

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ВЫПУЧИВАНИИ УПРУГОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Дж. Е. Озоигбо, А. М. Этте*

Федеральный университет Ндуфу-Алик-Икво им. Алекса Эквуэме, Абакалики, Нигерия

* Федеральный технологический университет, Оверри, Нигерия

E-mails: geraldzoigbo@yahoo.co.uk, tonimonsette@yahoo.com

Построено аналитическое решение задачи о динамическом выпучивании под действием ступенчатой нагрузки упругой конструкции, подвергаемой предварительному статическому нагружению. С использованием асимптотического разложения по двум малым параметрам получено однородное по времени асимптотическое представление перемещения. Определено соотношение между динамической и статической нагрузками, при которых происходит выпучивание. Исследованы зависимости динамической нагрузки выпучивания от различных параметров задачи (коэффициента демпфирования, начальной величины несовершенства, величины предварительной статической нагрузки).

Ключевые слова: возмущение, предварительное статическое нагружение, вязкое демпфирование, кубическая модель, ступенчатая нагрузка.

DOI: 10.15372/PMTF20200614

Введение. В большинстве работ задача о динамическом выпучивании конструкции исследуется без учета ее предварительного статического нагружения. Впервые задача о динамическом выпучивании конструкции с учетом ее предварительного статического нагружения рассмотрена в [1, 2]. Обычно эта задача решается с использованием численных методов, в частности метода конечных элементов [3–5]. Поскольку численные решения сложно применять в инженерной практике, представляет интерес построение аналитических решений. Предварительное статическое нагружение имеет место во многих инженерных конструкциях. Способ построения решения, принятый в данной работе, частично использовался в работе [6], в которой определялись максимальное смещение и статическая нагрузка выпучивания круговой цилиндрической оболочки. Тот же способ применялся в [7].

В данной работе используется асимптотическое разложение по двум малым параметрам. Принятая кубическая нелинейная модель конструкции [8] описывает поведение таких механических конструкций, как колонны, балки, пластины, тороидальные и цилиндрические оболочки и др.

1. Формулировка кубической модели упругой конструкции. Рассматривается конструкция, состоящая из двух стержней, каждый из которых имеет длину L (рис. 1). Стержни нагружены внезапно приложенной в момент времени $T = 0$ горизонтальной силой $P(T)$. Предполагается, что стержни являются абсолютно жесткими и невесомыми.

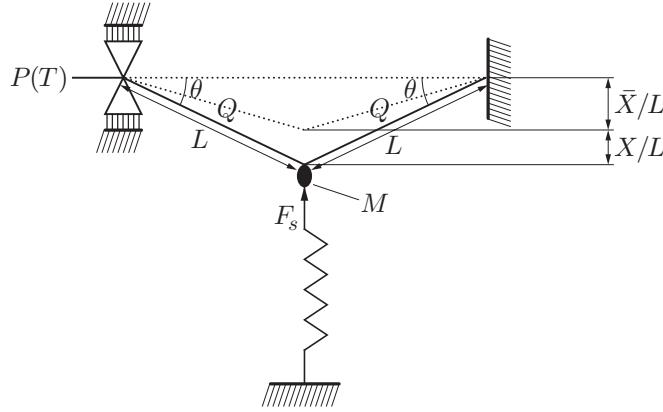


Рис. 1. Кубическая модель конструкции

Масса M прикреплена к стержням в точке их пересечения. Движение массы в вертикальном направлении ограничено пружиной, жесткость которой изменяется по кубическому закону. Со стороны пружины на массу действует сила реакции

$$F_s = KL \left(\frac{X}{L} - b \left(\frac{X}{L} \right)^3 \right), \quad b > 0, \quad K > 0$$

(X — дополнительное смещение относительно положения равновесия).

Пусть Q — усилие в каждом из стержней, θ — угол между стержнем и горизонталью (см. рис. 1). Предполагается, что угол θ мал, поэтому $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$. Тогда принимается $\sin \theta = (\bar{X} + X)/L$, $\theta = (\bar{X} + X)/L$. Проекция уравнения равновесия стержня на горизонтальную ось записывается в виде

$$Q \cos \theta = P(T). \quad (1.1)$$

Уравнение движения массы M в вертикальном направлении имеет вид

$$M \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{X}{L} \right) + KL \left(\frac{X}{L} - b \left(\frac{X}{L} \right)^3 \right) = 2Q \sin \theta. \quad (1.2)$$

Из (1.1), (1.2) получаем

$$M \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{X}{L} \right) + KL \left(1 - \frac{2P(T)}{KL} \right) \frac{X}{L} - bKL \left(\frac{X}{L} \right)^3 = 2P(T) \frac{\bar{X}}{L}. \quad (1.3)$$

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{X}{L}, \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{X}}{L}, \quad t = T \sqrt{\frac{KL}{M}}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (1.4)$$

и положим

$$2P(T) = \frac{2P(T)P(0)}{P(0)} = 2f(t)P(0), \quad f(t) = \frac{P(T)}{P(0)}, \quad \lambda = \frac{2P(0)}{KL}, \quad P(0) \neq 0. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), с учетом (1.5) имеем

$$\frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} + (1 - \lambda f(t)) \xi - b \xi^3 = \lambda f(t) \bar{\xi}, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Начальные условия записываются в виде

$$t = 0: \quad \xi(t) = 0, \quad \frac{d\xi(t)}{dt} = 0.$$

Уравнение (1.6) записано без учета демпфирующего элемента. Если учесть наличие демпфирующего элемента, вязкость которого порядка δ , то уравнение (1.6) принимает вид

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi(t)}{dt} + (1 - \lambda f(t))\xi - b\xi^3 = \lambda f(t)\bar{\xi}, \quad t > 0,$$

где $0 < \delta < 1$.

Согласно [8] уравнения кубической модели (см. рис. 1), описывающей поведение упругой конструкции, имеют вид

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + (1 - \lambda f(t))\xi - b\xi^3 = \lambda \bar{\xi} f(t), \quad t > 0, \quad \xi(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} = 0. \quad (1.7)$$

Если в уравнении (1.7) учесть малое слагаемое порядка δ , учитывающее демпфирование, то это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi(t)}{dt} + (1 - \lambda f(t))\xi - b\xi^3 = \lambda \bar{\xi} f(t), \quad t > 0, \quad \xi(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} = 0, \quad (1.8)$$

где $0 < \delta < 1$ — коэффициент демпфирования; $b > 0$ — параметр, характеризующий величину несовершенства; $\bar{\xi}$ — амплитуда несовершенства; $f(t)$ — нагрузка; λ — безразмерный параметр нагружения (значение λ_0 соответствует предварительной статической нагрузке, значение λ — динамической нагрузке).

Ступенчатая нагрузка $f(t)$ удовлетворяет условию

$$f(t) = 0, \quad t > 0.$$

Задача заключается в определении значения λ_D параметра λ , при котором конструкция динамически выпучивается при условии, что на нее предварительно действовала нагрузка λ_0 . Согласно [8] значение λ_D определяется как наибольшее значение параметра λ , при котором смещение остается ограниченным.

2. Статическое деформирование. Согласно (1.8) статический прогиб ξ_0 , соответствующий нагрузке λ_0 , является решением уравнения

$$(1 - \lambda_0)\xi_0 - b\xi_0^3 = \lambda_0\bar{\xi}. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) получается из (1.8), если положить в нем $f(t) = 1$ и пренебречь членами, соответствующими инерционным и демпфирующим силам.

Пусть

$$\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_0^{(i)} \bar{\xi}^i. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при членах $\bar{\xi}^i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), получаем систему уравнений

$$(1 - \lambda_0)\xi_0^{(1)} = 0, \quad (1 - \lambda_0)\xi_0^{(2)} = 0, \quad (1 - \lambda_0)\xi_0^{(3)} = b(\xi_0^{(1)})^3, \quad \dots, \quad (2.3)$$

решение которой имеет вид

$$\xi_0^{(1)} = B_0, \quad \xi_0^{(2)} = 0, \quad \xi_0^{(3)} = bB_0^3/(1 - \lambda_0), \quad B_0 = \lambda_0/(1 - \lambda_0). \quad (2.4)$$

Следовательно, выражение для ξ_0 записывается в виде

$$\xi_0(\lambda_0) = \bar{\xi}B_0 + \bar{\xi}^3bB_0^3/(1 - \lambda_0) + \dots \quad (2.5)$$

Для того чтобы определить статическую нагрузку λ_S , при которой происходит выпучивание, будем использовать обозначение λ вместо λ_0 .

