21. **Багаев Г. И., Лебига В. А., Приданов В. Г., Черных В. В.** Сверхзвуковая аэродинамическая труба Т-325 с пониженной степенью турбулентности // Аэрофизические исследования.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1972.
22. **Багаев Г. И., Лебига В. А., Харитонов А. М.** Излучение звука сверхзвуковым пограничным слоем // Симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1975.
23. **Григорьев В. Д., Клеменков Г. П., Омелаев А. И., Харитонов А. М.** Гиперзвуковая аэродинамическая труба Т-326 // Аэрофизические исследования.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1972.
24. **Гапонов С. А., Лысенко В. И.** Развитие возмущений вблизи поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком // ПМТФ.— 1988.— № 6.
25. **Лысенко В. И., Маслов А. А.** Переход ламинарного сверхзвукового пограничного слоя в турбулентный при охлаждении поверхности // ПМТФ.— 1981.— № 3.
26. **Приданов В. Г., Черных В. В.** Экспериментальное исследование влияния притупления передней кромки плоской пластины на переход в пограничном слое // Газодинамика и физическая кинетика.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1974.
27. **Stetson K. F., Rushton G. H.** Shock tunnel investigation of boundary layer transition at M = 5,5 // AIAA J.— 1967.— V. 5, N 5.
28. **Martellucci A., Maquire B. L., Neff R. S.** Analysis of flight test transition and turbulent heating data. Pt 1. Boundary layer transition results: Final Rept.— S. l., 1972.— (CR/NACA; N 129045).
29. **Softley E. J., Graber B. C., Zempel R. E.** Experimental observation of transition of the hypersonic boundary layer // AIAA J.— 1969.— V. 7, N 2.
30. **Лысенко В. И., Маслов А. А.** Влияние охлаждения на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя.— Новосибирск, 1981.— (Препр./ИТПМ СО АН СССР; № 31).
31. **Lysenko V. I., Maslov A. A.** The effect of cooling on supersonic boundary-layer stability // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 147, N 10.
32. **Косинов А. Д., Маслов А. А., Шевельков С. Г.** Экспериментальное исследование влияния притупления передней кромки плоской пластины на развитие трехмерных волн в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ.— 1987.— № 2.

г. Новосибирск *Поступила 18/V 1989 г.*

УДК 532.529.5

В. А. Антипин, А. А. Борисов, А. П. Трунев

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В СВОБОДНЫХ ЗАСЫПКАХ В РЕЖИМАХ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА ПРИ ВНЕЗАПНОМ СБРОСЕ ДАВЛЕНИЯ

Волны разрежения (ВР) в засыпках исследовались в работах [1, 2], где были установлены некоторые закономерности по влиянию давления в газовой фазе и размеров частиц на скорость и форму ВР. Ниже приведены данные по распространению промодулированных ВР в свободных засыпках различного состава. Обнаружены общие закономерности поведения возмущений в зависимости от начальных параметров сред: в засыпках любого состава с ростом начального давления коэффициент затухания возмущений монотонно возрастает; при увеличении размера зерна и фиксированном давлении коэффициент затухания растет в диапазоне 7÷50 мкм и убывает в области размеров 100÷1000 мкм. Развита модель явления, основанная на разложении известных уравнений динамики многофазных сред [3, 4] вблизи равновесного состояния по параметру, равному отношению плотности газа к плотности твердой фазы. В рамках предложенной модели получены зависимости коэффициента затухания от параметров задачи, которые согласуются с экспериментальными результатами.

1. Экспериментальная методика и результаты. Эксперименты проводились в вертикальной ударной трубе диаметром 0,06 м и длиной 1,8 м, включающей камеру высокого давления (КВД) и камеру низкого давления (КНД) длиной 0,9 м. Общая схема установки показана на рис. 1: *1* — КНД, *2* — КВД, *3* — измерительные датчики, *4* — запускающий датчик, *5* — вентиль магистрали сжатого воздуха, *6* — манометр, *7* — блок усилителей, *8* — ЭВМ, *9* — уровень засыпки (поршень), *10* — диафрагма. В КВД на расстояниях 0,36; 0,54; 0,72 м от нижнего фланца были установлены пьезоэлектрические датчики давления оригинальной

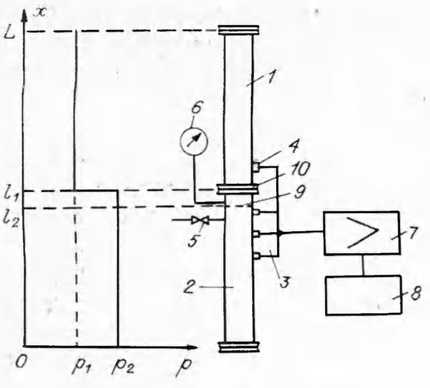

Рис. 1

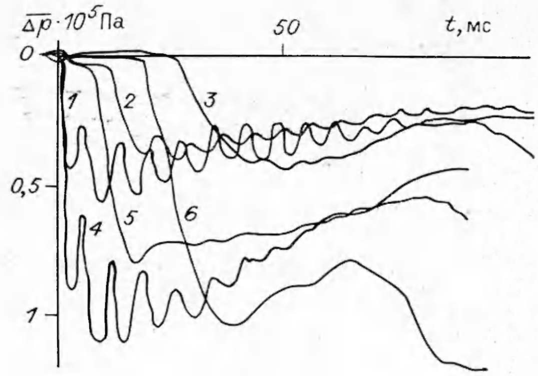

Рис. 2

конструкции (аналог ЛХ601) с полосой пропускания $1 \div 10^5$ Гц (постоянная времени 0,5 с). Датчики крепились заподлицо со стенкой рабочего канала, сигнал с датчиков поступал на усилитель, а затем через АЦП на микроЭВМ «Электроника-60». По условиям проведения экспериментов между верхним слоем засыпки и мембраной сохранялся воздушный зазор толщиной 0,15 м. В качестве засыпки использовались материалы, приведенные в табл. 1. Давление в КНД равнялось атмосферному, а в КВД изменялось от 0,11 до 0,26 МПа.

