

УДК 165.1

DOI 10.15372/PS20230407

EDN BCFJGC

А.Ю. Сторожук**ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПСИХОЛОГИИ РАЗВИТИЯ**

Целью статьи является рассмотрение этапов развития математического доказательства как последовательных этапов развития человеческого мышления, идущего по пути нарастания абстрактности. Разбирается точка зрения Я. Хакинга, выделяющего разные стили математического доказательства: подходы Декарта и Лейбница. Показано, что их нельзя рассматривать вслед за Хакингом как независимые подходы к пониманию доказательства. Они иллюстрируют развитие человеческого сознания, которое продвигается от конкретных представлений к абстрактному мышлению, поэтому подходы Декарта и Лейбница следует рассматривать как исторически развивающиеся подходы к пониманию доказательности.

Ключевые слова: математическое доказательство; ясность и отчетливость; Декарт; Ньютон; Лейбниц

A.Yu. Storozhuk**THE EVOLUTION OF MATHEMATICAL PROOF
FROM THE VIEWPOINT OF DEVELOPMENTAL
PSYCHOLOGY**

The article is aimed to examine the stages of development of mathematical proof as successive stages in the development of human thinking which progresses towards the increase of abstraction. The point of view of I. Hacking is analyzed, who identifies different styles of mathematical proof – the approaches of Descartes and Leibniz. It is shown that these styles cannot be considered, following Hacking, as independent approaches to understanding proof. They represent the development of human consciousness, which advances from concrete concepts to abstract thinking, therefore the approaches of Descartes and Leibniz should be considered as historically developing approaches to understanding evidence.

Keywords: mathematical proof; clarity and distinctness; Descartes; Newton; Leibniz

Введение

Данный текст во многом является возражением против позиции Яна Хакинга, изложенной в его книге «Почему вообще существует философия математики?» [14]. Хакинг описал два подхода к математическому доказательству, родоначальниками которых он считает Р. Декарта и Г. Лейбница. Подход Декарта характеризуется наглядностью и требует сохранения обозримости доказательства в целом. Лейбниц требует формальной правильности на каждом шаге и при выполнении этого требования допускает возможность иметь сколь угодно длинное доказательство. Обозримость при этом утрачивается. Хакинг считает эти подходы двумя независимыми традициями в истории математики.

Цель статьи – опровергнуть гипотезу Я. Хакинга о независимом существовании двух типов подходов к математическому доказательству и предложить альтернативную точку зрения. Наша гипотеза состоит в том, что эти традиции представляют собой последовательные этапы развития математического мышления по пути повышения абстрактности, т.е. не являются отдельными независимыми стилями рассуждений. В качестве методологии исследования используется подход, сформулированный в психологии развития Л.С. Выготского [3], который показывает, что как в индивидуальном развитии, так и исторически мышление проходит определенные фазы, развивается от конкретного к абстрактному. Для доказательства выдвигемой гипотезы будет продемонстрирована связь между подходами Декарта и Лейбница путем демонстрации наличия промежуточных звеньев: математических трудов И. Ньютона. Кроме того, следует признать маловероятной гипотезу о том, что определенные стили математического мышления появляются «на пустом месте», т.е. возникают вдруг, без длительного предшествующего обучения математиков известным в их время математическим приемам.

Опыт демонстративного доказательства

Сам Я. Хакинг пишет о том, что стиль демонстративного доказательства появился задолго до Декарта. В качестве примера он ссылается на Платона, который в диалоге «Менон» показывает, что знание является припоминанием [10].

Математическое знание получает развитие в эпоху Возрождения, часто в связи с решением задач из механики и астрономии. Основопроложник философии Нового времени Р. Декарт опирается на подход, выработанный в геометрии Эвклида, соединяя его с алгебраическими методами. Критерием истинности в философии Декарта служили «ясность и отчетливость». Применительно к математическому доказательству данный критерий трансформировался в идею обозримости. «В картезианской методологии, – пишет Хакинг, – для того чтобы постичь истину, вы должны держать в голове все доказательство сразу» [14, с. 45]. Доказательство полностью понятно, когда оно во всей полноте удерживается в сознании. Прежде чем понять математическое доказательство, его нужно видеть как целое. «Вы должны быть способны пробежать доказательство как целое, видеть его в целом, прежде чем правильно его понять. Рассуждение является само-аутентичным только в том случае, если оно полностью очищено, полностью лишено даже шагов, так что вы можете понять все доказательство в целом» [Там же].

