(\sigma)t} dt < C_0 < +\infty.$$

Соответственно этому, предполагая гауссовость случайной величины  $\lambda(\sigma)$  и равномерность (по  $\sigma$ ) предельного перехода  $J(t, \sigma) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} C(\sigma) e^{\lambda(\sigma)t}$ , можно оценить асимптотику функции  $EJ(t, \sigma) = I(t)$  в некотором интервале ( $T_\lambda < t < T^*$ ):

$$I(t) \approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}d} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tu) \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2d^2}\right) du,$$

где  $a = E\lambda(\sigma)$ ,  $d^2 = D\lambda(\sigma)$ . При этом также предполагается, что множители  $C(\sigma)$  и  $e^{\lambda(\sigma)t}$  в асимптотике слабо коррелированы и, следовательно,  $C \approx EC(\sigma)$ . Используя интегральную формулу из [30], далее получаем

$$I(t) \approx C \exp \left( \frac{d^2}{2} t^2 + at \right). \quad (6.1)$$

Следовательно, можно предположить, что

$$\frac{d \ln I(t)}{dt} \approx d^2 t + a. \quad (6.2)$$

Определяемый формулой (6.1) закон роста среднего числа частиц можно назвать “суперэкспоненциальным”. Отметим, что формулы (6.1), (6.2) могут служить основой для численных исследований конкретных вариантов задачи при  $t < T^* < +\infty$  (см. далее п. 7). Эти исследования позволяют эвристически приближенно выделить следующие интервалы времени:

- $(0, T_\lambda)$  — доасимптотический интервал влияния начальной плотности;
- $(T_\lambda, T^*)$  — интервал суперэкспоненциальной асимптотики типа (6.1);
- $(T^*, +\infty)$  — интервал перехода к предельной асимптотике  $\ln I(t) = O(\lambda_{\max} t)$ , здесь  $\lambda_{\max} = \lambda(\sigma_{\max})$ .

Интервал  $(T_\lambda, T^*)$  был, в частности, определен для сферически слоистой случайной мозаики, которая позволила достаточно точно оценить величины  $a \approx E\lambda(\sigma)$  и  $d^2 \approx D\lambda(\sigma)$  [26]. В связи с исследованием суперэкспоненты в [20] доказана (для специальной сеточной модели  $\sigma$ ) теорема о необходимой для этого гауссовой асимптотике распределения величины  $\lambda(\sigma)$ .

Интервал  $(T^*, +\infty)$  будет определяться далее для задачи с изотропным случайным полем. Возможность реализации такого интервала показывает следующее утверждение.

**Теорема 6.1.** *Пусть для  $0 < \varepsilon < \sigma_{\max}$  с вероятностью  $p(\varepsilon) > 0$  выполняются соотношения  $\sigma \geq \sigma_{\max} - \varepsilon$  и, соответственно,  $\lambda(\sigma) \geq \lambda_{\max} - \delta(\varepsilon)$ , где  $\delta(\varepsilon) > 0$  — монотонно убывающая непрерывная функция, причем  $\delta(0) = 0$ . Тогда*

$$I(t) \sim O\left(e^{\lambda_{\max} t}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Сказанное выше и анализ результатов численного моделирования (см. далее п. 7) показывают целесообразность аппроксимации

$$\frac{d \ln I(t)}{dt} \approx \lambda_s(t) = \lambda_s(t_0) \frac{1 - \exp(-\beta t^{1-\alpha})}{1 - \exp(-\beta t_0^{1-\alpha})} \quad (6.3)$$

для некоторого  $t_0 > T_\lambda$  и  $0 < \alpha \ll 1$ . Полагая, согласно теореме 6.1,  $\lambda_s(+\infty) = \lambda_{\max}$ , получаем

$$\beta = -t_0^{\alpha-1} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_s(t_0)}{\lambda_{\max}} \right). \quad (6.4)$$

В заключение пункта укажем, что значение  $\lambda_s(t)$  вычисляется методом двойной рандомизации [28] согласно формуле

$$\lambda_s(t) = \frac{I'(t)}{I(t)} = \frac{\text{EE}(\xi^{(1)}(S, \sigma) | \sigma)}{\text{EE}(\xi^{(0)}(S, \sigma) | \sigma)} \approx \frac{\tilde{I}'(t)}{\tilde{I}(t)}, \quad (6.5)$$

где  $S$  — траектория частицы, соответствующая построенной реализации поля  $\sigma$ .