Полученные осциллограммы давления в цементе и в γ-окиси алюминия приведены на рис. 2, 3 ($\overline{\Delta p} = p - p_0$, p_0 — начальное давление).

Кривыми *1—3* (*4—6*) на рис. 2 представлены зависимости давления в цементе при начальном избыточном давлении в КВД $\overline{\Delta p} = 0{,}04$ (0,09) МПа на расстояниях $\Delta x = 0{,}72$; 0,54; 0,36 м от нижнего фланца соответственно. Поясним характер указанных кривых. После разрыва диафрагмы в КНД формируется импульс давления с крутым передним фронтом (ударная волна) и пологим задним. Ввиду значительной плотности двухфазной смеси характерное время проникновения ВР в засыпку значительно превосходит время прохождения ударного импульса по КНД. За счет переотражения ударного импульса от контактной границы газ — двухфазная смесь кривая спада давления возмущается почти по гармоническому закону с периодом $T_0 = 2L_1/c_s$, L_1 — длина КНД, c_s — скорость ударного импульса (кривые *1*, *4* на рис. 2). По мере проникновения в двухфазную смесь фронт волны разрежения выполаживается, и в то же время убывает амплитуда возмущений (кривые *2*, *3*, *5*, *6*).

Аналогичная картина наблюдается и при распространении ВР в γ-окиси алюминия ($d \approx 50$ мкм). Кривые *1—3* (*4—6*) на рис. 3 получены при $\overline{\Delta p} = 0{,}03$ (0,05) МПа, но в этом случае уже при самом низком перепаде давления ($\sim 0{,}01$ МПа) возмущения не проникают в засыпку (в цементе возмущения проникают на всю глубину и при $\overline{\Delta p} = 0{,}06$ МПа). Установлено, что коэффициент затухания возмущений $\varkappa = \ln |A(x_1)/A(x_2)|/ /|x_1 - x_2|$ (A — амплитуда возмущений) монотонно возрастает с ростом

Таблица 1

Материал	ρ, кг/м³	ε	d, мкм	c_e, м/с	D_0, м²/с
Окись алюминия:					
мелкая	1188	0,7	50	10,97	0,34
крупная *	732	0,65	2500	—	166
Цемент	985	0,56	7	12,1	0,0027

* Гранулы сферической формы получены методом спекания.

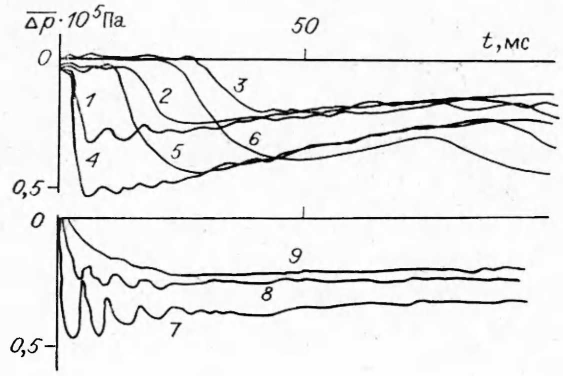

Рис. 3

давления в засыпках любого состава. Это видно, например, из сравнения данных на рис. 2, 3.

Характерной особенностью волн разрежения в мелкодисперсных засыпках ($d \leqslant \leqslant 10^{-4}$ м) является низкая скорость их распространения. Как показано ниже, в равновесном (по скоростям фаз) случае скорость волн зависит от давления и плотности смеси по формуле

(1.1) $$c_e = \sqrt{p/\varepsilon\rho_c},$$

где ε — порозность. Таким образом, при нормальных условиях в цементе $c_e = 12{,}1$ м/с. Выражение (1.1) хорошо согласуется с экспериментальными результатами [2].

На рис. 4 сплошной линией представлена зависимость (1.1), *1*, *2* — данные для цемента и γ-окиси алюминия ($d \approx 50$ мкм) соответственно. Результаты [1], полученные в засыпке с диаметром зерна ~ 14 мкм, лежат несколько выше, что, на наш взгляд, объясняется малой длительностью импульса давления (~ 3 мс), скорость которого могла отличаться от равновесной. С увеличением размера частиц в диапазоне от 7 до 50 мкм $\varkappa$ также возрастает, но эта закономерность неожиданно нарушается при переходе к крупнодисперсным засыпкам. На рис. 3 (кривые *7—9*) даны осциллограммы давления при распространении модулированных ВР в засыпке с размером зерна $d \approx 2500$ мкм (γ-окись алюминия, полученная методом спекания), начальный перепад давлений $\overline{\Delta p} = 0{,}04$ МПа. Ниже показано, что процесс разрежения засыпки в этом случае близок к диффузионному, это хорошо видно из сравнения указанных кривых. В масштабе длительности процесса запаздывание сигналов с заглубленных датчиков (*8*, *9*) незначительно по отношению к верхнему датчику (*7*), возмущения давления почти одновременно проникают на всю глубину засыпки. Сопоставляя данные на рис. 2, 3, видим, что $\varkappa$ в γ-окиси алюминия при $d \approx 2500$ мкм значительно ниже, чем при $d \approx 50$ мкм, и сравним по величине с $\varkappa$ в цементе.