Условие бифуркации решения записывается следующим образом:

$$\frac{d\lambda}{d\xi_0} = 0. \quad (2.6)$$

Представим выражение (2.5) в виде

$$\xi_0(\lambda_0) = c_1\bar{\xi} + c_3\bar{\xi}^3 + \dots, \quad c_1 = B_0, \quad c_3 = bB_0^3/(1 - \lambda_0). \quad (2.7)$$

Следуя [7, 9], обратим выражение (2.7):

$$\bar{\xi} = d_1\xi_0 + d_3\xi_0^3 + \dots \quad (2.8)$$

Подставляя в (2.8) выражение для ξ_0 из (2.7) и приравнивая коэффициенты при степенях величины $\bar{\xi}$, получаем

$$d_1 = 1/c_1, \quad d_3 = -c_3/c_1^4. \quad (2.9)$$

Учитывая, что d_1, d_3 зависят от λ , из (2.6) с учетом (2.9) находим

$$\bar{\xi} = (2/(3\sqrt{3}))\sqrt{c_1/c_3}. \quad (2.10)$$

Преобразуя (2.10) с учетом (2.4), (2.9), получаем

$$(1 - \lambda_S)^{3/2} = (3\sqrt{3}/2)b^{1/2}\bar{\xi}\lambda_S. \quad (2.11)$$

3. Динамическое деформирование. Уравнение движения конструкции с вязкостным демпфированием под действием ступенчатой нагрузки, в случае если она не была предварительно статически нагружена, имеет вид

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi(t)}{dt} + (1 - \lambda f(t))\xi - b\xi^3 = \lambda\bar{\xi}f(t), \quad t > 0, \quad \xi(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} = 0,$$

где $\xi(t)$ — смещение, вызванное ступенчатым нагружением (в случае отсутствия предварительного нагружения статической нагрузкой).

В случае если конструкция была предварительно нагружена силой λ_0 , полное смещение $\eta(t)$ представляется в виде суммы

$$\eta(t) = \xi_0 + \xi(t) \quad (3.1)$$

и уравнение движения записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{d\eta(t)}{dt} + (1 - \lambda_0)\xi_0 + (1 - \lambda)\xi - b\eta^3 &= \lambda_0\bar{\xi} + \lambda\bar{\xi}, \quad t > 0, \\ \xi(0) = \frac{d\xi(0)}{dt} = 0, \quad \eta(0) = \xi_0, \quad \frac{d\xi(0)}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя выражение (3.1) в уравнение (3.2), получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}(\xi_0 + \xi) + 2\delta \frac{d}{dt}(\xi_0 + \xi) + (1 - \lambda_0)\xi_0 + (1 - \lambda)\xi - b(\xi_0 + \xi)^3 = (\lambda_0 + \lambda)\bar{\xi}, \quad t > 0,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi(t)}{dt} + (1 - \lambda)\xi - b[\xi^3 + 3\xi_0\xi(\xi + \xi_0)] &= \lambda\bar{\xi}, \quad t > 0, \\ \xi(0) = \frac{d\xi(0)}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $\xi_0 = 0$ уравнение (3.3) представляет собой уравнение движения системы под действием ступенчатой нагрузки без предварительного приложения к системе статической нагрузки, при $\xi_0 \neq 0$ — уравнение движения системы под действием ступенчатой нагрузки после приложения к системе статической нагрузки.

4. Метод возмущений и асимптотическое решение. В задаче (3.3) содержатся два малых независимых параметра δ и $\bar{\xi}$. Пусть

$$\tau = \delta t, \quad \hat{t} = (1 - \lambda)^{1/2} t + \delta^{-1} [\mu_1(\tau) \bar{\xi} + \mu_2(\tau) \bar{\xi}^2 + \mu_3(\tau) \bar{\xi}^3 + \dots],$$

$$\mu_i = \mu_i(\tau), \quad \mu_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= (1 - \lambda)^{1/2} \xi_{,\hat{t}} + [\mu'_1(\tau) \bar{\xi} + \mu'_2(\tau) \bar{\xi}^2 + \mu'_3(\tau) \bar{\xi}^3 + \dots] \xi_{,\hat{t}} + \delta \xi_{,\tau}, \\ \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= (1 - \lambda) \xi_{,\hat{t}\hat{t}} [\mu'_1(\tau) \bar{\xi} + \mu'_2(\tau) \bar{\xi}^2 + \mu'_3(\tau) \bar{\xi}^3 + \dots]^2 \xi_{,\hat{t}\hat{t}} + 2\delta(1 - \lambda)^{1/2} \xi_{,\hat{t}\tau} + \delta^2 \xi_{,\tau\tau} + \\ &+ 2(1 - \lambda)^{1/2} [\mu'_1(\tau) \bar{\xi} + \mu'_2(\tau) \bar{\xi}^2 + \mu'_3(\tau) \bar{\xi}^3 + \dots] \xi_{,\hat{t}\tau} + 2\delta [\mu'_1(\tau) \bar{\xi} + \mu'_2(\tau) \bar{\xi}^2 + \mu'_3(\tau) \bar{\xi}^3 + \dots] \xi_{,\hat{t}\tau} + \\ &+ \delta [\mu''_1(\tau) \bar{\xi} + \mu''_2(\tau) \bar{\xi}^2 + \mu''_3(\tau) \bar{\xi}^3 + \dots] \xi_{,\hat{t}\hat{t}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где запятая в индексе обозначает частную производную; $d(\cdot)/d\tau = (\cdot)'$. Положим

$$\xi(\hat{t}, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^{(ij)}(\hat{t}, \tau) \bar{\xi}^i \delta^j, \quad (4.3)$$

где “ (ij) ” — верхний индекс, а не степень.

Подставим (4.2) в (3.3), разделим полученное уравнение на $1 - \lambda$ и подставим в него представление (4.3). В получившемся уравнении приравняем коэффициенты при степенях $\bar{\xi}^i \delta^j$, $i = 1, 2, 3, \dots$, $j = 0, 1, 2, \dots$. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$O(\bar{\xi}): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} + \zeta^{10} = \lambda/(1 - \lambda),$$

$$O(\bar{\xi}\delta): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{11} + \zeta^{11} = -2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}}^{10}, \quad (4.4)$$

$$O(\bar{\xi}\delta^2): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{12} + \zeta^{12} = -(1 - \lambda)^{-1} \zeta_{,\tau\tau}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1};$$

$$O(\bar{\xi}^2): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{20} + \zeta^{20} = -(1 - \lambda)^{-1/2} \mu'_2(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{20} - 2(1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\tau}^{10} \zeta_{,\tau}^{11},$$

$$O(\bar{\xi}^2\delta): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{21} + \zeta^{21} = -2(1 - \lambda)^{-1/2} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{11} - 2(1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1} \zeta_{,\hat{t}}^{10} -$$

$$- 2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{10} - (1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{10}, \quad (4.5)$$

$$O(\bar{\xi}^2\delta^2): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{22} + \zeta^{22} = -(1 - \lambda)^{-1} \zeta_{,\tau\tau}^{20} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{12} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}\tau}^{20} -$$

$$- (1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \zeta_{,\hat{t}}^{21} - 2(1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1} \zeta_{,\hat{t}}^{21};$$

$$O(\bar{\xi}^3): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{30} + \zeta^{30} = -(1 - \lambda)^{-1} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{10} - 2(1 - \lambda)^{-1/2} \mu'_1(\tau) \zeta_{,\hat{t}}^{11} +$$

$$+ (1 - \lambda)^{-1} b \{ (\zeta^{(10)})^3 + 3[(\xi_0^{(1)})^2 \zeta^{(10)} + \xi_0^{(1)} (\zeta^{(10)})^2] \}; \quad (4.6)$$

$$O(\bar{\xi}^3\delta): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{31} + \zeta^{31} = -2(1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}\tau}^{11} - 2(1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{30} - (1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{10} - \\ - 2(1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} + (1-\lambda)^{-1}3b\{(\zeta^{(10)})^2 + \zeta^{(11)} + [(\xi_0^{(1)})^2\zeta^{(11)} + 2\xi_0^{(1)}\zeta^{(11)}\zeta^{(11)}]\}; \quad (4.7)$$

$$O(\bar{\xi}^3\delta^2): \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{32} + \zeta^{32} = -2(1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{12} - 2(1-\lambda)^{-1}\zeta_{,\tau\tau}^{30} + \\ + 2(1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}\tau}^{11} - 2(1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}\tau}^{11} - 2(1-\lambda)^{-1}\zeta_{,\hat{t}\tau}^{31} - (1-\lambda)^{-1}\mu''_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{11} - \\ - 2(1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{11} + 2(1-\lambda)^{-1}\zeta_{,\tau\tau}^{30} + (1-\lambda)^{-1}3b\{(\zeta^{(10)})^2 + \zeta^{(12)} + (\zeta^{(10)})^2 + \zeta^{(10)} + \\ + [(\xi_0^{(1)})^2\zeta^{(12)} + \xi_0^{(1)}][(\zeta^{(11)})^2 + 2\zeta^{(10)}\zeta^{(12)}]\} \quad (4.8)$$

и т. д.