Хакинг прослеживает эту традицию визуализации вплоть до современных математики и философии. В частности, требование ясности развивается в философии Л. Витгенштейна: «4.116. Все, что мыслимо, должно мыслиться ясно. Все, что может быть передано словами, должно передаваться ясно» [1, с. 18]. Ясность является неотъемлемым свойством доказательства, последнее должно быть обозримо. Для Витгенштейна, отмечает Хакинг, только та логическая структура, воспроизведение которой является простой задачей, может называться доказательством [14, с. 45–47].

В качестве примера современного математика, следующего идее очевидности, Хакинг называет А. Гротендика [14, с. 48–50], писавшего, что математическое творение – это видение, которое постепенно исчезает, раскрывая очевидную вещь, которую никто не видел, принимая форму в очевидном утверждении, которое никто не формулировал. Истинная цель глубокой математики – создание очевидности.

На наш взгляд, пример Гротендика как приверженца традиции очевидности и обозримости доказательства крайне неудачен. Гротендик годами пользовался аналитическими методами в геометрии, а «видение» пришло к нему гораздо позже, почти через год после того, как он решил бросить занятия математикой: «...Двенадцать ключевых тем моего труда все вместе, словно повинувшись тайному

велению рока, сложились в одну симфонию – или, если взять другой образ, каждая из них оказалась воплощением одной из точек зрения, в совокупности составивших единое широкое *видение*. Видение это начало выступать из тумана, а очертания его – становиться узнаваемыми, не раньше, чем к 1957–1958 гг., годам напряженного вынашивания идей. ...Правда, что я не смог бы конкретно указать момент, пережитый мною как внезапное рождение видения, или, оглянувшись назад, в теперешней перспективе узнать и выбрать такую минуту. Новое видение – нечто заведомо слишком обширное, чтобы появиться сразу, в один миг. Ему нужны долгие годы, если не целые поколения, чтобы, проникнуть в душу, постепенно завладеть тем или теми, кто неотрывно, внимательно созерцает... И, опять-таки, видение слишком объемно, чтобы говорить о возможности уловить его, “схватить”, как хватаешь первое же понятие, возникшее из-за поворота на твоей дороге» [4, с. 44–45].

Вообще, Гротендик пишет, что вступил в математику через «боковой подъезд», через математический анализ и только спустя годы пришел к занятиям геометрией, развивая независимо несколько тем. И через несколько лет занятий геометрией с использованием аналитических методов он обнаружил в себе склонность довольствоваться в математике не числом, размером, а именно формой, или, точнее, структурой математических объектов. (Про ведущую роль структуры в генерации научных открытий мы писали и ранее [17].) «Структура вещи – совсем не что-то такое, что мы могли бы “изобрести”, – утверждает Гротендик. – Мы можем лишь выводить ее на свет терпеливо, смиренно; знакомясь с ней, ее *раскрывать*» [4, с. 48].

Однако традиция очевидности гораздо легче прослеживается в глубь времен. Она видна, например, в различных системах записи чисел (вавилонской, египетской, греческой, римской, арабской, китайской и т.д.), которые позволяли провести непосредственную проверку и пересчет. Число изображало количество наглядно, каждый элемент записи числа мог быть поставлен в соответствие считаемым предметам [13].

Вторым этапом развития математического мышления можно назвать деятельность Фалеса и Пифагора, у которого основным элементом рассуждения является геометрическое построение [8]. Здесь требование наглядности реализуется в полной мере, но в отличие от допускаемой Лейбницем сколь угодно большой продолжительности

рассмотрения, выдвигается требование конечности [6]. Пифагор «увидел» потенциальную бесконечность числового ряда и запретил идти этим путем, отказавшись от иррациональных чисел [12].