2. Вывод уравнений модели. При моделировании волн разрежения в засыпках будем исходить из динамических уравнений двухфазной среды [3, 4]. В изотермическом приближении

(2.1)
$$\rho_1 d_1\mathbf{u}_1/dt + \varepsilon\nabla p = \varphi_{12}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \rho_1\mathbf{g},$$
$$\rho_2 d_2\mathbf{u}_2/dt + \rho_2 d_1\mathbf{u}_1/dt + \nabla p = (\rho_1 + \rho_2)\mathbf{g},$$
$$d_1\rho_1/dt = -\rho_1 \operatorname{div}\mathbf{u}_1,\ d_2\rho_2/dt = -\rho_2\operatorname{div}\mathbf{u}_2.$$

Здесь $\mathbf{u}_{1,2}$, $\rho_{1,2}$ — скорости и плотности газовой и твердой фаз; $d_1/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}_1\cdot\nabla)$, $d_2/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}_2\cdot\nabla)$; φ_{12} — параметр межфазного силового взаимодействия; $\mathbf{g}$ — вектор массовых сил.

Система уравнений (2.1) замыкается соотношениями изотермичности течения, сплошности газовой среды и несжимаемости материала частиц

(2.2) $$p = \rho_g RT,\ T = \text{const};\ \rho_1 = \varepsilon\rho_g;\ \rho_2 = (1-\varepsilon)\rho_s,\ \rho_s = \text{const}$$

(ρ_g — истинная плотность газа, ρ_s — плотность материала частиц, R — газовая постоянная).

Рассмотрим случай слабонеравновесной по скоростям фаз концентрированной газовзвеси, для которой справедливы оценки

(2.3) $$\rho_2 \gg \rho_1,\quad \left|\frac{d_1\mathbf{u}_1}{dt}\right| \sim \left|\frac{d_2\mathbf{u}_2}{dt}\right|.$$

Отметим, что указанные соотношения могут не выполняться вблизи границы раздела газ — засыпка, а также для процессов малой длительности, как в опытах [1]. Далее предположим, что граница раздела представляет собой легкий жесткий поршень малой толщины, а длительность импульса давления достаточно велика. (Часть экспериментов, описанных выше, проводилась специально для выяснения влияния поршня на динамику процесса. Однако не было установлено существенных различий полученных зависимостей давления с результатами на рис. 2, 3.) Применяя оценку порядка величин (2.3) ко второму уравнению системы (2.1), находим

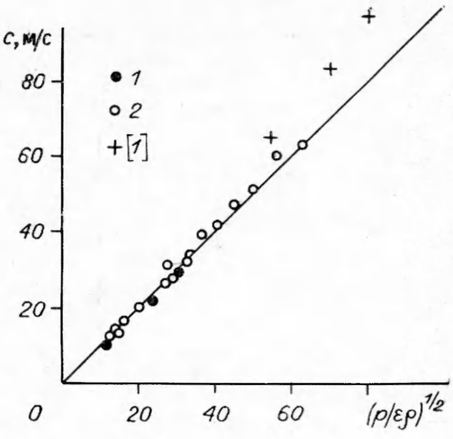

Рис. 4

$$\frac{d_2\mathbf{u}_2}{dt} \approx \left|\frac{\nabla p}{\rho_2}\right|.$$

Отсюда и из первого уравнения (2.1) следует, что при условиях (2.3) течение газовой среды с точностью до членов порядка $\rho_1/\rho_2 \ll 1$ удовлетворяет уравнению фильтрации

$$\varepsilon\nabla p = \varphi_{12}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1). \tag{2.4}$$

Предположим, что коэффициент межфазного взаимодействия при данных параметрах потока не зависит явно от скоростей фаз. Тогда, разрешая уравнение (2.4), запишем $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \varepsilon\nabla p/\varphi_{12}$. Используя этот результат и замыкающие соотношения (2.2), преобразуем уравнения гетерогенной модели [3]

$$\rho_2 d\mathbf{u}_2/dt + \nabla p = \rho_2\mathbf{g},\ \partial\rho_2/\partial t + (\mathbf{u}_2\cdot\nabla)\rho_2 = -\rho_2 \operatorname{div}\mathbf{u}_2, \tag{2.5}$$
$$\partial\rho_g/\partial t + (\mathbf{u}_2\cdot\nabla)\rho_g = -(\rho_g/\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{u}_2 + (1/\varepsilon)\operatorname{div}(\varepsilon D_0\nabla p)$$

($D_0 = \varepsilon p/\varphi_{12}$ — эффективный коэффициент диффузии газовой фазы в гетерогенной среде). Используя гипотезу изотермичности течения, представим последнее уравнение системы (2.5) в виде

$$\partial p/\partial t + (\mathbf{u}_2\cdot\nabla)p = -(p/\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{u}_2 + (1/\varepsilon)\operatorname{div}(\varepsilon D_0\nabla p). \tag{2.6}$$