С использованием первого уравнения в (4.2) при $\hat{t} = \tau = 0$ и с учетом (4.3) получаем начальные условия

$$O(\bar{\xi}): \quad \zeta^{10}(0,0) = \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(0,0) = 0, \quad O(\bar{\xi}\delta): \quad \zeta^{11}(0,0) = \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{11}(0,0) + \zeta_{,\tau}^{10}(0,0) = 0, \quad (4.9) \\ O(\bar{\xi}\delta^2): \quad \zeta^{12}(0,0) = \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{12}(0,0) + \zeta_{,\tau}^{11}(0,0) = 0;$$

$$O(\bar{\xi}^2): \quad \zeta^{20}(0,0) = \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{20}(0,0) + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_1(0) + \zeta_{,\hat{t}}^{22}(0,0) + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(0) = 0,$$

$$O(\bar{\xi}^2\delta): \quad \zeta^{21}(0,0) = \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{21}(0,0) + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(0)\zeta_{,\hat{t}}^{11}(0,0) + \zeta_{,\tau}^{20}(0,0) = 0, \quad (4.10)$$

$$O(\bar{\xi}^2\delta^2): \quad \zeta^{22}(0,0) = \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{22}(0,0) + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(0)\zeta_{,\hat{t}}^{21}(0,0) + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(0)\zeta_{,\hat{t}}^{20}(0,0) = 0$$

и т. д.

Решение первого уравнения системы (4.4) с учетом первого начального условия в (4.9) записывается в виде

$$\zeta^{10}(\hat{t}, \tau) = a_1(\tau) \cos \hat{t} + b_1(\tau) \sin \hat{t} + B, \quad (4.11) \\ a_1(0) = -B, \quad b_1(0) = 0, \quad B = \lambda/(1-\lambda).$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (4.4), получаем

$$\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{11} + \zeta^{11} = 2(1-\lambda)^{-1/2}[(a_1 + a'_1) \sin \hat{t} + (b_1 + b'_1) \cos \hat{t}]. \quad (4.12)$$

Для того чтобы получить однородное по $\hat{t}$ асимптотическое решение, приравняем к нулю коэффициенты при $\cos \hat{t}$ и $\sin \hat{t}$ в (4.12). В результате имеем

$$b'_1 + b_1 = 0, \quad a'_1 + a_1 = 0. \quad (4.13)$$

Из (4.13), (4.11) находим

$$a_1(\tau) = -B e^{-\tau}, \quad b_1(\tau) = 0. \quad (4.14)$$

Следовательно,

$$\zeta^{10}(\hat{t}, \tau) = a_1(\tau) \cos \hat{t} + B.$$

Подставляя (4.14) во второе уравнение (4.4), получаем

$$\zeta^{11}(\hat{t}, \tau) = a_2(\tau) \cos \hat{t} + b_2(\tau) \sin \hat{t}, \quad a_2(0) = 0, \quad b_2(0) = -B. \quad (4.15)$$

С использованием (4.14), (4.15) из третьего уравнения системы (4.4) находим

$$\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{12} + \zeta^{12} = -2(1-\lambda)^{-1/2}(-a_2 \sin \hat{t} + b_2 \cos \hat{t}) - 2(1-\lambda)^{-1/2}(-a'_2 \sin \hat{t} + b'_2 \cos \hat{t}) - \\ - 2(1-\lambda)^{-1}a''_1 \cos \hat{t} - (1-\lambda)^{-1}a''_1 \cos \hat{t}. \quad (4.16)$$

Для того чтобы получить однородное по $\hat{t}$ асимптотическое решение, приравняем к нулю коэффициенты при $\cos \hat{t}$ и $\sin \hat{t}$ в правой части равенства (4.16). В результате имеем

$$b'_2 + b_2 = (1-\lambda)^{-1/2}(2a_1 + a''_1)/2, \quad a'_2 + a_2 = 0. \quad (4.17)$$

Решив систему (4.17) с начальными условиями (4.15), находим

$$a_2(\tau) = 0, \quad b_2(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau} (1-\lambda)^{-1/2} \left(\int_0^\tau (2a_1 + a''_1) e^s ds + b_2(0) \right).$$

Следовательно,

$$\zeta^{11}(\hat{t}, \tau) = b_2(\tau) \sin \hat{t}. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в третье уравнение (4.4), получаем

$$\zeta^{12}(\hat{t}, \tau) = a_3(\tau) \cos \hat{t} + b_3(\tau) \sin \hat{t}, \quad a_3(0) = 0, \quad b_3(0) = 0.$$

Из четвертого уравнения системы (4.4) и уравнения (4.5) следует

$$\zeta^{20} = \zeta^{21} = \zeta^{22} = 0.$$

Заметим, что

$$(\zeta^{10})^3 = (a_1 \cos \hat{t} + B)^3 = \left(B^3 + \frac{3}{2} B a_1^2 \right) + \left(3a_1 B^2 + \frac{3}{4} a_1^3 \right) \cos \hat{t} + \frac{3}{2} B a_1^2 \cos 2\hat{t} + \frac{1}{4} a_1^3 \cos 3\hat{t}, \\ (\zeta^{10})^2 = (a_1 \cos \hat{t} + B)^2 = \left(B^2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) + 2B a_1 \cos \hat{t} + \frac{1}{2} a_1^2 \cos 2\hat{t}. \quad (4.19)$$

С учетом (4.19) запишем уравнение (4.6) в следующем виде:

$$\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{30} + \zeta^{30} = \frac{2a_1 \mu'_1}{1-\lambda} \left[\left(B^3 + \frac{3}{2} B a_1^2 \right) + \left(3a_1 B^2 + \frac{3}{4} a_1^3 \right) \cos \hat{t} + \frac{3}{2} B a_1^2 \cos 2\hat{t} + \frac{1}{4} a_1^3 \cos 3\hat{t} \right] + \\ + \frac{3b}{1-\lambda} \left\{ \xi_0^{(1)} \left[\left(B^2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) + 2B a_1 \cos \hat{t} + \frac{1}{2} a_1^2 \cos 2\hat{t} \right] + (\xi_0^{(1)})^2 (a_1 \cos \hat{t} + B) \right\}. \quad (4.20)$$

Для того чтобы получить однородное по $\hat{t}$ асимптотическое решение, приравняем к нулю коэффициенты при $\cos \hat{t}$ в правой части (4.20). В результате имеем

$$\mu'_2(\tau) = -\frac{3}{2} b(1-\lambda)^{-1/2} \left[\left(B^2 + \frac{1}{4} a_1^2 \right) + (2B \xi_0^{(1)} + (\xi_0^{(1)})^2) \right], \\ \mu''_2(\tau) = -\frac{3}{4} a_1 a'_1 b(1-\lambda)^{-1/2}, \quad \mu'''_2(\tau) = -\frac{3}{4} b(1-\lambda)^{-1/2} (a_1^2 + a_1 a''), \\ \mu'_2(0) = -\frac{15}{8} b B^2 (1-\lambda)^{-1/2} q_0, \quad \mu'''_2(0) = -\frac{3}{2} b B^2 (1-\lambda)^{-1/2} (a_1^2 + a_1 a''), \\ q_0 = 1 + \frac{4}{15} \xi_0^{(1)} \left(\frac{2}{B} + \frac{1}{B^2} \xi_0^{(1)} \right). \quad (4.21)$$