Геометрия Эвклида [16] является хорошим примером парадигмы обозримости конструктивных построений, изложение у Эвклида подчинено идеям красоты. Во второй книге «Начал» он дает алгоритмы построения золотой пропорции, а последняя книга завершается построением правильных многогранников – пяти Платоновых тел. Диофант [5] также следует идее поиска красоты и гармонии, но его метод меняется в сторону большей абстрактности, геометрические построения Эвклида замещаются уравнениями. Чтобы перейти от обозначений Эвклида к наглядности, нужно сделать один шаг, а именно квадрат интерпретировать как вторую степень уравнения, а куб – как третью. Но уже у Эвклида появляются четвертые и шестые степени, что выходит за рамки визуальных представлений.

Таким образом, наглядность, или визуализация, математических представлений более свойственна раннему периоду развития математики. Эта особенность хорошо укладывается в теорию постепенного развития человеческого мышления Л.С. Выготского [2]. Выготский отмечает наглядность и образность раннего этапа человеческого мышления как в номогенезе, так и в онтогенезе. Однако при дальнейшем развитии человека мышление приобретает все большую абстрактность.

Аналитическое доказательство

Хакинг рассматривает переход от декартовского доказательства к доказательству у Лейбница как смену идеала, хотя сразу же признает, что это деление достаточно искусственное: «Это только два различных идеала, которые задействованы в картезианском (все представлено в голове разом) и лейбницевском (последовательность предложений) понятиях доказательства. Они четкие, но искусственные. Есть много, просто много математических доказательств, но немногие из них соответствуют какому-либо идеалу» [14, с. 62].

Поэтому мы продолжим трактовку перехода к традиции рассмотрения доказательства как последовательности предложений с точки зрения психологии развития, основанной на принципе историзма. Этот принцип требует совершения последовательного перехода от Декарта к Лейбницу, поэтому обратим внимание на извест-

ных философов и математиков, которых можно рассматривать как предшественников Лейбница. И сразу обнаруживается, что таковых довольно много, но самым известным предшественником, упоминаемым в связи с именем Лейбница, является И. Ньютон [9]. Пресловутый спор о первенстве открытия дифференциального и интегрального исчисления свидетельствует о том, что Ньютон и Лейбниц общались и содержание их основных открытий каждому было известно. Дифференциальное исчисление основано на визуализируемом понятии касательной к графику функции, однако появление идеи бесконечно малого требует отхода от визуальных представлений в область теоретических понятий.

Вопрос в том, как скоро была реализована предполагаемая в математическом анализе строгость рассуждений. Явно это происходило спустя достаточно длительное время, так как изначально понятие дифференцируемости долго оставалось близким к понятию непрерывности, так что считалось, что непрерывная функция дифференцируема, до появления контрпримера в виде функции модуля числа в точке ноль. Многочисленные примеры правдоподобных, но ошибочных рассуждений в математике приводит Д. Пойа [11]. М. Клайн отмечает, что положение в математике XVII–XVIII вв. было весьма затруднительным: «Утрата критериев абсолютности истины, все возрастающая сложность математики и естественных наук, неуверенность в выборе правильного подхода к математике привели к тому, что большинство математиков оставили вопросы оснований» [7, с. 14]. Программа логицизма, развернутая в конце XIX–XX в., позволила свести различные области математики к единому основанию, формализовать определенные правила вывода. Произошли уточнение и переопределение многих понятий и увеличение строгости выводов. И только спустя три века интенсивной работы математиков стала возможной ситуация, о которой говорит Я. Хакинг: «Современный быстрый компьютер, очевидно, является воплощением концепции доказательств Лейбница» [14, с. 63]. То есть реальная история математики показывает, что путь к достаточной строгости математических выводов был достаточно долгим и сложным.