Следовательно, в изотермических засыпках в условиях, близких к равновесным, давление в среде подчиняется закону конвективной диффузии, а средняя скорость газа относительно частиц совпадает со скоростью фильтрации. Выясним величину D_0 и его зависимость от параметров течения. Известные результаты по межфазному трению в зернистых слоях [4], засыпках [5], запыленных потоках [6] и в насыщенных грунтах [7] в линейном по относительной скорости фаз приближении можно представить как

$$\varphi_{12} = \mu\varepsilon f(\varepsilon)/d^2 \tag{2.7}$$

(μ — динамическая вязкость газа, $f(\varepsilon)$— некоторая функция). Указанное линейное приближение соответствует закону Дарси фильтрации газа. Коэффициент диффузии в (2.5) с учетом (2.7) имеет вид

$$D_0 = pd^2/\mu f(\varepsilon). \tag{2.8}$$

Обращает на себя внимание зависимость D_0 от размера частиц и обратная пропорциональность вязкости газа. Зависимости коэффициента межфазного трения (2.7) от порозности среды или от объемного содержания газа сильно различаются между собой по данным различных авторов. Соответствующие выражения вместе с частными значениями с указанием источников сведены в табл. 2, где τ — объемное содержание твердой фазы, $\tau = 1 - \varepsilon$.

Таблица 2

$f(\varepsilon)$	Источник	ε					
		0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,95
		$f(\varepsilon)$					
633τ	[4]	443,1	380	316,5	253,2	190	31,65
$150\tau^2/\varepsilon^2$	[4]	816,7	337,5	150	66,7	27,6	0,42
$180\tau^2/\varepsilon^2$	[7]	980	405	180	80	33,1	0,5
$58{,}7\tau/\varepsilon^{2,5}$	[5]	833,6	348	166	84,2	43	3,34
$24\tau/\varepsilon^{3,7}$	[6]	1445	427,5	156	63,5	27	1,45

Из табл. 2 для воздуха при нормальных условиях в засыпке со среднеквадратичным размером зерна $d \approx 5\cdot 10^{-5}$ м находим $D_0 \approx \approx 14{,}7/f(\varepsilon)$ м²/с. При $\varepsilon = 0{,}5$ в соответствии с [4] $D_0 = 0{,}046$ м²/с, а при $\varepsilon = 0{,}7$ в соответствии с [5] $D_0 = 0{,}34$ м²/с. Не вдаваясь в подробности при обсуждении приведенных зависимостей, скажем лишь, что данные [4] лучше всего приближают $f(\varepsilon)$ при малых $\varepsilon \leqslant 0{,}4$, а данные [6] — при больших $\varepsilon \geqslant 0{,}95$. Область применимости всех других результатов в табл. 2 занимает промежуточное положение между этими двумя.

Отметим, что постулированное выше свойство изотермичности процесса связано с условиями проведения экспериментов. До начала опыта градиенты температуры по высоте засыпки отсутствовали. В процессе разрежения газ, вообще говоря, охлаждается, но ввиду малости числа Маха потока ($M_0 \approx c_e/c_s$, c_s — скорость звука в чистом газе) изменение температуры столь мало, что не регистрируется обычной платиновой термопарой. Кроме того, при сравнимых удельных теплоемкостях газ имеет весьма малую плотность в сравнении с дисперсной фазой, которая в этом случае выступает как термостат. Можно показать, что с точностью до членов порядка ρ_1/ρ_2 температуры газа и частиц в данном процессе связаны соотношением

$$T_1 = T_2 + (\varphi_{12}/\Psi_{12})(u_1 - u_2)^2,$$

где Ψ_{12} — параметр межфазного теплообмена. Используя уравнение (2.4) и оценку для максимального градиента давления в виде $|\nabla p| \sim p\varphi_{12}/c_e$, находим оценку относительного изменения температуры газа

$$\delta T/T \simeq R\varphi_{12}\varepsilon^4 c_e^2/\Psi_{12}c_s^2 \leqslant M_0^2.$$

В цементе и в мелкодисперсной окиси алюминия $\delta T/T \sim 10^{-3}$, что сравнимо с погрешностью модели (2.5), имеющей тот же порядок $\rho_1/\rho_2 \sim 10^{-3}$.

3. Равновесная модель. Рассмотрим предельную форму уравнений модели (2.5) при $d \to 0$. Этот случай отвечает полностью равновесному изотермическому течению смеси. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\text{(3.1)}\qquad \rho_2 d_2\mathbf{u}_2/dt + \nabla p = \rho_2\mathbf{g},\ d_2\rho_2/dt = -\rho_2\operatorname{div}\mathbf{u}_2,$$
$$d_2p/dt = -(p/\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{u}_2.$$

Здесь можно приближенно считать $\varepsilon = 1 - \rho_2/\rho_s$. При баротропных движениях, полагая $p = f(\rho_2)$, находим из двух последних уравнений

$$\text{(3.2)}\qquad dp/d\rho_2 = p/(\varepsilon\rho_2),$$

что с точностью до членов порядка ρ_1/ρ_2 совпадает с квадратом равновесной скорости звука (см. табл. 1). Отметим, что для крупнодисперсных засыпок понятие равновесной скорости звука утрачивает всякий смысл, как будет видно из дальнейшего.