С учетом (4.21) аналогично (4.20) из (4.6) получаем

$$\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{30} + \zeta^{30} = a_4(\tau) \cos \hat{t} + b_4(\tau) \sin \hat{t} + r_0(t) - \frac{1}{3} r_1(\tau) \cos 2\hat{t} - \frac{1}{8} r_2(\tau) \cos 3\hat{t},$$

$$\begin{aligned}
a_4(0) &= -bB^3(1-\lambda)^{-1}\left(\frac{15}{32} + q_2\right), \quad q_2 = 3\xi_0^{(1)}\left(\frac{3}{2B} + \frac{1}{B^2}\xi_0^{(1)} + \frac{1}{B}\right), \quad b_4(0) = 0, \\
r_0(\tau) &= b(1-\lambda)^{-1}\left[\left(B^2 + \frac{3}{2}Ba_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}B^2a_1^2 + B\xi_0^{(1)}\right)\right], \\
r_1(\tau) &= \frac{3}{2}ba_1(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)}), \quad r_2(\tau) = \frac{3}{4}ba_1^3(1-\lambda)^{-1}, \quad r'_0(\tau) = 3ba_1a'_1(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)}), \\
r''_0(\tau) &= 3b(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)})(a_1a''_1 + a_1'^2), \quad r'_1(\tau) = 3ba_1a'_1(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)}), \\
r''_1(\tau) &= 3b(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)})(a_1a''_1 + a_1'^2), \quad r'_2(\tau) = \frac{3}{4}ba_1^2a_1'(1-\lambda)^{-1}, \\
r''_2(\tau) &= \frac{3}{4}b(1-\lambda)^{-1}(a_1^2a_1'' + 2a_1a_1'^2), \quad r_0(0) = 3bB^3(1-\lambda)^{-1}q_1, \quad r_1(0) = \frac{3}{2}bB^3(1-\lambda)^{-1}(1 + \xi_0^{(1)}), \\
r_2(0) &= -\frac{1}{4}bB^3(1-\lambda)^{-1}, \quad r'_0(0) = 3bB^3(1-\lambda)^{-1}\left(1 + \frac{1}{4}\xi_0^{(1)}\right), \\
r'_1(0) &= -3bB^3(1-\lambda)^{-1}\left(1 + \frac{1}{B}\xi_0^{(1)}\right), \quad r'_2(0) = -\frac{3}{4}bB^3(1-\lambda)^{-1}, \\
r''_0(0) &= 6bB^2(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)}), \quad r''_1(\tau) = 6bB^2(1-\lambda)^{-1}(B + \xi_0^{(1)}), \\
r''_2(0) &= -\frac{9}{4}bB^3(1-\lambda)^{-1}q_1, \quad q_1 = \frac{5}{2} + 3\xi_0^{(1)}\left(\frac{3}{2B} + \frac{1}{B^3}\xi_0^{(1)}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
(\zeta^{10})^2\zeta^{11} &= b_2\left(B^2 + \frac{1}{4}a_1^2\right)\sin\hat{t} + a_1b_2B\sin 2\hat{t} + \frac{1}{4}b_2a_1^2\sin 3\hat{t}, \\
\zeta^{10}\zeta^{11} &= \frac{1}{2}a_1b_2\sin 2\hat{t} + Bb_2\sin\hat{t}, \\
(\zeta^{10})^2 &= \left(\frac{1}{2}a_1^2 + B^2\right) + 2Ba_1\cos\hat{t} + \frac{1}{2}a_1^2\cos 2\hat{t}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

С учетом (4.22) уравнение (4.7) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\zeta_{,tt}^{31} + \zeta^{31} &= \frac{2b_4\mu'_2(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}}\sin\hat{t} + \frac{2a'_1\mu'_2(\tau)}{1-\lambda}\sin\hat{t} + \frac{a'_1\mu''_2(\tau)}{1-\lambda}\sin\hat{t} - \\
&\quad - \frac{2}{1-\lambda}\sin\hat{t}\left(-a'_4\sin\hat{t} + b'_4\cos\hat{t} + \frac{2}{3}r'_1\sin 2\hat{t} + \frac{3}{8}r'_2\sin 3\hat{t}\right) + \\
&\quad + \frac{b}{1-\lambda}\left[3b_2\left(B^2 + \frac{1}{2}a_1^2\right)\sin\hat{t} + a_1B\sin 2\hat{t} + \frac{1}{4}a_1^2\sin 3\hat{t}\right] + \\
&\quad + 3\left[b_2\xi_0^{(1)}\left(\frac{1}{2}a_1\sin 2\hat{t} + B\sin\hat{t}\right) + b_2(\xi_0^{(1)})^2\sin\hat{t}\right] - \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}}\left(-a_4\sin\hat{t} + b_4\cos\hat{t} + \frac{2}{3}r_1\sin 2\hat{t} + \frac{3}{8}r_2\sin 3\hat{t}\right). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Для того чтобы получить однородное по $\hat{t}$ асимптотическое решение, приравняем к нулю коэффициенты при $\cos\hat{t}$ в правой части (4.23). В результате имеем

$$b'_4 + b_4 = 0, \quad a'_2 + a_2 = q_3(\tau),$$

$$\begin{aligned}
q_3(\tau) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \left\{ \mu'_2(\tau) \left[2b_2(1-\lambda) + \frac{2}{1-\lambda} (a_1 + a'_1) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3bb_2}{1-\lambda} \left[\left(B^2 + \frac{1}{4} a_2^2 \right) + 2B\xi_0^{(1)} + (\xi_0^{(1)})^2 \right] + \frac{a_1\mu'_2(\tau)}{1-\lambda} \right\}, \\
q'_3(\tau) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \left\{ \mu'_2(\tau) \left[2b_2(1-\lambda) + \frac{2}{1-\lambda} (a'_1 + a_1) \right] + \frac{1}{1-\lambda} \mu''_2(\tau)(a_1 + a'_1) + \right. \\
&\quad + \frac{3bb_2}{1-\lambda} \left[\left(B^2 + \frac{1}{4} a_2^2 \right) + 2B\xi_0^{(1)} + (\xi_0^{(1)})^2 \right] + \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{a_1 a'_1 b b_2}{1-\lambda} \mu'_2(\tau) \left(\frac{2b'_2}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{2}{1-\lambda} (a''_1 + a'_1) \right) \right\}, \quad (4.24) \\
q_3(0) &= -\frac{bB^3}{1-\lambda} q_4, \quad q'_3(0) = -\frac{bB^3}{(1-\lambda)^{3/2}} q_5, \\
q_4 &= \frac{15}{4} (q_0 - 1) - 3\xi_0^{(1)} \left(\frac{2}{B} + \frac{1}{B^2} \xi_0^{(1)} \right), \\
q_5 &= \frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \right) \left[\frac{15}{4} q_0 - 3 \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{B} \xi_0^{(1)} \right) + \frac{1}{B} (\xi_0^{(1)})^2 \right] - \frac{3}{\sqrt{1-\lambda}}.
\end{aligned}$$

Решив систему (4.24), получаем

$$a_4(\tau) = e^{-\tau} \left[-\frac{bB^3}{1-\lambda} \left(\frac{65}{32} + q_2 \right) \int_0^\tau q_3(s) e^s ds \right], \quad b_4(\tau) = 0,$$

$$a'_4(0) = \frac{bB^3}{1-\lambda} q_6, \quad a''_4(0) = -bB^3(1-\lambda)^{3/2} q_7, \quad q_6 = q_1 + q_2, \quad q_7 = q_5 + \frac{q_6}{1-\lambda}.$$