Для каждой реализации среды здесь можно строить лишь одну траекторию частицы. Отметим, что полная дисперсия оценки  $\tilde{I}'(t)/\tilde{I}(t)$  оценивается сверху стандартным способом с помощью линеаризации дроби (6.5).

## 7. Тестовая задача.

**7.1.** Для проведения тестовых расчетов рассматривался односкоростной процесс переноса частиц в шаре радиуса  $R = 7.72043$  со случайной плотностью  $\rho = \rho(\mathbf{r})$  и макроскопическими сечениями  $\rho\sigma^{(0)}, \rho\sigma_s^{(0)}, \rho\sigma_f^{(0)}$ , где  $\sigma^{(0)} = 1, \sigma_s^{(0)} = 0.97, \sigma_f^{(0)} = 0.03, \nu = 2.5, v = 1$ . Одномерное распределение поля  $\rho(\mathbf{r})$  равномерно на отрезке  $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ . При  $\rho \equiv 1$  шаг критичен:  $\lambda = 0 \pm 10^{-7}$ .

Для построения эффективных алгоритмов метода Монте-Карло в сформулированную модель было введено поглощение с постоянным неслучайным коэффициентом  $\sigma_c/v$ , который приводит к замене  $\lambda \mapsto \lambda - \sigma_c/v \forall \sigma(\mathbf{r}, v)$ , как указано в лемме 5.1. Следовательно, получаемые оценки необходимо преобразовывать по формулам:  $\tilde{I}(t) := \tilde{I}(t)e^{\sigma_c t}, d\ln \tilde{I}(t)/dt := d\ln \tilde{I}(t)/dt + \sigma_c$ .

На основе леммы 5.2 было использовано осреднение, состоящее в том, что моделировался процесс с константами  $\sigma_s^* = 0, \sigma_f^* = \rho\sigma_s + \rho\sigma_f + \sigma_c, \nu^* = 1$ , а вес в каждой точке столкновения домножался на величину

$$q^*(\rho) = \frac{\sigma_s + \nu\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/\rho} \leq \frac{\sigma_s + \nu\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/(1 + \varepsilon)} = 1$$

при  $\sigma_c = \sigma_f(\nu - 1)(1 + \varepsilon)$ .

В расчетах был использован метод максимального сечения с  $\sigma_{\max} = 1 + \varepsilon$ . Для уменьшения дисперсии оценок, основанных на соотношении (6.5), значения  $\xi^{(0)}$  и  $\xi^{(1)}$  вычислялись для всех столкновений, включая “дельта-рассеяние”, в отличие от работы [26], где они вычислялись только для “физических” столкновений.

Плотность распределения первых столкновений была взята в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = 4t \exp(-2t)g(\mathbf{r}), \quad t > 0, \quad r = |\mathbf{r}| < R,$$

где  $g(\mathbf{r}) = C \sin(\alpha r)/r$  — улучшенное диффузионное приближение к пространственной характеристической функции для  $\sigma = 1, \alpha = 0.3739866$  [31]. В (5.1) полагали также  $q(\mathbf{r}, \omega) = q_1(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r}, v)$ , где  $q_1(\mathbf{r}) = \sin(\alpha r)/r$ . При этом  $J^{(m)} = (\Phi, q_1 f^{(m)}/f_0)$ , т. е. вычисляются функционалы от потока частиц. Расчеты показали, что использование таких функциональных параметров алгоритма существенно улучшает важную здесь сходимость  $J'(t)/J(t) \rightarrow \lambda$  при  $t \rightarrow \infty \forall \rho$  сравнительно с вариантом, в котором  $q(\mathbf{r}, \omega) \equiv 1$ .