В рамках модели (3.1) рассмотрена следующая **задача о поршне**: в трубе длиной L и сечением S объем $0 \leqslant x \leqslant l_1$ занимает смесь с заданными значениями ε, ρ_2, а объем $l_1 < x \leqslant L$ — идеальный газ с показателем адиабаты γ; в сечении $x = l_1$ находится тонкий поршень массы m;

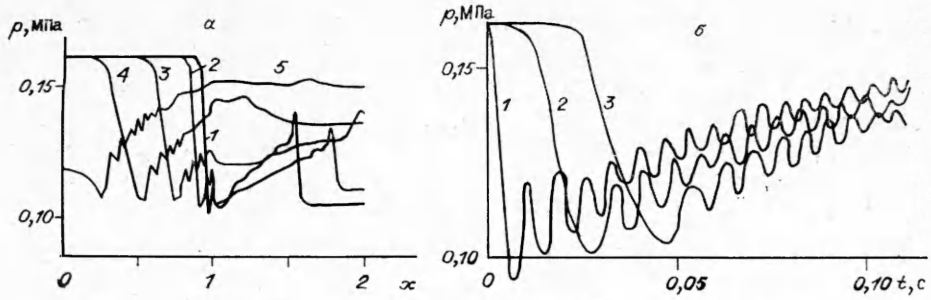

Рис. 5

в начальный момент времени задан разрыв давления в виде

$$p=\begin{cases}p_2 & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant l_2,\quad l_1<l_2<L,\\ p_1 & \text{при}\quad l_2<x\leqslant L,\quad p_1<p_2.\end{cases}$$

Температура по всей длине трубы при $t = 0$ постоянна и равна T_0. Определить состояние системы при $t > 0$.

Газодинамическая часть задачи решалась методом Лакса — Вендрофа в рамках модели идеального газа. Параметры смеси рассчитывались по той же схеме по (3.1) применительно к одноразмерному нестационарному течению. Система координат выбрана, как на рис. 1, где показана эпюра начального давления. На поршне численные решения согласовывались с его динамикой в форме уравнения

$$(p_2 - p_1)S = m\ddot{x}_0 \text{ при } x = x_0(t) \tag{3.3}$$

и замыкались условиями непротекания газа и смеси

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \dot{x}_0 \text{ при } x = x_0(t),\ \mathbf{u}_1(L, t) = \mathbf{u}_2(0, t) = 0, \tag{3.4}$$

где S, x_0 — площадь и координата поршня; индекс 1 относится к газу. Результаты расчетов распада разрыва в газе над слоем цемента представлены на рис. 5, *а*, где эпюры давления по длине трубы показаны в разные моменты времени. Начальные данные: $T_0 = 300$ K; $\varepsilon = 0{,}56$; $\rho_2 = 1250$ кг/м^3; $p_2 = 0{,}1612$ МПа; $p_1 = 0{,}1$ МПа; $\gamma = 1{,}4$. Видно, что импульс давления в газодинамическом отсеке, многократно соударяясь с поршнем (кривые *1*—*5* приведены на моменты времени $t = 5{,}6$; 10,1; 23,4; 56,1; 102,6 мс соответственно), приводит к модуляции волны разрежения — левая часть кривых при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Нормированная координата

$$\bar{x}=\begin{cases}x/x_0 & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ (x+L-2x_0)/(L-x_0) & \text{при}\quad x_0<x\leqslant L.\end{cases}$$

Кривые *1*—*4* на рис. 5, *а* отвечают первому — четвертому отражениям ударной волны от поршня, кривая *5* — стадии процесса, когда давление в газовом отсеке практически выравнялось, а волна разрежения в засыпке отразилась от нижнего фланца трубы. Осциллограммы давления на этот момент времени показаны на рис. 5, *б*, где кривые *1*—*3* соответствуют давлению в сечениях на расстоянии $\Delta x = 0{,}72$; 0,54; 0,36 м от нижнего фланца. Сравнивая кривые на рис. 2 и 5, *б*, отметим неплохое согласование по периоду колебаний давления, однако реальный импульс при $\overline{\Delta p} = 0{,}02$ МПа затухает сильнее, нежели расчетный при $\overline{\Delta p} = 0{,}0612$ МПа. С другой стороны, сопоставляя данные на рис. 3 и 5, *б*, видим, что за вычетом волны модуляции (ВМ) амплитуды расчетной и измеренной ВР коррелируются между собой, но при этих давлениях ВМ вообще не проникает в засыпку из γ-окиси алюминия.

В рамках равновесной модели может быть решен вопрос о величине критического перепада давления, при котором начинается сверхзвуковое истечение смеси. Указанная величина оценивается из решения приведенной выше задачи о поршне, скорость которого $\dot{x}_0 = 0$ при $t = 0$ постоянна и равна U_0 при $t > 0$. Как видно из дальнейшего, движение смеси в этом случае автомодельное и баротропное. Выбирая систему координат так, что при $t = 0$ поршень покоится в начале координат, а ось x' направлена в глубь засыпки, и полагая в (3.1) $\xi = x'/t$ — автомодельная переменная, $\rho_2 = \rho_2(\xi)$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\xi)$, $p = p(\xi)$, находим

$$(3.5)\qquad (\mathbf{u}_2 - \xi)d\rho_2/d\xi + \rho_2 d\mathbf{u}_2/d\xi = 0,$$

$$(\mathbf{u}_2 - \xi)\frac{d\mathbf{u}_2}{d\xi} + \frac{1}{\rho_2}\frac{dp}{d\xi} = 0, \quad (\mathbf{u}_2 - \xi)\frac{dp}{d\xi} + \frac{p}{\varepsilon}\frac{d\mathbf{u}_2}{d\xi} = 0.$$