Решение уравнения (4.7) с учетом (4.23) записывается в следующем виде:

$$\zeta^{31}(\hat{t}, \tau) = a_5(\tau) \cos \hat{t} + b_5(\tau) \sin \hat{t} - \frac{1}{3} r_3(\tau) \sin 2\hat{t} - \frac{1}{8} r_4(\tau) \sin 3\hat{t},$$

$$a_5(0) = 0, \quad b_5(0) = \frac{bB^3}{(1-\lambda)^{3/2}} q_{11}, \quad q_{11} = \frac{8}{3} \left[\frac{1}{2} + \xi_0^{(1)} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{2} \right) + \frac{9}{64} (2(1-\lambda)^{1/2} - 1) \right],$$

$$r_3(\tau) = \frac{3bb_2}{1-\lambda} (B + \xi_0^{(1)}) - \frac{4}{3\sqrt{1-\lambda}} [r_1(\tau) + r'_1(\tau)], \quad r_4(\tau) = \frac{3}{4} \left[\frac{bb_2 a_1^2}{1-\lambda} - \frac{r_2(\tau) + r'_2(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} \right],$$

$$r'_3(\tau) = \frac{3b}{1-\lambda} (B + \xi_0^{(1)}) (a_1 b'_2 + a'_1) - \frac{4}{3\sqrt{1-\lambda}} [r'_1(\tau) + r''_1(\tau)],$$

$$r'_4(\tau) = \frac{3b}{4(1-\lambda)} (b'_2 a_1^2 + 2b_2 a_1 a''_1) - \frac{4}{3\sqrt{1-\lambda}} [r'_2(\tau) + r''_2(\tau)],$$

$$r_3(0) = \frac{4bB}{\sqrt{1-\lambda}} (B + \xi_0^{(1)}) \left[\frac{1}{3} + \xi_0^{(1)} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad r_4(0) = \frac{3}{4} \frac{bB^3}{\sqrt{1-\lambda}} q_8, \quad q_8 = \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} - 1,$$

$$r'_3(0) = \frac{3B^3}{1-\lambda} (B + \xi_0^{(1)}) (1-\lambda)^{-1/2} q_9, \quad r'_4(0) = \frac{3}{8} \frac{bB^3}{\sqrt{1-\lambda}} q_{10}, \quad q_{10} = \frac{4}{\sqrt{1-\lambda}} - 1.$$

Вычислим некоторые слагаемые, которые содержатся в правой части уравнения (4.8):

$$\begin{aligned}\zeta^{10}(\zeta^{11})^2 &= \frac{1}{2} b_2^2 \left(B + \frac{1}{2} a_1 \cos \hat{t} - B \cos 2\hat{t} - \frac{1}{2} a_1 \cos 3\hat{t} \right), & (\zeta^{11})^2 &= \frac{1}{2} b_2^2 (1 - \cos 2\hat{t}), \\ \zeta^{12}(\zeta^{10})^2 &= \left(B^2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) a_2 \cos \hat{t} + a_1 a_2 B (1 + \cos 2\hat{t}) + \frac{1}{4} a_3 a_1^2 (\cos 3\hat{t} + \cos \hat{t}) + \\ &+ \left(B^2 + \frac{1}{4} a_1^2 \right) b_3 \sin \hat{t} + a_1 b_3 B \sin 2\hat{t} + \frac{1}{4} b_3 a_1^2 (\sin 3\hat{t} - \sin \hat{t}).\end{aligned}\quad (4.25)$$

С учетом (4.25) уравнение (4.8) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\zeta_{,tt}^{32} + \zeta^{32} &= -\frac{2\mu_2'(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} \left(a_4'' \cos \hat{t} + r_0'' - \frac{1}{3} r_1'' \cos 2\hat{t} - \frac{1}{8} r_2'' \cos 3\hat{t} \right) - \frac{2\mu_2'(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} (-a_3 \cos \hat{t} - b_3 \sin \hat{t}) - \\ &- \frac{2\mu_2'(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} a_2' \cos \hat{t} - \frac{1}{1-\lambda} \mu_2''(\tau) b_2 \cos \hat{t} - \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} \left(-a_5' \sin \hat{t} + b_5 \cos \hat{t} - \frac{2}{3} r_3' \cos 3\hat{t} - \frac{3}{8} r_4' \cos 3\hat{t} \right) - \\ &- \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} \left(-a_5 \sin \hat{t} + b_5 \cos \hat{t} + \frac{2}{3} r_3 \cos 2\hat{t} - \frac{3}{8} r_4 \cos 3\hat{t} \right) - \frac{2\mu_2'(\tau)}{1-\lambda} b_2 \cos \hat{t} + \\ &+ \left(a_4' \cos \hat{t} + r_0 - \frac{1}{3} r_1' \cos 2\hat{t} - \frac{1}{8} r_2' \cos 3\hat{t} \right) + \\ &+ \frac{b}{1-\lambda} \left(3 \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} B b_2^2 + \frac{1}{4} a_1 b_1^2 \sin \hat{t} - \frac{1}{2} B b_2^2 \cos 2\hat{t} - \frac{1}{4} a_1 b_2^2 \cos 3\hat{t} \right) + a_1 a_3 + \right. \right. \right. \\ &+ \left[a_3 \left(B^2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) + \frac{1}{4} a_3 a_1^2 \right] \cos \hat{t} + \left[b_3 \left(B^2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) - \frac{1}{4} b_3 a_1^2 \right] \sin \hat{t} + a_1 a_3 \cos 2\hat{t} + a_1 b_3 \sin 2\hat{t} + \\ &+ \left. \left. \left. \frac{1}{4} a_3 a_1^2 \cos 3\hat{t} + \frac{1}{4} b_3 a_1^2 \sin 3\hat{t} \right] \right\} + 3 \left[\xi_0^{(1)} (a_1 a_3 + 2a_3 \cos \hat{t} + 2b_3 \sin \hat{t} + a_1 a_3 \cos 2\hat{t} + a_1 b_3 \sin 2\hat{t}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} b_2^2 \xi_0^{(1)} + (\xi_0^{(1)})^2 (a_3 \cos \hat{t} + b_3 \sin \hat{t}) \right] \right). \quad (4.26)\end{aligned}$$

Для того чтобы получить однородное по $\hat{t}$ асимптотическое решение, приравняем к нулю коэффициенты при $\cos \hat{t}$ в правой части (4.26). В результате получаем

$$\begin{aligned}b_5' + b_5 &= q_{12}(\tau), & a_5' + a_5 &= q_{13}(\tau), \\ q_{12}(\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \left\{ \frac{a_4''}{1-\lambda} - \frac{2a_3\mu_2'(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{2b_2'\mu_2'(\tau)}{1-\lambda} + \frac{b_2\mu_2''(\tau)}{1-\lambda} + \frac{2}{1-\lambda} (b_2\mu_2'(\tau) + a_4') - \right. \\ &- \frac{3b}{1-\lambda} \left[\frac{1}{4} a_1 b_2^2 + a_3 \left(B^2 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) + \frac{1}{4} a_3 a_1^2 + 3a_3 \xi_0^{(1)} (2 + \xi_0^{(1)}) \right] \left. \right\}, \quad (4.27) \\ q_{13}(\tau) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} \left\{ \frac{2b_3\mu_2'(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{3b}{1-\lambda} \left[b_3 \left(B^2 + \frac{1}{4} a_1^2 \right) - \frac{1}{4} b_3 a_1^2 + b_3 \xi_0^{(1)} (2 + \xi_0^{(1)}) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Из уравнений (4.27) следует

$$a_5(\tau) = e^{-\tau} \int_0^\tau q_{13}(s) e^s ds, \quad b_5(\tau) = e^{-\tau} \frac{bB^3}{(1-\lambda)^{3/2}} + e^{-\tau} \int_0^\tau q_{12}(s) e^s ds.$$