Базовый пуассоновский точечный поток для поля Вороного строился в шаре радиуса  $R_1 = 10 \approx R + L$ . Проведенные в [32] модельные расчеты показывают, что такое ограничение потока может обеспечить достаточно высокую точность оценки средней вероятности вылета частицы, которая играет определенную роль в рассматриваемой задаче.

Для сеточной модели (см. п. 3.1) трудоемкость построения конкретной траектории частицы не зависит от  $h$  и существенно меньше соответствующей трудоемкости для поля Вороного, так как не требуется “перебор” по  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  для определения  $\rho(\mathbf{r}, v)$ . Отметим, что здесь для сеточной мозаики  $L = \ell_h = 2.186$  при  $h = 4.8762$ .

В табл. 5 приведены оценки функции  $I(t)$  для вспомогательной модели и соответствующие оценки среднеквадратических погрешностей  $\delta$  для поля Вороного (при  $m = 0$ ) и сеточной аппроксимации. Здесь  $N_s$  — число траекторий.

**Таблица 5.** Значения  $\tilde{I}(t) \pm \delta$  при  $N_s = 4 \cdot 10^9$ ,  $L = 2.186$

t	поле Вороного	сеточная аппроксимация
1	$0.124241 \pm 0.000002$	$0.124242 \pm 0.000002$
5	$0.173513 \pm 0.000002$	$0.173495 \pm 0.000002$
10	$0.129121 \pm 0.000002$	$0.129093 \pm 0.000002$
15	$0.096155 \pm 0.000002$	$0.096152 \pm 0.000002$
20	$0.071678 \pm 0.000002$	$0.071699 \pm 0.000002$

Таким образом можно констатировать, что в решаемой задаче результаты, полученные на основе поля Вороного и соответствующей сеточной аппроксимации, практически совпадают, а трудоемкость для сеточной аппроксимации меньше примерно в два раза.

**7.2.** Анализ полученных результатов показывает, что здесь, как и для сферически сложной мозаики, выполняется соотношение  $20 < T^* < 40$  (см. п. 6). Для исследования асимптотики функции  $\lambda_s(t) = d \ln I(t) / dt$  расчеты были продолжены до  $t < T_1 = 150$ . В табл. 6 представлены оценки этой функции, соответствующие оценки среднеквадратической погрешности  $\delta$  (“одно сигма”), а также для сравнения значения функции

$$\tilde{\lambda}_s(t) = \tilde{\lambda}_s(t_0) \frac{1 - \exp(-\beta t^{1-\alpha})}{1 - \exp(-\beta t_0^{1-\alpha})} \quad (7.2)$$

при  $t_0 = 40$ ,  $\alpha = 0.2$ . Значение  $\beta = 0.00199$  было вычислено по формуле (6.4) для достаточно точной оценки  $\lambda_{\max} = 0.022$ , полученной с помощью дополнительного расчета при  $\sigma = \sigma_{\max}$ . Отметим что (7.2) практически не меняется при замене  $t_0 = 40$  на  $t_0 = 30$ , что подтверждает значимость такой оценки.