Из первого и последнего уравнений (3.5) следует выражение квадрата скорости звука

$$(3.6)\qquad dp/d\rho_2 = p/(\varepsilon\rho_2) = c_e^2.$$

Условием разрешимости системы (3.5) является связь массовой скорости и скорости звука

$$(3.7)\qquad \mathbf{u}_2 = \xi \pm c_e.$$

Интерес в данном случае представляет решение (3.7) $\mathbf{u}_2 = \xi - c_e$. Подставляя его в первое уравнение (3.5), найдем

$$(3.8)\qquad d\mathbf{u}_2/d\rho_2 = c_e/\rho_2.$$

Интегрируя уравнения (3.6) и (3.8) и учитывая соотношение $\varepsilon = 1 - \rho_2/\rho_s$, получим

$$(3.9)\qquad c_e(\rho_2) = c_{e0}\varepsilon_0/\varepsilon,$$

$$\mathbf{u}_2(\rho_2) = c_{e0}\varepsilon_0 \ln\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0)\varepsilon}, \quad p_2 = p_{20}(1-\varepsilon)\varepsilon_0/(1-\varepsilon_0)\varepsilon$$

(индексом 0 отмечены параметры начального состояния). Подставляя выражения (3.9) в (3.7), запишем закон движения смеси в неявном виде

$$(3.10)\qquad \xi = c_{e0}\varepsilon_0\left(1/\varepsilon + \ln\frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon_0)}\right).$$

Наконец, зная $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$, находим $c_e(\xi)$, $\mathbf{u}_2(\xi)$. В точке ξ_0, где $\mathbf{u}_2(\xi_0) = U_0$, решение (3.9) сопрягается с постоянным течением, как в аналогичной задаче о расширении под поршнем идеального газа (см., например, [8]). Из (3.9) можно определить значения плотности или давления смеси, при которых впервые $\mathbf{u}_2 = -c_e$, т. е. реализуется сверхзвуковой режим истечения. Эти параметры выражаются через решение трансцендентного уравнения

$$(3.11)\qquad \varepsilon_* \ln\frac{(1-\varepsilon_0)\varepsilon_*}{(1-\varepsilon_*)\varepsilon} = 1$$

в виде

$$\rho_2^* = \rho_s(1-\varepsilon_*), \quad p_2^* = p_{20}\varepsilon_0(1-\varepsilon_*)/\varepsilon_*(1-\varepsilon_0)$$

(ε_* — критическая порозность). Отсюда при $\varepsilon_0 = 0{,}7$ $\varepsilon_* = 0{,}88$, следовательно, $p_2/p_2^* = 3{,}12$. Заметим, что в аналогичной задаче о течении политропного газа это отношение составит $p_0/p_* = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}$. Полагая $\gamma = 1/\varepsilon_0$, при $\varepsilon_0 = 0{,}7$ имеем $p_0/p_* = 3{,}65$. Сравнивая последнее значение с полученным ранее для засыпки, видим, что течение смеси незначительно отличается от аналогичного течения политропного газа, что вытекает из внешнего сходства (3.1) и модели газа с постоянным отношением теплоемкостей. Подчеркнем, что в описанных опытах отношение давлений, необходимое для сверхзвукового течения смеси, должно быть еще выше, чем теоретическая оценка, поскольку поршень замедляется при взаимодействии с газом в верхнем отсеке. Данные, представленные на рис. 2, 3, получены при $p_2/p_1 \leqslant 2$, поэтому сверхзвуковой режим равновесного течения заведомо не достигался в наших опытах, что подтверждается и прямыми численными расчетами. Для объяснения результатов необходимо принять во внимание неравновесные явления.

4. Затухание звука. В уравнениях неравновесной модели положим

$$\mathbf{g} = 0,\ \rho_2 = \rho_0 + \tilde{\rho},\ p = p_0 + \tilde{p},\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}$$

(индексом 0 обозначены постоянные величины, тильдой — параметры звуковых возмущений). Линеаризуя (2.5), (2.6) относительно величины с тильдой, получим в одномерном случае

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \mathbf{u}_0\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{u}_0\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} + \mathbf{u}_0\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} + \frac{p_0}{\varepsilon_0}\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} = D_0\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial x^2}.$$

Здесь, согласно (2.8), $D_0 = p_0 d^2/\mu f(\varepsilon_0)$. Величина D_0 для засыпок различного состава приведена в табл. 1. Для монохроматических возмущений, пропорциональных $\exp(ikx - i\omega t)$, из (4.1) вытекает

$$(\omega - k\mathbf{u}_0)\left[\frac{p_0}{\rho_0\varepsilon_0}k^2 - (\omega - k\mathbf{u}_0)(\omega - k\mathbf{u}_0 + iD_0k^2)\right] = 0. \tag{4.2}$$