Кроме того, психологи и философы отмечают, что нарастание абстрактности мышления происходит одновременно в разных областях и затрагивает общее мировоззрение. Так, В.Л. Чечулин и А.А. Лопатин показали, что трансформация математического до-

казательства шла параллельно с развитием представлений о причинности [15]. В частности, непосредственно наглядные аксиомы характерны для синкретизма, а современные абстрактные представления воплощаются в представления о действии множественной причинности.

Заключение

На наш взгляд, подход Я. Хакинга к выделению стилей математического доказательства является исторически некорректным. Он рассматривает демонстративное и аналитическое доказательства изолированно, как нечто фиксированное, не задаваясь вопросом об их происхождении. Мы показали, что развитие подходов к математическому доказательству происходило исторически. С точки зрения психологии развития мышление развивается от конкретно-образных представлений к более абстрактным. В этом смысле подход Декарта к математическому доказательству с его требованием наглядности и обозримости всего доказательства надо рассматривать как более ранний этап математического мышления, а подход Лейбница – как переход к более абстрактному этапу мышления. Последний был реализован значительно позже, уже в XX в. С точки зрения Хакинга, хорошим примером доказательства в духе Лейбница являются компьютерные доказательства.

Литература

1. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: Канон+, 2017.
2. Выготский Л.С. Психология развития человека. М.: ЭКСМО, 2005.
3. Выготский Л.С., Лурия А.Р. Этюды по истории поведения: Обезьяна. Прimitив. Ребенок. М.: Педагогика-Пресс, 1993.
4. Гротендик А. Урожай и посе́вы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
5. Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах / Пер. с древнегреч. И.Н. Веселовского; ред. и коммент. И.Г. Башмаковой. М.: Наука, 1974.
6. Иванова Н.И. Иррациональные числа, история и методы доказательства иррациональности // Заметки ученого. 2020. № 12. С. 51–54.
7. Клайн М. Математика. Утрата определенности / Пер. с англ. Ю.А. Данилова; под ред. И.М. Яглома. М.: Мир, 1984.
8. Липов А.Н. О «несоизмеримых сущностях» в философии пифагорейцев. К философским основаниям иррациональных пропорций в науке и культуре // Философская мысль. 2018. № 11. С. 93–110.

9. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе. М.: Изд-во АН СССР, 1948.
10. *Платон.* Менон / Пер. С.А. Ошерова // Платон. Собрание сочинений: В 4 т. М.: Мысль, 1990. Т. 1. С. 375–421.
11. *Поля Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. И.А. Вайнштейна; под ред. С.А. Яновской. 2-е изд., испр. М: Наука, 1975.
12. *Полеишук А.С.* Знаменитые классические задачи древности // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2012. № 3 (18). С. 42–48.
13. *Тихвинский В.И., Холмогоров В.В.* Системы счисления в древности и современности // International Journal of Open Information Technologies. 2022. Т. 10, № 6. С. 46–56.
14. *Хакинг Я.* Почему вообще существует философия математики? / Пер. с англ. В.В. Целищева. М.: Канон+, 2020.
15. *Чечулин В.Л., Лопатин А.А.* К периодизации истории развития доказательств непротиворечивости математических теорий // Сибирский философский журнал. 2017. Т. 15. № 1. С. 20–34.
16. *Эвклид.* Начала. Книги I–IV. М.: Государственное издательство физико-технической литературы, 1950.
17. *Storozhuk A.* A new perceptual activity approach to scientific historiography // International Journal of Philosophy, 2013. No. 1 (1). P. 21–28.