**Таблица 6.** Значения оценки  $\tilde{\lambda}_s(t) \pm \delta$  при  $N_s = 216 \cdot 10^9$ ,  $L = 2.186$

t	сеточная аппроксимация	$\tilde{\lambda}_s(t)$
10	$-0.000086 \pm 0.000003$	0.000276
20	$0.000390 \pm 0.000004$	0.000478
30	$0.000640 \pm 0.000005$	0.000659
40	$0.000826 \pm 0.000007$	0.000826
50	$0.000989 \pm 0.000009$	0.000984
60	$0.001129 \pm 0.000011$	0.001135
70	$0.001280 \pm 0.000014$	0.001279
80	$0.001404 \pm 0.000017$	0.001419
90	$0.001574 \pm 0.000022$	0.001554
100	$0.001696 \pm 0.000027$	0.001685
110	$0.001782 \pm 0.000035$	0.001813
120	$0.001915 \pm 0.000044$	0.001938
130	$0.002106 \pm 0.000056$	0.002060
140	$0.002085 \pm 0.000070$	0.002179
150	$0.002458 \pm 0.000089$	0.002296

## 8. Предельная теорема для распределения величины $\lambda(\sigma)$ в случае сеточной аппроксимации

Рассмотрим теперь возможность обоснования предельного гауссовского распределения величины  $\lambda$  для сеточной модели поля  $\sigma$  в рассматриваемой задаче. Обозначим через  $N = N_h$  число элементов сетки (кубиков), полностью или частично принадлежащих области  $\mathbf{D}$  объема  $V$ . Предполагается, что при  $h \rightarrow 0$  выполняется соотношение (в частности для куба, цилиндра, шара)  $N_h = n_h + o(n_h)$ , где  $n_h$  — размер вписанной в  $\mathbf{D}$  части сетки. Рассмотрим равенство  $\lambda = \lambda_N(\tau_1, \dots, \tau_N)$ , причем  $\tau_i = v_i(\sigma_{h,i} - 1)$ , где  $v_i$  — “действующий” объем в  $\mathbf{D}$  сеточного элемента (в основном,  $v_i = h^3 \sim V/n_h$ ), а  $\sigma_{h,i}$  — независимые значения поля  $\sigma$ , равномерно распределенные в  $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ , причем  $D\tau_i \sim (1/3)\varepsilon^2 V^2/n_h^2$ .

Далее с учетом проведенных ранее тестовых расчетов для сферической мозаики предполагается, что

$$\left| \frac{\partial^2 \lambda_N}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right| \leq C_1 < +\infty \quad \text{и} \quad 0 < C_0^{(1)} < \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_i} < C_0^{(2)}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (8.1)$$

**Теорема 8.1.** *Пусть выполняются соотношения (8.1) и  $\lambda_N(0, 0, \dots, 0) = 0 \forall N$ . Тогда, если  $n = n_h \rightarrow \infty$ , а  $\varepsilon\sqrt{n} \rightarrow 0$ , то величина  $\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon} C^{-1} \lambda$  сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.*

Интересно отметить, что эта теорема согласуется с результатами работы [27], в которой нормализация распределения  $\lambda$  была получена на основе численных экспериментов для малой величины типа  $D\tau$ . Фактически это же показали расчеты для модельной сферически слоистой мозаики [26].

## 9. Заключение

Сделаем ряд замечаний о сформулированных аппроксимациях. Ясно, что аппроксирующий процесс переноса КР-алгоритм реализует значительно проще, чем сеточный, так как не требует моделирования случайной среды и двойной рандомизации, которую в некоторых случаях целесообразно оптимизировать. Этот алгоритм сравнительно эффективен при существенно анизотропном рассеянии, например оптическом излучении в облаках. С другой стороны, сеточная аппроксимация является более универсальной и точной при существенном влиянии изотропии рассеяния, как, например, в задачах о переносе гамма-квантов низкой энергии, особенно для оценки альбедо. Особо следует отметить, что сеточную модель можно реализовать без использования “метода максимального сечения” и таким образом решать стохастические задачи переноса с неограниченными коэффициентами ослабления. Трудоемкость обоих алгоритмов ограничена, и они, таким образом, позволяют устанавливать справедливость “стохастического предела”, состоящего в том, что при  $L \rightarrow 0$  средние значения функционалов сходятся к их значениям для осредненной среды. Простые соображения также показывают, что аппроксимацию неоднородного случайного поля можно построить, проведя предварительные расчеты по аналогии с п. 3.1. для параллелепипеда с ребрами  $L_x, L_y, L_z$  вместо единичного кубика.