Зависимость $\omega = \omega(k)$, построенная по (4.2), имеет три ветви, одна из которых, $\omega = k\mathbf{u}_0$, соответствует возмущениям, распространяющимся со скоростью основного потока, а две другие

$$\omega = k\left(\mathbf{u}_0 \pm c_e\sqrt{1 - D_0^2k^2/c_e^2}\right) - iD_0k^2 \tag{4.3}$$

— звуковым возмущениям. Из (4.3) видно, что при действительных значениях волнового числа частота является комплексным параметром. Однако условия проведения экспериментов таковы, что действительным параметром следует считать ω. Запишем вместо (4.3) исходное кубическое уравнение, не разрешенное относительно k (сомножитель в квадратных скобках в (4.2)):

$$i\mathbf{u}_0D_0k^3 + \left(c_e^2 - \mathbf{u}_0^2 - i\omega D_0\right)k^2 + 2\mathbf{u}_0\omega k - \omega^2 = 0. \tag{4.4}$$

Положим в (4.4) $\mathbf{u}_0 = 0$, что отвечает звуковым возмущениям в покоящейся среде, и, разрешая его относительно k, получим

$$k = \pm\,\omega e^{i\varphi/2}/(c_e(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{1/4}), \tag{4.5}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\left(2D_0\omega/c_e^2\right)$. Считаем, что поршень колеблется по гармоническому закону с периодом $T = 2L_1/c_s$ (L_1 — длина КНД, c_s — адиабатическая скорость звука в газе). Тогда, подставляя в (4.5) $\omega = 2\pi/T$, находим коэффициент затухания возмущений

$$\varkappa = \operatorname{Im} k = \frac{\pi c_s}{L_1c_e}\frac{\sin\varphi/2}{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)^{1/4}}. \tag{4.6}$$

Установлено, что функция $\varkappa = \varkappa(\varphi)$ имеет максимум при $\varphi = \pi/3$, кроме того, $\varkappa(0) = \varkappa(\pi/2) = 0$. Следовательно, существует размер зерна засыпки, при котором затухание возмущений максимально. Размер определится из условия $2D_0\omega/c_e^2 = \operatorname{tg}\pi/3 = \sqrt{3}$ с учетом зависимости (2.8). В частности, для мелкодисперсной γ-окиси алюминия, по данным табл. 1, 2, $\pi D_0c_s/\left(L_1c_e^2\right) \simeq 3{,}33$. При этом $\varkappa = 34{,}5$. Напротив, в цементе, где среднеквадратичный размер зерна $d \simeq 7$ мкм и $\varepsilon = 0{,}56$, $D_0 \simeq 2{,}7\cdot10^{-3}$ м²/с и $\varkappa \simeq 0{,}84$, что находится в разумном согласии с данными экспериментов. При этих параметрах реальная часть волнового числа

Re $k = k_0$ значительно превосходит по абсолютной величине $\varkappa$. Положим в (4.4) $k = k_0 + i\varkappa$ и, считая отношение $\varkappa/k_0$ малым ($|\varkappa/k_0| \ll 1$), представим его решение при $\mathbf{u}_0 \neq 0$ в виде

$$k = -\frac{\omega(\mathrm{M}_e \pm 1)}{c_e(1-\mathrm{M}_e^2)} \mp \frac{iD_0\omega^2}{2c_e^3(1 \pm \mathrm{M}_e)^3},$$

$\mathrm{M}_e = \mathbf{u}_0/c_e$ — равновесное число Маха. Верхний знак отвечает возмущениям, распространяющимся против потока, нижний — по потоку. Для волн, движущихся от поршня в глубь засыпки,

(4.7) $$\varkappa = D_0\omega^2/2c_e^3(1 - \mathrm{M}_e)^3.$$

Как видно из (4.7), с ростом M_e вплоть до единицы $\varkappa$ неограниченно возрастает, чем и объясняется поведение модулированных ВР в цементе (см. рис. 2). Действительно, по (3.9) $\mathrm{M}_e = \varepsilon \ln(p_2/p_1)$. При $p_2/p_1 = 2$ и $\varepsilon = 0{,}56$ находим $\varepsilon_* = 0{,}718$, $\mathrm{M}_e \simeq 0{,}5$, а из (4.7) следует, что $\varkappa$ возрастает в 8 раз по сравнению с его значением при $p_2 \simeq p_1$.

Рассмотрим поведение волн давления в крупнодисперсной окиси алюминия. Скоростного напора газовой фазы при $\overline{\Delta p} \simeq 0{,}1$ МПа недостаточно для существенного изменения объема засыпки и ее перемещения. Поэтому положим в уравнениях неравновесной модели (2.5), (2.6) $\mathbf{u}_2 = 0$, $\varepsilon = \mathrm{const}$. Тогда из (2.6) находим в одномерном случае уравнение, хорошо известное в теории фильтрации:

(4.8) $$\partial p/\partial t = \partial(D_0 \partial p/\partial x)/\partial x.$$

Для монохроматических возмущений малой амплитуды следует простое дисперсионное уравнение $i\omega = D_0k^2$. Разрешая его относительно k, разделяя действительную и мнимую части и учитывая выражение D_0, запишем коэффициент затухания возмущений

(4.9) $$\varkappa = \sqrt{\omega\mu f(\varepsilon_0)/(2p_0d^2)}.$$

Это выражение выводится и непосредственно из (4.6) в пределе $\varphi \to \pi/2$. Вычисляя $\varkappa$ по табл. 1, 2, находим $\varkappa \simeq 2{,}61$. Такое же значение имеет и действительная часть волнового вектора. Отсюда длина волны возмущений $\lambda = 2\pi/k_0 \simeq 2{,}4$ м. Полученные результаты согласуются с данными рис. 3, из которых видно, что сдвиг фазы колебаний на расстоянии $\Delta x = 0{,}18$ м не превышает 10 %, а $\varkappa$ изменяется от 4,7 до 2 для переднего и заднего фронтов соответственно.