С учетом (4.26) решение уравнения (4.8) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\zeta^{32}(\hat{t}, \tau) &= a_6(\tau) \cos \hat{t} + b_6(\tau) \sin \hat{t} + r_5(\tau) - \frac{1}{3} r_6(\tau) \cos 2\hat{t} - \frac{1}{3} r_7(\tau) \sin 2\hat{t} - \\ &\quad - \frac{1}{8} r_8(\tau) \cos 3\hat{t} - \frac{1}{8} r_9(\tau) \sin 3\hat{t}, \\ a_6(0) &= \frac{bB^2}{(1-\lambda)^2} q_{16}, \quad b_6(0) = 0, \quad q_{16} = -\frac{15}{2} (B + \xi_0^{(1)}) + \frac{1}{3} (q_{14} + Bq_{15}), \\ r_5(\tau) &= \frac{r_0''(\tau)}{1-\lambda} + \frac{3b}{1-\lambda} \left(\frac{1}{2} Bb_2^2 + a_1a_3 + a_1a_3\xi_0^{(1)} + \frac{1}{2} b_2^2\xi_0^{(1)} \right), \\ r_6(\tau) &= \frac{1}{3} \frac{r_1''(\tau)}{1-\lambda} + \frac{4}{3\sqrt{1-\lambda}} [r_3(\tau) + r_3'(\tau)] - \frac{3}{1-\lambda} \left(\frac{1}{2} Bbb_2^2 - a_1a_3(1-\xi_0^{(1)}) \right), \\ r_7(\tau) &= \frac{3ba_1b_3}{1-\lambda} (1+\xi_0^{(1)}), \quad r_8(\tau) = \frac{1}{8} \frac{r_2''(\tau)}{1-\lambda} + \frac{3}{4\sqrt{1-\lambda}} [r_4(\tau) + r_4'(\tau)] - \frac{3}{4} \frac{b}{1-\lambda} (a_1b_2^2 + a_3a_1^2), \\ r_9(\tau) &= \frac{3}{4} bb_3a_1^2(1-\lambda), \quad r_5(0) = \frac{15}{2} \frac{bB^2}{(1-\lambda)^2} (B + \xi_0^{(1)}), \quad r_6(0) = \frac{bB^2}{(1-\lambda)^2} q_{14}, \quad r_7(0) = 0, \\ r_8(0) &= \frac{1}{3} \frac{bB^3}{(1-\lambda)^2} q_{15}, \quad r_9(0) = -\frac{3}{4} \frac{B^3}{1-\lambda}, \\ q_{14} &= \frac{1}{3} [6(B + \xi_0^{(1)}) + 4(B + \xi_0^{(1)})q_9] + B \left(\frac{16}{3} q_1 - \frac{3}{2} (1-\lambda) \right), \quad q_{15} = q_{10} - 1 + 3(1-\lambda).\end{aligned}$$

Продолжая вычисления, получаем выражение для смещения $\xi(\hat{t}, \tau)$:

$$\xi(\hat{t}, \tau) = \bar{\xi}(\zeta^{10} + \delta\zeta^{11} + \delta^2\zeta^{12} + \dots) + \bar{\xi}^3(\zeta^{30} + \delta\zeta^{31} + \delta^2\zeta^{32} + \dots) + \dots \quad (4.28)$$

5. Максимальное смещение. Динамическая нагрузка λ_D определяется из условия

$$\left. \frac{d\lambda}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_a} = 0, \quad (5.1)$$

где ξ_a — значение величины ξ , при котором λ достигает максимального значения.

Обозначим через $\hat{t}_a, t_a, \tau_a$ критические значения величин $\hat{t}, t, \tau$ соответственно. Предположим, что имеют место следующие асимптотические разложения:

$$\begin{aligned}\hat{t}_a &= (\hat{t}_0 + \delta\hat{t}_{01} + \delta^2\hat{t}_{02} + \dots) + \bar{\xi}(\hat{t}_{10} + \delta\hat{t}_{11} + \delta^2\hat{t}_{12} + \dots) + \bar{\xi}^2(\hat{t}_{20} + \delta\hat{t}_{21} + \delta^2\hat{t}_{22} + \dots) + \dots, \\ t_a &= (t_0 + \delta t_{01} + \delta^2 t_{02} + \dots) + \bar{\xi}(t_{10} + \delta t_{11} + \delta^2 t_{12} + \dots) + \bar{\xi}^2(t_{20} + \delta t_{21} + \delta^2 t_{22} + \dots) + \dots, \\ \tau_a &= \delta t_0 = \delta[(t_0 + \delta t_{01} + \delta^2 t_{02} + \dots) + \bar{\xi}(t_{10} + \delta t_{11} + \delta^2 t_{12} + \dots) + \\ &\quad + \bar{\xi}^2(t_{20} + \delta t_{21} + \delta^2 t_{22} + \dots) + \dots].\end{aligned} \quad (5.2)$$

При максимальном смещении с учетом (4.2) имеем

$$\xi_{,\hat{t}} + (1-\lambda)^{-1/2} \{ \mu_1(\tau)\bar{\xi} + \mu_2(\tau)\bar{\xi} + \mu_3'(\tau)\bar{\xi}^2 + \dots \} \xi_{,\hat{t}} + \delta(1-\lambda)^{-1/2} \xi_{,\tau} = 0. \quad (5.3)$$

Подставляя (4.28) в (5.3), используя (5.2) и приравнивая после ряда преобразований коэффициенты при величинах $\varepsilon^i \delta^j$, $i = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, 3, \dots$, получаем следующую систему уравнений:

$$O(\varepsilon): \quad \zeta_{,\hat{t}}^{10} = 0, \quad O(\varepsilon\delta): \quad \hat{t}_{01}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} + t_{01}\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} + (1-\lambda)^{-1/2}\zeta_{,\tau}^{10} + \zeta_{,\hat{t}}^{10} + \zeta_{,\hat{t}}^{11} = 0,$$

$$O(\varepsilon\delta^2): \quad \hat{t}_{02}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} + t_0\zeta_{,\hat{t}\tau}^{11} + \hat{t}_{01}^2\zeta_{,\hat{t}\hat{t}\hat{t}}^{10}/2 + \hat{t}_{01}t_0\zeta_{,\hat{t}\hat{t}\tau}^{10} + \hat{t}_{01}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{11} + t_0\zeta_{,\hat{t}\tau}^{11} + \zeta_{,\hat{t}}^{12} + \\ + \hat{t}_{01}(1-\lambda)^{-1/2}\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} + t_0(1-\lambda)^{-1/2}\zeta_{,\tau\tau}^{10} = 0, \quad (5.4)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \hat{t}_{01}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} = 0;$$

$$O(\varepsilon^3): \quad \hat{t}_{20}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} + \zeta_{,\hat{t}}^{30} + (1-\lambda)^{-1}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{10} + \hat{t}_0^2\zeta_{,\hat{t}\hat{t}\hat{t}}^{10}/2 = 0,$$

$$O(\varepsilon^3\delta): \quad \hat{t}_{21}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} + t_{20}\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} + [(\hat{t}_{01}\hat{t}_{11} + 2\hat{t}_{20}\hat{t}_{01})\zeta_{,\hat{t}\hat{t}\hat{t}}^{10} + (2\hat{t}_{20}t_0 + 2\hat{t}_{20}t_{10})\zeta_{,\hat{t}\hat{t}\tau}^{10}]/2 + \hat{t}_{20}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{11} + \\ + \hat{t}_{01}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{30} + \zeta_{,\hat{t}}^{31} + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(\tau)\hat{t}_{01}\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10} + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(\tau)t_0\zeta_{,\hat{t}}^{10} + \\ + (1-\lambda)^{-1/2}\mu'_2(\tau)\zeta_{,\hat{t}}^{11} + (1-\lambda)^{-1/2}\hat{t}_{20}\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10} + (1-\lambda)^{-1/2}\zeta_{,\tau}^{30} = 0. \quad (5.5)$$

Подставляя $\zeta_{,\hat{t}}^{10}$ из (4.14) в первое уравнение системы (5.4), после упрощения получаем

$$\sin \hat{t}_0 = 0,$$

следовательно,

$$\hat{t}_0 = \pi. \quad (5.6)$$

В (5.6) $\hat{t}_0$ — наименьшее нетривиальное решение.