## Литература

1. **Глазов Г.Н., Титов Г.А.** Статистические характеристики коэффициента ослабления в разорванной облачности. I. Модель с шарами одинакового радиуса // Вопросы лазерного зондирования атмосферы. — Новосибирск, 1976. — С. 126–139.
2. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic press inc., 1982.
3. **Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A.** Monte Carlo particle transport in random media: the effects of mixing statistics // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. — 2017. — Vol. 196. — P. 270–286.
4. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 213–232.
5. **Switzer P.** A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist. — 1965. — Vol. 36. — P. 1859–1863.
6. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** New algorithms of numerical-statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2014. — Vol. 29, № 6. — P. 331–339.
7. **Gilbert E.N.** Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist. — 1962. — Vol. 33. — P. 958–972.
8. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей / Г.А. Михайлов. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.
9. **Ambos A.Yu.** Numerical models of mosaic homogeneous isotropic random fields and corresponding problems of radiative transfer // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 1. — P. 12–23.
10. **Дэвисон Б.** Теория переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1960.
11. **Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.** Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976. Перевод: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazareliev M.A. et al. The Monte Carlo methods in Atmospheric Optics. — Springer-Verlag, 1980.
12. **Спанье Дж., Гелбард З.** Метод Монте-Карло и задачи теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1972.
13. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // J. Nucl. Sci. Engineering. — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
14. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., Longworth S.** Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. — 1965. — P. 557–557.
15. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // Докл. РАН. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
16. **Михайлов Г.А.** Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод “двойной рандомизации”) // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 2. — С. 187–200.
17. **Михайлов Г.А., Медведев И.Н.** Новый корреляционно рандомизированный алгоритм оценки влияния стохастичности среды на перенос частиц // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 498, № 1. — С. 55–58.
18. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Numerically statistical simulation of the intensity field of the radiation transmitted through a random medium // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2018. — Vol. 33, № 3. — P. 161–171.

19. **Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** New correlative randomized algorithms for statistical modelling of radiation transfer in stochastic medium // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2021. — Vol. 36, № 4. — P. 219–225.
20. **Лотова Г.З., Михайлов Г.А.** Исследование сверхэкспоненциального роста среднего потока частиц в случайной размножающей среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 4. — С. 401–413. Перевод: Lotova G.Z., Mikhailov G.A. Investigation of overexponential growth of mean particle flux with multiplication in random medium // Numer. Analys. Appl. — 2023. — Vol. 16, № 4. — P. 337–347. — DOI: 10.1134/S1995423923040055.
21. **Амбос А.Ю.** Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 19–32.
22. **Сторм Э., Исаэль Х.** Сечения взаимодействия гамма-излучения (для энергий 0,001–100 МэВ и элементов с 1 по 100). — М.: Атомиздат, 1973.
23. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М: Наука, 1982.
24. **Фано У., Спенсер Л., Бергер М.** Перенос гамма-излучения. — М.: Госатомиздат, 1963.
25. **Бредихин С.А., Медведев И.Н., Михайлов Г.А.** Оценка параметров критичности ветвящихся процессов методом Монте-Карло // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 362–374.
26. **Лотова Г.З., Михайлов Г.А.** Численно-статистическое и аналитическое исследование асимптотики среднего потока частиц с размножением в случайной среде // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 8. — С. 1353–1362. — DOI: 10.31857/S0044466921060077. Перевод: Lotova G.Z., Mikhailov G.A. Numerical-statistical and analytical study of asymptotics for the average multiplication particle flow in a random medium // Comput. Math. and Math. Phys. — 2021. — Vol. 61. — P. 1330–1338. — DOI: 10.1134/S09655542521060075.
27. **Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A.** Neutron multiplication in random media: reactivity and kinetics parameters // Annals of Nuclear Energy. — 2018. — Vol. 111. — P. 391–406. — DOI: 10.1016/j.anucene.2017.09.006.
28. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учеб. пособие для студ. вузов. — М: Изд. центр “Академия”, 2006.
29. **Лотова Г.З., Михайлов Г.А.** Новые методы Монте-Карло для оценки временных зависимостей в процессе переноса излучения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2002. — Т. 42, № 4. — С. 570–580. Перевод: Lotova G.Z., Mikhailov G.A. New Monte Carlo methods for estimating time dependences in radiative transfer process // Comput. Math. and Math. Phys. — 2002. — Vol. 42, № 4. — P. 544–554.
30. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.
31. **Романов Ю.А.** Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Исследование критических параметров реакторных систем. — М.: Госатомиздат, 1960. — С. 3–26.
32. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Solution of radiative transfer theory problems for “realistic” models of random media using the Monte Carlo method // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2016. — Vol. 31, № 3. — P. 1–10. — DOI: 10.1515/rnam-2016-0013.