Заметим, что фактически в опытах генерировались возмущения конечной амплитуды, взаимодействие которых с основным потоком и между собой является более сложным, чем в рассмотренном выше случае. Из сравнения кривых на рис. 2 и 3 следует, что в цементе возмущения не просто затухают, но и вносят вклад в амплитуду ВР, существенно уменьшая ее. Кроме того, из теории нелинейной фильтрации известно [9, 10], что в моделях типа (4.8) возмущения распространяются с конечной скоростью. Это не отражено в проведенном анализе и подлежит дальнейшему исследованию.

Авторы выражают благодарность М. И. Горбунову и О. В. Шапеевой за помощь, оказанную при выполнении натурных и численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гельфанд Б. Е., Медведев С. П., Поленов А. Н. и др.** Измерение скорости слабых возмущений в пористых средах насыпной плотности // ПМТФ.— 1986.— № 1.
2. **Ажищев Н. А., Антипин В. А., Борисов А. А., Самойлов В. А.** Волны разрежения в свободных засыпках // ИФЖ.— 1986.— Т. 52, № 1.
3. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1.
4. **Гольдштик М. А.** Процессы переноса в зернистом слое.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1984.

5. **Богоявленский Д. Г.** Гидродинамика и теплообмен в высокотемпературных ядерных реакторах с шаровыми телами.— М.: Атомиздат, 1979.
6. **Carlson D. J., Hoglund R. F.** Particle drag and heat transfer in rocket nozzle // AIAA J.— 1964.— V. 2, N 11.
7. **Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Г., Зотов Г. П.** Механика насыщенных пористых сред.— М.: Недра, 1970.
8. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
9. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористых средах // ПММ.— 1952.— Т. 16, № 1.
10. **Калашников А. С., Олейник О. А.** Об уравнениях нестационарной фильтрации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи.— М.: Наука, 1987.

г. Новосибирск *Поступила 9/III 1989 г., в окончательном варианте — 20/VI 1989 г.*

УДК 532.546

Ю. А. Буевич, В. А. Устинов

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС К ЧАСТИЦАМ ПРИ БЕЗОТРЫВНОМ СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ И ВНУТРЕННИЙ ОБМЕН В ЗЕРНИСТОМ СЛОЕ

Конвективный перенос тепла или массы в условиях струйного обтекания представляет интерес в связи с проблемами охлаждения твердых поверхностей, организацией ряда массообменных процессов в аппаратах химической технологии и т. п. Кроме того, модель безотрывного обтекания частиц осесимметричными струями с успехом привлекается в последнее время для объяснения закономерностей переноса тепла и массы к частицам неподвижных зернистых слоев, важного для широкого круга приложений [1, 2].

Перенос к частицам, обтекаемым струями, неоднократно исследовали экспериментально и теоретически [3—8]. Количество исследований межфазного обмена в зернистых слоях исключительно велико (см., например, библиографию в [2]). Тем не менее до сих пор нет полной ясности о характере зависимости соответствующего параметра Шервуда Sh (или Нуссельта) от числа Рейнольдса Re. Корреляция экспериментальных данных приводит обычно к степенным критериальным зависимостям с существенно разными показателями степени, причем расхождение между соответствующими эмпирическими формулами достигает порядка и выше.

В этой работе проблема рассмотрена при больших числах Шмидта Sc (или Прандтля) для сферических частиц, безотрывно обтекаемых ламинарной осесимметричной струей. Показано, что зависимость Sh(Re) в широком интервале изменения Re не может быть аппроксимирована простой степенной функцией.

1. Рассматриваем обтекание сферы радиуса a цилиндрической струей несжимаемой жидкости радиуса r_0, имеющей скорость u_0; схема течения и вводимые координаты представлены на рис. 1. Течение у поверхности сферы состоит из трех зон: области пленочного течения при $\theta_0 < \theta < \theta_*$ и областей вблизи застойных точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Характеристики ламинарного пограничного слоя, формирующегося в лобовой области, в принципе могут быть найдены при помощи метода Фресслинга [9], если в качестве соответствующего внешнего асимптотического разложения использовать решение задачи об обтекании сферы струей идеальной жидкости. В любом случае в непосредственной окрестности передней критической точки допустимо использовать формулу

$$(1.1)\qquad u_s = \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{3\,\mathrm{Re}}{2}\right)^{1/2} u_0\theta\frac{y}{a} \approx \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{3\,\mathrm{Re}}{2}\right)^{1/2} u_0\sin\theta\frac{y}{a},\quad \mathrm{Re} = \frac{2au_0}{\nu},$$

для скорости вблизи твердой поверхности, где ν — кинематическая вязкость; α — числовой коэффициент, равный 0,9277 при обтекании сферы неограниченным однородным потоком. В первом приближении это же значение α можно использовать и для струйного обтекания, что подтверждается установленной на опыте независимостью потока тепла или массы к лобовой точке от диаметра набегающей струи [8].