References

1. *Wittgenstein, L.* (2017). Logiko-filosofskiy traktat [Tractatus Logico-Philosophicus]. Moscow, Kanon+ Publ. (In Russ.).
2. *Vygotsky, L.S.* (2005). Psikhologiya razvitiya cheloveka [Psychology of Human Development]. Moscow, EKSMO Publ.
3. *Vygotsky, L.S. & A.R. Luria.* (1993). Etyudy po istorii povedeniya: Obezyana. Primitiv. Rebenok [Studies on the History of Behavior: Ape, Primitive, and Child]. Moscow, Pedagogika-Press Publ.
4. *Grothendieck, A.* (2001). Urozhai i posevy [Harvesting and Sowing]. Izhevsk, Scientific-Research Center “Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika [Regular and Chaotic Dynamics]”. (In Russ.).
5. *Diophantus.* (1974). Arifmetika i kniga o mnogougolnykh chislakh [Arithmetic and a Book about Polygonal Numbers]. Transl. from ancient Greek by I.N. Veselovsky; ed. and com. by I.G. Bashmakova. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.).
6. *Ivanova, N.I.* (2020). Irratsionalnye chisla, istoriya i metody dokazatelstva irratsionalnosti [Irrational numbers, their history and methods of proving irrationality]. Zаметki uchenogo [Scientist’s Notes], 12, 51–54.
7. *Kline, M.* (1984). Matematika. Utrata opredelennosti [Mathematics: The Loss of Certainty]. Transl. from English by Yu.A. Danilov; ed. by I.M. Yaglom. Moscow, Mir Publ. (In Russ.).
8. *Lipov, A.N.* (2018). O “nesoizmerimyykh sushchnostyakh” v filosofii pifagoreytsev. K filosofskim osnovaniyam irratsionalnykh propotsiy v nauke i kulture [About “incommensurable entities” in the Pythagorean philosophy. On the philosophical foundations of irrational proportions in science and culture]. Filosofskaya mysl [Philosophical Thought], 11, 93–110.

9. *Newton, I.* (1948). *Vseobshchaya arifmetika, ili Kniga ob arifmeticheskikh sinteze i analize* [Universal Arithmetic, Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution]. Moscow, USSR Academy of Sciences Publ. (In Russ.).
10. *Plato.* (1990). *Menon*. Transl. by S.A. Osherov. In: *Plato. Sobranie sochineniy: V 4 t.* [Collected Works: In 4 vol.], Vol. 1, 375–421. Moscow, Mysl Publ. (In Russ.).
11. *Polya, G.* (1975). *Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya* [Mathematics and Plausible Reasoning]. Transl. from English by I.A. Vainshtein; ed. by S.A. Yanovskaya. 2nd ed., rev. Moscow, Nauka Publ. (In Russ.).
12. *Poleshchuk, A.S.* (2012). *Znamenitye klassicheskie zadachi drevnosti* [Famous classical problems of antiquity]. *Informatsionno-kommunikatsionnye tekhnologii v pedagogicheskom obrazovanii* [Information and Communication Technology in Teacher Education], 3 (18), 42–48.
13. *Tikhvinsky, V.I. & V.V. Kholmogorov.* (2022). *Sistemy schisleniya v drevnosti i sovremennosti* [Numeral systems in antiquity and modernity]. *International Journal of Open Information Technologies*, Vol. 10, No. 6, 46–56.
14. *Hacking, I.* (2020). *Pochemu voobshche sushchestvuet filosofiya matematiki?* [Why Is There Philosophy of Mathematics At All?]. Transl. from English by V.V. Tselishchev. Moscow, Kanon+ Publ. (In Russ.).
15. *Chechulin, V.L. & A.A. Lopatin.* (2017). *K periodizatsii istorii razvitiya dokazatelstv neprotivorechivosti matematicheskikh teorii* [Towards periodization of the history of consistency proofs for mathematical theories]. *Sibirskiy filosofskiy zhurnal* [Siberian Journal of Philosophy], Vol. 15, No. 1, 20–34.
16. *Euclid.* (1950). *Nachala* [Elements]. Books I–IV. Moscow, State Publishing House of Physical and Technical Literature. (In Russ.).
17. *Storozhuk, A.* (2013). A new perceptual activity approach to scientific historiography. *International Journal of Philosophy*, 1 (1), 21–28. DOI: 10.11648/j.ijp.20130101.13.

Информация об авторе

Сторожук Анна Юрьевна – Институт философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8).
Stor71@mail.ru

Information about the author

Storozhuk, Anna Yurievna – Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (8, Nikolaeva str., Novosibirsk, 630090, Russia).

Дата поступления 15.09.2023