Поступила в редакцию 27 ноября 2023 г.

После исправления 27 декабря 2023 г.

Принята к печати 4 марта 2024 г.

## Литература в транслитерации

1. **Glazov G.N., Titov G.A.** Statisticheskie kharakteristiki koefficienta oslableniya v razorvannoj oblastnosti. I. Model's sharami odinakovogo radiusa // Voprosy lazernogo zondirovaniya atmosfery. — Novosibirsk, 1976. — S. 126–139.
2. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic press inc., 1982.
3. **Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A.** Monte Carlo particle transport in random media: the effects of mixing statistics // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. — 2017. — Vol. 196. — P. 270–286.
4. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 213–232.
5. **Switzer P.** A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist. — 1965. — Vol. 36. — P. 1859–1863.
6. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** New algorithms of numerical-statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2014. — Vol. 29, № 6. — P. 331–339.
7. **Gilbert E.N.** Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist. — 1962. — Vol. 33. — P. 958–972.
8. **Prigarin S.M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchainykh processov i polei / G.A. Mikhailov. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2005.
9. **Ambos A.Yu.** Numerical models of mosaic homogeneous isotropic random fields and corresponding problems of radiative transfer // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 1. — P. 12–23.
10. **Devison B.** Teoriya perenosa neitronov. — M.: Atomizdat, 1960.
11. **Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A. i dr.** Metod Monte-Karlo v atmosfernoi optike. — Novosibirsk: Nauka, 1976. Perevod: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazareliev M.A. et al. The Monte Carlo methods in Atmospheric Optics. — Springer-Verlag, 1980.
12. **Span'e Dzh., Gelbard Z.** Metod Monte-Karlo i zadachi teorii perenosa neitronov. — M.: Atomizdat, 1972.
13. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // J. Nucl. Sci. Engineering. — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
14. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., Longworth S.** Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. — 1965. — P. 557–557.
15. **Mikhailov G.A., Averina T.A.** Algoritm "maksimal'nogo secheniya" v metode Monte-Karlo // Dokl. RAN. — 2009. — T. 428, № 2. — S. 163–165.
16. **Mikhailov G.A.** Randomizirovannye algoritmy metoda Monte-Karlo dlya zadach so sluchainymi parametrami (metod "dvoinoi randomizacii") // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otdnie. — Novosibirsk, 2019. — T. 22, № 2. — S. 187–200.
17. **Mikhailov G.A., Medvedev I.N.** Novyi korrelyacionno randomizirovannyi algoritm ocenki vliyaniya stokhastichnosti sredy na perenos chastic // Dokl. RAN. Matematika, informatika, processy upravleniya. — 2021. — T. 498, № 1. — S. 55–58.
18. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Numerically statistical simulation of the intensity field of the radiation transmitted through a random medium // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2018. — Vol. 33, № 3. — P. 161–171.