Из второго уравнения системы (5.4) следует

$$\hat{t}_{01} = -\frac{1}{\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0)} \left[t_0\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \zeta_{,\hat{t}}^{11}(\hat{t}_0, 0) \right],$$

$$\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) = -B, \quad \zeta_{,\hat{t}\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) = 0, \quad \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) = 0, \quad \zeta_{,\hat{t}}^{11}(\hat{t}_0, 0) = -B,$$

поэтому

$$\hat{t}_{01} = 1 - (1-\lambda)^{-1/2}.$$

Аналогично из третьего уравнения системы (5.4) следует

$$\hat{t}_{02} = -\frac{1}{\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0)} \left[t_0\zeta_{,\hat{t}\tau}^{11}(\hat{t}_0, 0) + \frac{t_{01}}{\sqrt{1-\lambda}} \zeta_{,\hat{t}\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \frac{t_0}{\sqrt{1-\lambda}} \zeta_{,\tau\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) \right],$$

$$\zeta_{,\hat{t}\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) = B, \quad \zeta_{,\hat{t}\tau}^{11}(\hat{t}_0, 0) = -B[1 - 3/(2\sqrt{1-\lambda})], \quad \zeta_{,\tau\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) = B,$$

поэтому

$$\hat{t}_{02} = \left(t_0 + \frac{\hat{t}_{01}}{\sqrt{1-\lambda}} \right) \left[-B \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{1-\lambda}} \right) \right] + t_0\hat{t}_{01} - \frac{t_{01}}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Из первого уравнения системы (5.5) находим

$$\hat{t}_{10} = \hat{t}_{20} = 0.$$

После упрощения второго уравнения системы (5.5) получаем

$$\hat{t}_{21} = -\frac{1}{\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0)} \left[t_0\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \frac{t_{01}\mu'_2(0)}{\sqrt{1-\lambda}} \zeta_{,\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \zeta_{,\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} + \zeta_{,\tau}^{30}(\hat{t}_0, 0) + \zeta_{,\hat{t}}^{31}(\hat{t}_0, 0) \right],$$

$$\zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) = \frac{bB^3}{1-\lambda} q_{17}, \quad \zeta_{,\hat{t}\tau}^{31}(\hat{t}_0, 0) = \frac{bB^3}{\sqrt{1-\lambda}} q_{18}, \quad \zeta_{,\hat{t}}^{30}(\hat{t}_0, 0) = -\frac{B}{1-\lambda} q_{19},$$

$$\zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) = \frac{bB^3}{1-\lambda} q_{20}, \quad q_{17} = -\frac{1}{B} q_2 + \frac{2}{3} (1 + \xi_0^{(1)}) + \frac{9}{8},$$

$$q_{18} = -q_{11} - \frac{8}{3} q_1 - \frac{9}{8} \left(\frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} - 1 \right), \quad q_{19} = q_2 + q_4, \quad q_{20} = q_{19} + 4 \left(1 + \frac{\xi_0^{(1)}}{B} \right) - \frac{3}{8},$$

следовательно,

$$\hat{t}_{21} = bB \left[\frac{B\hat{t}_{01}}{1-\lambda} q_{17} \mu'_2(0) \frac{1-\hat{t}_{01}}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{B}{\sqrt{1-\lambda}} q_{18} + \frac{B}{\sqrt{1-\lambda}} q_{20} \right].$$

Определим величину максимального смещения (критическое значение) ξ_a . С учетом (4.28) имеем

$$\xi_a = \bar{\xi}(\zeta_a^{10} + \delta \zeta_a^{11} + \delta^2 \zeta_a^{12} + \dots) + \bar{\xi}^3(\zeta_a^{30} + \delta \zeta_a^{31} + \delta^2 \zeta_a^{32} + \dots) + \dots,$$

где

$$\zeta_a^{(ij)} = \zeta^{ij}(\hat{t}_a, \tau_a). \quad (5.7)$$

После разложения каждого слагаемого в (5.7) в ряд Тейлора и некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \xi_a = & \bar{\xi} \{ \zeta^{10}(\hat{t}_0, 0) + \delta [t_0 \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \zeta^{12}(\hat{t}_0, 0)] + \delta^2 [t_{01} \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \hat{t}_{01} \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0)/2 + \\ & + t_0^2 \zeta_{,\tau\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0)/2 + \hat{t}_{01} \zeta_{,\hat{t}}^{11}(\hat{t}_0, 0) + \zeta^{12}(\hat{t}_0, 0)] \} + \\ & + \bar{\xi}^3 \{ \zeta^{30}(\hat{t}_0, 0) + \delta [t_{20} \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + t_0 \zeta_{,\tau}^{30}(\hat{t}_0, 0) + \zeta^{31}(\hat{t}_0, 0)] + \\ & + \delta^2 [t_{21} \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \hat{t}_{01} \hat{t}_{21} \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0)/2 + \hat{t}_{21} \zeta_{,\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) + \hat{t}_{01}^2 \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0)/2 + \\ & + t_{01} \zeta_{,\tau}^{30}(\hat{t}_0, 0) + t_0^2 \zeta_{,\tau\tau}^{31}(\hat{t}_0, 0)/2 + \zeta^{32}(\hat{t}_0, 0)] \} + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Выражения для слагаемых, входящих в (5.8), можно упростить:

$$\begin{aligned} \zeta^{10}(\hat{t}_0, 0) &= 2B, \quad \zeta_{,\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) = -B, \quad \zeta^{10}(\hat{t}_0, 0) = \frac{4bB^2}{1-\lambda} q_{21}, \quad \zeta_{,\hat{t}}^{30}(\hat{t}_0, 0) = -\frac{19}{4} \frac{bB^3}{1-\lambda} q_{23}, \\ \zeta^{31}(\hat{t}_0, 0) &= 0, \quad \zeta_{,\hat{t}}^{11}(\hat{t}_0, 0) = B, \quad \zeta^{32}(\hat{t}_0, 0) = \frac{bB^3}{1-\lambda} q_{24}, \quad \zeta_{,\tau\tau}^{30}(\hat{t}_0, 0) = \frac{bB^3}{1-\lambda} q_{25}, \\ \zeta_{,\tau\tau}^{10}(\hat{t}_0, 0) &= 0, \quad \zeta_{,\tau}^{30}(\hat{t}_0, 0) = \frac{bB^3}{1-\lambda} q_{22}, \quad \zeta_{,\hat{t}\hat{t}}^{10}(\hat{t}_0, 0) = -B, \quad \zeta^{12}(\hat{t}_0, 0) = 0, \\ q_{21} &= 1 + \frac{1}{8} \xi_0^{(1)} \left[6 \left(\frac{3}{2B} + \frac{1}{B^2} \xi_0^{(1)} \right) - 1 \right], \quad q_{22} = 6 \left(1 + \frac{1}{B} \xi_0^{(1)} \right) + 3 - q_6, \\ q_{23} &= \frac{1}{19} - 4 \left[\frac{5}{2} - 9 \left(\frac{3}{2B} + \frac{1}{B^2} \xi_0^{(1)} \right) \right], \quad q_{24} = 15 \left(1 + \frac{1}{B} \right) - \frac{11}{24} \frac{1}{B} q_{14}, \\ q_{25} &= \frac{q_7}{\sqrt{1-\lambda}} + 4 \left(1 + \frac{1}{B} \xi_0^{(1)} \right) - \frac{9}{32}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8), после упрощения получаем

$$\xi_a = e_1 \bar{\xi} + e_3 \bar{\xi}^3 + \dots, \quad (5.10)$$

где

$$e_1 = 2B(1 + A_{11}\delta + A_{12}\delta^2), \quad e_3 = \frac{4bB^3}{1-\lambda} q_{21}(1 + A_{31}\delta + A_{32}\delta^2),$$

$$A_{11} = -\frac{1}{2}t_0, \quad A_{12} = -\frac{1}{2}t_{01} + \frac{3}{2}\hat{t}_{01} - \frac{1}{2}t_0^2, \quad A_{31} = \frac{1}{4B^2q_{21}}t_0(1-\lambda)\left(\frac{t_0}{1-\lambda}q_{19} - q_{20}\right),$$

$$A_{32} = \frac{1}{4q_{21}}(1-\lambda)\left[\frac{1}{bB^2}\left(\hat{t}_{21} - t_{21} - \frac{1}{2}\hat{t}_{01}\hat{t}_{02}\right) + \frac{1}{1-\lambda}\left(t_{01}q_{19} - \frac{19}{2}t_{01}^2q_{20} + \frac{q_{23}}{1-\lambda} + \frac{1}{2}t_{20}^2q_{25}\right)\right].$$

Уравнение (5.10) аналогично уравнению, из которого получена формула (2.10), поэтому в случае динамического выпучивания имеем

$$\bar{\xi} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{e_1}{e_3}}. \quad (5.11)$$

Из (5.11) с учетом (5.10) следует

$$(1 - \lambda_D)^{3/2} = \frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{q_{21}}} \sqrt{b} \lambda_D \bar{\xi} \left(\frac{1 + A_{11}\delta + \delta^2 A_{12}}{1 + A_{31}\delta + \delta^2 A_{32}} \right)^{-1/2}. \quad (5.12)$$

Разделив (5.12) на (2.11), получаем соотношение между динамической нагрузкой выпучивания λ_D и статической нагрузкой выпучивания λ_S :

$$\left(\frac{1 - \lambda_D}{1 - \lambda_S} \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{q_{21}}} \frac{\lambda_D}{\lambda_S} \left(\frac{1 + A_{11}\delta + A_{12}\delta^2}{1 + A_{31}\delta + A_{32}\delta^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.13)$$