19. **Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** New correlative randomized algorithms for statistical modelling of radiation transfer in stochastic medium // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2021. — Vol. 36, № 4. — P. 219–225.
20. **Lotova G.Z., Mikhailov G.A.** Issledovanie sverkhexponential'nogo rosta srednego potoka chastic v sluchainoi razmnozhayushchei srede // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2023. — T. 26, № 4. — S. 401–413. Perevod: Lotova G.Z., Mikhailov G.A. Investigation of overexponential growth of mean particle flux with multiplication in random medium // Numer. Analys. Appl. — 2023. — Vol. 16, № 4. — P. 337–347. — DOI: 10.1134/S1995423923040055.
21. **Ambos A.Yu.** Vychislitel'nye modeli mozaichnykh odnorodnykh izotropnykh sluchainykh polei i zadachi perenosu izlucheniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — T. 19, № 1. — S. 19–32.
22. **Storm E., Israel' Kh.** Secheniya vzaimodeistviya gamma-izlucheniya (dlya energii 0,001–100 MeV i elementov s 1 po 100). — M.: Atomizdat, 1973.
23. **Ermakov S.M., Mikhailov G.A.** Statisticheskoe modelirovaniye. — M: Nauka, 1982.
24. **Fano U., Spenser L., Berger M.** Perenos gamma-izlucheniya. — M.: Gosatomizdat, 1963.
25. **Bredikhin S.A., Medvedev I.N., Mikhailov G.A.** Ocenka parametrov kritichnosti vetyashchikhsya processov metodom Monte-Karla // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — T. 50, № 2. — S. 362–374.
26. **Lotova G.Z., Mikhailov G.A.** Chislenno-statisticheskoe i analiticheskoe issledovanie asimptotiki srednego potoka chastic s razmnozheniem v sluchainoi srede // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2021. — T. 61, № 8. — S. 1353–1362. — DOI: 10.31857/S0044466921060077. Perevod: Lotova G.Z., Mikhailov G.A. Numerical-statistical and analytical study of asymptotics for the average multiplication particle flow in a random medium // Comput. Math. and Math. Phys. — 2021. — Vol. 61. — P. 1330–1338. — DOI: 10.1134/S0965542521060075.
27. **Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A.** Neutron multiplication in random media: reactivity and kinetics parameters // Annals of Nuclear Energy. — 2018. — Vol. 111. — P. 391–406. — DOI: 10.1016/j.anucene.2017.09.006.
28. **Mikhailov G.A., Voitishek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovaniye. Metody Monte-Karla: ucheb. posobie dlya stud. vuzov. — M: Izd. centr “Akademiya”, 2006.
29. **Lotova G.Z., Mikhailov G.A.** Novye metody Monte-Karla dlya ocenki vremennykh zavisimostei v processe perenosu izlucheniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2002. — T. 42, № 4. — S. 570–580. Perevod: Lotova G.Z., Mikhailov G.A. New Monte Carlo methods for estimating time dependences in radiative transfer process // Comput. Math. and Math. Phys. — 2002. — Vol. 42, № 4. — P. 544–554.
30. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** Integraly i ryady. — M.: Nauka, 1981.
31. **Romanov Yu.A.** Tochnye resheniya odnoskorostnogo kineticheskogo uravneniya i ikh ispol'zovanie dlya rascheta diffuzionnykh zadach (usovershenstvovannyi diffuzionnyi metod) // Issledovanie kriticheskikh parametrov reaktornykh sistem. — M.: Gosatomizdat, 1960. — S. 3–26.
32. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Solution of radiative transfer theory problems for “realistic” models of random media using the Monte Carlo method // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2016. — Vol. 31, № 3. — P. 1–10. — DOI: 10.1515/rnam-2016-0013.