Таким образом, если задана одна из нагрузок λ_D или λ_S , то можно найти другую, не решая вновь сложную задачу. Если конструкция, в которой отсутствует демпфирование, нагружена ступенчатой нагрузкой после предварительного статического нагружения, то согласно (5.12), (5.13) динамическая нагрузка выпучивания вычисляется по формуле

$$(1 - \lambda_D)^{3/2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \sqrt{b} \lambda_D \bar{\xi} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \xi_0^{(1)} \left[6 \left(\frac{3}{2B} + \frac{1}{B^2} \xi_0^{(1)} \right) - 1 \right] \right\}^{-1/2},$$

$$\left(\frac{1 - \lambda_D}{1 - \lambda_S} \right)^{3/2} = \sqrt{2} \frac{\lambda_D}{\lambda_S} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \xi_0^{(1)} \left[6 \left(\frac{1}{2B} + \frac{1}{B^2} \xi_0^{(1)} \right) - 1 \right] \right\}^{-1/2}. \quad (5.14)$$

Если предварительное статическое нагружение отсутствует, то $\xi_0 = \xi_0^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) и из (5.14) получаем

$$(1 - \lambda_D)^{3/2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \sqrt{b} \lambda_D \bar{\xi}, \quad \left(\frac{1 - \lambda_D}{1 - \lambda_S} \right)^{3/2} = \sqrt{2} \frac{\lambda_D}{\lambda_S}. \quad (5.15)$$

Формула (5.15) впервые получена в [8] с использованием метода фазовой плоскости. Формулы (5.12), (5.13) справедливы при $0 < \varepsilon \ll 1$ и $0 < \delta \ll 1$.

6. Анализ полученных результатов. Динамическая нагрузка выпучивания вычислялась с использованием пакета MATLAB. Зависимости динамической нагрузки выпучивания λ_D от различных параметров задачи приведены на рис. 2–4. При наличии предварительного статического нагружения динамическая нагрузка выпучивания λ_D больше, чем в его отсутствие. Значение λ_D увеличивается с увеличением коэффициента демпфирования и уменьшается с увеличением начального несовершенства $\bar{\xi}$.

Заключение. С использованием метода возмущения и асимптотического разложения по двум малым параметрам выполнен анализ задачи о динамическом выпучивании конструкции. Полученные результаты имеют асимптотический характер. Несмотря на то что результаты получены для нелинейной кубической модели упругой конструкции, предложенный метод можно использовать при анализе реальных конструкций, таких как тороидальные, цилиндрические и сферические оболочки. Конструкции, обладающие нелинейным демпфированием, также можно исследовать с использованием предложенного метода возмущений.

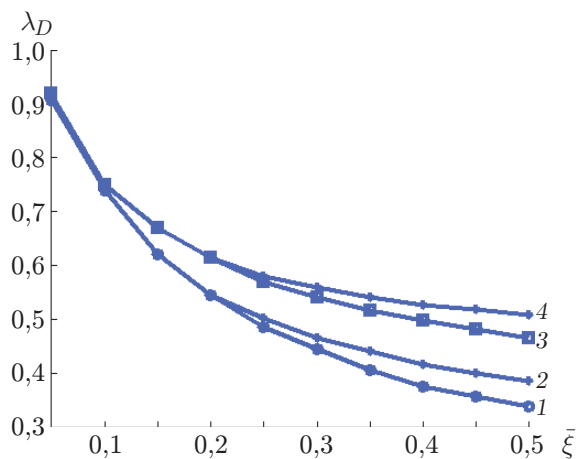


Рис. 2

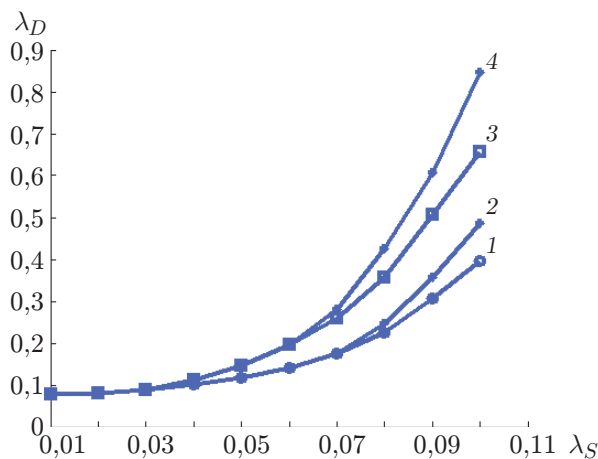


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость динамической нагрузки выпучивания λ_D от параметра несовершенства $\bar{\xi}$, полученная по уравнению (5.12), при различных значениях параметров ξ_0 и δ :

1 — $\xi_0 = 0$, $\delta = 0$, 2 — $\xi_0 = 0$, $\delta = 0,02$, 3 — $\xi_0 \neq 0$, $\delta = 0$, 4 — $\xi_0 \neq 0$, $\delta = 0,02$

Рис. 3. Зависимость динамической нагрузки выпучивания λ_D от статической нагрузки выпучивания λ_S , полученная по уравнению (5.13), при различных значениях параметров ξ_0 и δ (обозначения те же, что на рис. 2)

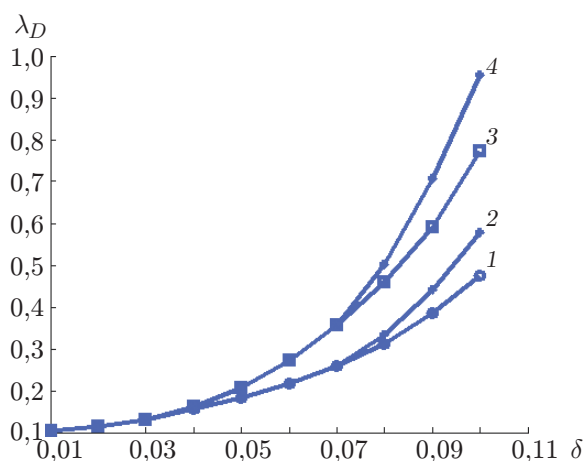


Рис. 4. Зависимость динамической нагрузки λ_D от коэффициента демпфирования δ при $\bar{\xi} = 0,04$ и различных значениях параметров ξ_0 и λ_0 :

1 — $\xi_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$, 2 — $\xi_0 = 0$, $\lambda_0 = 0,02$, 3 — $\xi_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 0$, 4 — $\xi_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 0,02$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Simitses G. J.** Effect of preloading on the dynamic stability of structures // AIAA J. 1983. V. 12, N 8. P. 1174–1180.
2. **Simitses G. J.** Dynamic stability of suddenly loaded structures. N. Y.: Springer, 1990.
3. **Tanov R.** Static and dynamic buckling of laminated composite shells / R. Tanov, A. Tabiei. Cincinnati: Univ. of Cincinnati, 1998.
4. **Tabiei A., Tanov R., Simitses G. J.** Numerical simulation by cylindrical laminated shells under impulse lateral pressure // AIAA J. 1999. V. 37. P. 629–633.
5. **Tanov R., Tabiei A., Simitses G. J.** Effect of static pre-loading on the dynamic buckling of laminated cylinder under sudden pressure // Mech. Composite Materials Structure. 1999. V. 6. P. 195–206.
6. **Ozoigbo G. E., Ette A. M.** On the maximum displacement and static buckling of circular cylindrical shell // J. Appl. Math. Phys. 2019. V. 7. P. 2868–2882.
7. **Budiansky B.** Dynamic buckling of elastic structures: Criteria and estimation // Dynamic stabilities of structures. Oxford: Pergamon Press, 1966. P. 83–106.
8. **Budiansky B., Hutchinson J. W.** Dynamic buckling of imperfection sensitive structures // Proc. of the 11th Intern. congress of applied mechanics, Munich (Germany), 1964. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1966. P. 635–651.
9. **Hutchinson J. W., Budiansky B.** Dynamic buckling estimates // AIAA J. 1966. V. 4. P. 525–530.

*Поступила в редакцию 22/I 2020 г.,
после доработки — 24/III 2020 г.
Принята к публикации 27/IV 2020 г.*
